Согласно (3.31) очевидно, что при кулоновском трении колебания совершенно затухнут, начиная с момента времени $t=\bar{t}$, где

$$\bar{t}=\frac{\pi m\omega}{2A}a_0.$$

§ 4. Автоколебательные системы

Рассмотрим еще колебательную систему, описываемую уравнением вида

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=\varepsilon f(x)\frac{dx}{dt}, \tag{4.1}$$

которое также является частным случаем уравнения (1.1).

Заметим, что ранее рассмотренное уравнение (3.1) может быть приведено к виду (4.1).

В самом деле, полагая

$$\frac{dx}{dt}=y$$

и дифференцируя уравнение (3.1), получаем:

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+ky=\varepsilon F'(y)\frac{dy}{dt}.$$

Сопоставляя уравнение (4.1) с (1.1), имеем:

$$f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)=f(x)\frac{dx}{dt};$$

поэтому, для того чтобы воспользоваться формулами (1.21) — (1.28), необходимо разложить в ряд Фурье выражение

$$f(a\cos\psi)\,a\omega\sin\psi.$$

Для упрощения этой операции рассмотрим функцию

$$F^*(x)=\int_0^x f(x)\,dx \tag{4.2}$$

и разложение в ряд Фурье:

$$F^*(a\cos\psi)=\sum_{n=0}^{\infty}F_n^*(a)\cos n\psi. \tag{4.3}$$

Дифференцируя (4.3) по ψ, на основании (4.2) получим:

$$f(a\cos\psi)\,a\omega\sin\psi=\sum_{n=0}^{\infty}\omega nF_n^*(a)\sin n\psi. \tag{4.4}$$

Сопоставляя (4.4) с (1.16) и (1.17), находим:

$$A_1(a)=\frac{1}{2}F_1^*(a),\quad B_1(a)=0, \tag{4.5}$$

откуда в первом приближении имеем:

$$x=a\cos\psi,$$

где a и ψ должны удовлетворять уравнениям

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{\varepsilon}{2} F_1^*(a), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega. \end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

Для построения второго приближения можем воспользоваться результатами предыдущего параграфа.

Исходя из выражений (3.2), (3.6), (3.7), (3.8) и (4.4) и учитывая, что

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(a\cos\psi)\cos\psi\sin\psi\,d\psi = 0,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(a\cos\psi)\cos^2\psi\,d\psi = \frac{dF_1^*(a)}{da},$$

можем написать:

$$x = a\cos\psi + \frac{\varepsilon}{\omega}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{nF_n^*(a)\sin n\psi}{n^2-1}, \tag{4.7}$$

где a и ψ определяются уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{\varepsilon}{2} F_1^*(a), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \varepsilon^2 B_2(a), \end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

а $B_2(a)$ имеет следующий вид:

$$B_2(a) = -\frac{1}{8a\omega}F_1^*(a)\frac{dF_1^*(a)}{da} - \frac{1}{2\omega a^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2F_n^{*2}(a)}{n^2-1}. \tag{4.9}$$

Сопоставляя полученные приближенные решения с решениями уравнения (3.1), найденными в предыдущем параграфе, убеждаемся в их полной идентичности.

Таким образом, система, описываемая уравнением (4.1), также является квазиизохронной.

В качестве примера рассмотрим уравнение Ван-дер-Поля:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon(1-x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0. \tag{4.10}$$

Сопоставляя (4.10) и (4.1), имеем:

$$f(x) = 1 - x^2,$$

и потому

$$F^*(x) = x - \frac{x^3}{3},$$

после чего находим разложение (4.3) для нашего случая:

$$F^*(a\cos\psi) = a\left(1 - \frac{a^2}{4}\right)\cos\psi - \frac{a^3}{12}\cos 3\psi,$$

согласно которому получим:

$$\left.\begin{aligned} F_1^*(a) &= a\left(1-\frac{a^2}{4}\right), \\ F_3^*(a) &= -\frac{a^3}{12}, \\ F_n^*(a) &= 0, \text{ если } n \neq 1,\ n \neq 3. \end{aligned}\right\} \tag{4.11}$$

Таким образом, учитывая (4.6), в первом приближении имеем:

$$x = a\cos\psi, \tag{4.12}$$

где a и ψ должны быть определены из системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{\varepsilon a}{2}\left(1-\frac{a^2}{4}\right), \\ \frac{d\psi}{dt} &= 1. \end{aligned}\right\} \tag{4.13}$$

Итак, в первом приближении получаем гармоническое колебание, обладающее постоянной частотой $\omega = 1$, амплитуда которого изменяется в соответствии с первым дифференциальным уравнением системы (4.13). Чтобы найти в явном виде закон зависимости амплитуды колебания от времени, необходимо решить это уравнение. Умножая обе его части на a, имеем:

$$\frac{da^2}{dt} = \varepsilon\left(1-\frac{a^2}{4}\right)a^2, \tag{4.14}$$

откуда

$$\frac{da^2}{\left(1-\frac{a^2}{4}\right)a^2} = \varepsilon\, dt,$$

или

$$\frac{da^2}{4-a^2} + \frac{da^2}{a^2} = \varepsilon\, dt,$$

что дает

$$\ln\frac{a^2}{4-a^2} = \ln\frac{a_0^2}{4-a_0^2} + \varepsilon t, \tag{4.15}$$

где a_0 — начальное значение амплитуды.

Из (4.15) окончательно находим:

$$a = \frac{a_0 e^{\frac{1}{2}\varepsilon t}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}a_0^2\left(e^{\varepsilon t}-1\right)}}. \tag{4.16}$$

Подставив (4.16) в (4.12), имеем выражение для первого приближения в явном виде:

$$x = \frac{a_0 e^{\frac{1}{2}\varepsilon t}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}a_0^2\left(e^{\varepsilon t}-1\right)}}\cos(\omega t + \theta). \tag{4.17}$$

Как видно из (4.17), если начальное значение амплитуды a_0 равно нулю, то амплитуда останется равной нулю для любого t, и мы получим $x=0$, т. е. тривиальное решение уравнения Ван-дер-Поля. Это тривиальное решение, очевидно, соответствует статическому режиму, т. е. отсутствию колебаний в системе.

Однако, исходя из этой же формулы, нетрудно заключить, что этот статический режим неустойчив. Действительно, как бы мало ни было начальное значение амплитуды, оно все равно будет монотонно возрастать, приближаясь к предельному значению, равному 2. Таким образом, поскольку случайные малые толчки практически неизбежны, в рассматриваемой колебательной системе, находящейся в состоянии покоя, автоматически возбуждаются колебания с нарастающей амплитудой, т. е. система самовозбуждается.

Из (4.17) также замечаем, что если $a_0=2$, то $a=2$ для любых $t\geqslant 0$. Это решение соответствует стационарному (установившемуся) динамическому режиму:

$$x=2\cos(t+\theta). \tag{4.18}$$

В отличие от статического динамический режим обладает сильной устойчивостью, заключающейся в том, что каково бы ни было значение $a_0\neq 0$, малое или большое, все равно $a(t)\to 2$ при $t\to\infty$.

Иначе говоря, любое колебание при увеличении t приближается к стационарному колебанию (4.18).

Заметим, что только в первом приближении можно представить стационарный режим (4.18) как гармоническое колебание с частотой $\omega=1$ и амплитудой, равной 2. В действительности же стационарный режим не гармонический.

Перейдем теперь к построению второго приближения. Согласно (4.7), (4.8) и (4.11) находим:

$$x=a\cos\psi-\frac{\varepsilon a^3}{32}\sin 3\psi, \tag{4.19}$$

где a и ψ должны быть определены из уравнений

$$\left.\begin{aligned}\frac{da}{dt}&=\frac{\varepsilon a}{2}\left(1-\frac{a^2}{4}\right),\\ \frac{d\psi}{dt}&=1-\varepsilon^2\left(\frac{1}{8}-\frac{a^2}{8}+\frac{7a^4}{256}\right).\end{aligned}\right\} \tag{4.20}$$

Для стационарных колебаний во втором приближении получим:

$$x=2\cos(\omega t+\theta)-\frac{\varepsilon}{4}\sin 3(\omega t+\theta), \tag{4.21}$$

причем

$$\omega=1-\frac{\varepsilon^2}{16}.$$

На рассмотренном нами простом примере колебательной самовозбуждающейся системы, описываемой уравнением Ван-дер-Поля, замечаем коренное отличие этой системы от колебательных консервативных систем, описываемых уравнением вида (2.1).

Именно в консервативных колебательных системах, как мы видели (см. стр. 51), возможны колебания с любой постоянной амплитудой, в автоколебательных же системах колебания с постоянной амплитудой возможны лишь при некотором определенном ее значении. Физически это ясно из следующего очевидного соображения. Поскольку в консервативной системе нет ни рассеяния, ни источника энергии, то раз возбудившиеся колебания не могут ни возрастать, ни затухать, и их амплитуда остается равной ее начальному значению.

В самовозбуждающихся системах имеется рассеяние энергии и ее источник. Поэтому амплитуда колебаний будет возрастать, если количество энергии, доставляемой источником, превышает количество энергии, рассеиваемой диссипативными силами. Наоборот, если количество энергии, доставляемой источником, меньше количества рассеиваемой энергии, колебания будут затухать.

Постоянное же значение амплитуда будет сохранять только в том случае, когда оба упомянутые количества энергии точно уравновешивают друг друга.

Построим теперь приближенные решения для уравнения Ван-дер-Поля, воспользовавшись принципом усреднения.

Для этого необходимо уравнение (4.10) привести к стандартной форме. Это легко сделать, если вместо неизвестной функции x ввести две новые функции a и θ посредством следующих формул замены переменных:

$$x = a\cos(t+\theta), \tag{4.22}$$

$$\frac{dx}{dt} = -a\sin(t+\theta). \tag{4.23}$$

Дифференцируя (4.22) и сравнивая с (4.23), получаем:

$$\frac{da}{dt}\cos(t+\theta) - a\frac{d\theta}{dt}\sin(t+\theta) = 0. \tag{4.24}$$

Дифференцируя (4.23) и принимая во внимание (4.22), (4.10), имеем:

$$\frac{da}{dt}\sin(t+\theta) + a\frac{d\theta}{dt}\cos(t+\theta) = \varepsilon[1 - a^2\cos^2(t+\theta)]\,a\sin(t+\theta). \tag{4.25}$$

Разрешив соотношения (4.24), (4.25) относительно производных, приходим к системе двух уравнений в стандартной форме:

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon[1 - a^2\cos^2(t+\theta)]\,a\sin^2(t+\theta), \\ \frac{d\theta}{dt} &= \varepsilon[1 - a^2\cos^2(t+\theta)]\sin(t+\theta)\cos(t+\theta), \end{aligned}\right\} \tag{4.26}$$

или

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon\left\{\frac{a}{2}\left(1 - \frac{a^2}{4}\right) - \frac{a}{2}\cos 2(t+\theta) + \frac{a^3}{8}\cos 4(t+\theta)\right\}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \varepsilon\left\{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{a^2}{2}\right)\sin 2(t+\theta) - \frac{a^2}{8}\sin 4(t+\theta)\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{4.27}$$

Применяя принцип усреднения, получаем в первом приближении

$$a = a_1, \quad \theta = \theta_1,$$

причем

$$\frac{da_1}{dt} = \frac{\varepsilon a_1}{2}\left(1 - \frac{a_1^2}{4}\right), \quad \frac{d\theta_1}{dt} = 0, \tag{4.28}$$

так как

$$\underset{t}{M}\{\cos 2(t+\theta)\} = \underset{t}{M}\{\sin 2(t+\theta)\} = \underset{t}{M}\{\cos 4(t+\theta)\} = \underset{t}{M}\{\sin 4(t+\theta)\} = 0.$$

Как видно, уравнения первого приближения (4.28) совпадают с полученными выше уравнениями (4.13).

Улучшенное первое приближение, очевидно, будет:

$$\left.\begin{aligned} a &= a_1 - \frac{\varepsilon a_1}{4}\sin 2(t+\theta_1) + \frac{\varepsilon a_1^3}{32}\sin 4(t+\theta_1), \\ \theta &= \theta_1 - \frac{\varepsilon}{4}\left(1-\frac{a_1^2}{2}\right)\cos 2(t+\theta_1) + \frac{\varepsilon a_1^2}{32}\cos 4(t+\theta_1). \end{aligned}\right\} \tag{4.29}$$

Для стационарного режима, как и выше, имеем:

$$a(t) \longrightarrow 2 \text{ при } t \longrightarrow \infty,$$

и, следовательно, для установившегося колебательного режима при $a_1 = 2$ формулы (4.29) улучшенного первого приближения дают:

$$\left.\begin{aligned} a &= 2 - \frac{\varepsilon}{2}\sin 2(t+\theta_1) + \frac{\varepsilon}{4}\sin 4(t+\theta_1), \\ \theta &= \theta_1 + \frac{\varepsilon}{4}\cos 2(t+\theta_1) + \frac{\varepsilon}{8}\cos 4(t+\theta_1). \end{aligned}\right\} \tag{4.30}$$

Подставляя эти значения в (4.22), получим:

$$x = \left[2 - \frac{\varepsilon}{2}\sin 2(t+\theta_1) + \right.$$
$$\left. + \frac{\varepsilon}{4}\sin 4(t+\theta_1)\right]\cos\left(t+\theta_1+\frac{\varepsilon}{4}\cos 2(t+\theta_1)+\frac{\varepsilon}{8}\cos 4(t+\theta_1)\right), \tag{4.31}$$

или, пренебрегая членами второго порядка малости, после элементарных преобразований получаем улучшенное приближение

$$x = 2\cos(t+\theta_1) - \frac{\varepsilon}{4}\sin 3(t+\theta_1), \tag{4.32}$$

которое совпадает с выражением улучшенного приближения, найденным нами ранее.

Прежде чем перейти к специальному рассмотрению стационарных амплитуд и их устойчивости, рассмотрим еще один классический пример автоколебательной системы — колебания часового маятника, возбуждаемого импульсами.

В этом случае имеем уравнение

$$J\frac{d^2x}{dt^2} + \left\{\lambda\frac{dx}{dt} - I\,\frac{\frac{dx}{dt}+\left|\frac{dx}{dt}\right|}{2}\,\delta(x-x_0)\right\} + kx = 0, \tag{4.33}$$

где x_0 — значение угла отклонения маятника, при котором на маятник посылается импульс I, $\delta(x)$ — «несобственная функция», определяемая соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-0}^{+0}\delta(x)\,dx = 1, \\ &\delta(x) = 0 \qquad \text{при } x \neq 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.34}$$

Чтобы привести уравнение (4.33) к виду (1.1), полагаем

$$\omega^2 = \frac{k}{J},$$

$$\varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = \frac{\lambda}{J}\frac{dx}{dt} - \frac{I}{J}\,\frac{\frac{dx}{dt}+\left|\frac{dx}{dt}\right|}{2}\,\delta(x-x_0). \tag{4.35}$$

На основании (4.34) и (4.35) можем написать:

$$\varepsilon \int_0^{2\pi} f(a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi)\sin\psi\,d\psi = \frac{1}{J}\int_0^{2\pi} \lambda a\omega\sin^2\psi\,d\psi -$$

$$-\frac{Ia\omega}{J}\int_0^{2\pi} \delta(a\cos\psi - x_0)\frac{\sin\psi+|\sin\psi|}{2}\sin\psi\,d\psi =$$

$$= \frac{\lambda a\omega\pi}{J} - \frac{Ia\omega}{J}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \delta(a\cos\psi - x_0)\sin^2\psi\,d\psi. \qquad (4.36)$$

Пусть ψ_a является корнем уравнения

$$a\cos\psi = x_0, \qquad (4.37)$$

лежащим между 0 и $\frac{\pi}{2}$.

Тогда для $a \geqslant x_0$ имеем:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \delta(a\cos\psi - x_0)\sin^2\psi\,d\psi = \int_{\psi_a-0}^{\psi_a+0} \delta(a\cos\psi - x_0)\sin^2\psi\,d\psi =$$

$$= \frac{1}{a}\int_{x_0-0}^{x_0+0} \delta(x - x_0)\sin\psi_a\,dx = \frac{\sin\psi_a}{a} = \frac{1}{a}\sqrt{1-\frac{x_0^2}{a^2}}.$$

Если же $a < x_0$, то, очевидно,

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \delta(a\cos\psi - x_0)\sin^2\psi\,d\psi = 0.$$

Таким образом, на основании (4.36), (1.24) и (1.27) получаем уравнения для определения мгновенной амплитуды в первом приближении

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\lambda}{2J}a, \quad \text{если} \quad a < x_0; \\ \frac{da}{dt} &= -\frac{\lambda}{2J}a + \frac{I}{2\pi J}\sqrt{1-\frac{x_0^2}{a^2}}, \quad \text{если} \quad a \geqslant x_0, \end{aligned}\right\} \qquad (4.38)$$

и совершенно аналогично уравнение для полной фазы

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega(a),$$

где

$$\omega(a) = \begin{cases} \omega, & \text{если} \quad a < x_0; \\ \omega - \dfrac{Ix_0}{2\pi J a^2}, & \text{если} \quad a > x_0. \end{cases}$$

Из уравнения (4.38) следует, очевидно, что при достаточно малом начальном значении амплитуды a_0, например при

$$a \leqslant x_0,$$

амплитуда $a(t)$ будет убывать:

$$a(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty,$$

и колебания с течением времени затухнут.

Данная колебательная система не имеет, следовательно, самовозбуждения, и статический режим (равновесие)

$$a = 0$$

является устойчивым.

Однако мы можем поставить вопрос о существовании стационарных (установившихся) динамических режимов, соответствующих постоянным, не равным нулю значениям амплитуды. Очевидно, что такие значения амплитуды a должны удовлетворять уравнению

$$-\frac{\lambda}{2J}a + \frac{I}{2\pi J}\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}} = 0, \tag{4.39}$$

так как для стационарных амплитуд $\frac{da}{dt} = 0$.

Таким образом, вопрос о существовании стационарных динамических режимов связан с вопросом о существовании вещественных положительных корней у уравнения стационарных амплитуд (4.39). Рассмотрим это уравнение.

Переписывая его в форме

$$1 - \frac{x_0^2}{a^2} = \left(\frac{\pi\lambda}{I}\right)^2 a^2,$$

получим биквадратное уравнение для a:

$$a^4 - \left(\frac{I}{\pi\lambda}\right)^2 a^2 + \left(\frac{I}{\pi\lambda}\right)^2 x_0^2 = 0,$$

из которого находим два корня:

$$a_1^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{I}{\pi\lambda}\right)^2 - \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{I}{\pi\lambda}\right)^4 - x_0^2\left(\frac{I}{\pi\lambda}\right)^2}; \tag{4.40}$$

$$a_2^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{I}{\pi\lambda}\right)^2 + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{I}{\pi\lambda}\right)^4 - x_0^2\left(\frac{I}{\pi\lambda}\right)^2}. \tag{4.41}$$

Корни эти будут вещественны, если

$$x_0 < \frac{1}{2}\frac{I}{\pi\lambda}. \tag{4.42}$$

Если

$$x_0 > \frac{1}{2}\frac{I}{\pi\lambda}, \tag{4.43}$$

то оба корня (4.40) и (4.41) будут комплексными, и поэтому в случае (4.43) стационарные динамические режимы невозможны. В этом случае единственным возможным стационарным режимом может быть положение равновесия $a = 0$.

Итак, при выполнении условия (4.43) колебания в рассматриваемой колебательной системе поддерживаться не могут. Независимо от своего начального значения амплитуда монотонно убывает, стремясь к нулю, и колебания со временем затухают.

При выполнении условия (4.42), как это следует из (4.38), процесс изменения амплитуды будет происходить следующим образом:

$$\text{если} \quad a(0) < a_1, \quad \text{то} \quad a(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0;$$

$$\text{если} \quad a(0) > a_1, \quad \text{то} \quad a(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} a_2,$$

причем если $a(0) > a_2$, то амплитуда монотонно убывает до значения a_2, а если $a_1 < a(0) < a_2$, то амплитуда монотонно возрастает, стремясь к тому же значению a_2.

Итак, если параметры колебательной системы удовлетворяют условию (4.42), в системе возможно устойчивое стационарное колебание с постоянной амплитудой:

$$a_2 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{I}{\pi\lambda}\right)^2 + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{I}{\pi\lambda}\right)^4 - x_0^2\left(\frac{I}{\pi\lambda}\right)^2}},$$

но для того, чтобы возбудить это колебание, необходимо, чтобы начальная амплитуда колебаний была больше a_1, т. е. необходим достаточно сильный начальный толчок, который создал бы отклонение маятника, превышающее a_1.

Например, если начальные условия при $t = 0$ будут

$$x = 0, \quad \frac{dx}{dt} = A,$$

то мы видим, что

$$\psi_0 = \frac{3\pi}{2}, \quad A = a_0\omega$$

и, следовательно, условие возбуждения колебаний будет

$$A > a_1\omega.$$

§ 5. Стационарные амплитуды и их устойчивость

В предыдущих параграфах были получены приближенные уравнения, определяющие закон изменения со временем амплитуды главной гармоники колебания.

Для любого n-го приближения полученное уравнение имеет вид

$$\frac{da}{dt} = \Phi(a), \tag{5.1}$$

где

$$\Phi(a) = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \ldots + \varepsilon^n A_n(a),$$

и потому может быть проинтегрировано в квадратурах.

Однако, и не производя интегрирования, можно исследовать поведение решения $a = a(t)$ в зависимости от свойств $\Phi(a)$, чем сейчас и будем заниматься.

Допустим прежде всего, что не существует положительной величины a^*, для которой

$$\Phi(a) > 0 \text{ для всех } a > a^*.$$

Условие это, очевидно, необходимо принять и из чисто физических соображений.