

При выполнении условия (4.42), как это следует из (4.38), процесс изменения амплитуды будет происходить следующим образом:

$$\text{если } a(0) < a_1, \text{ то } a(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0;$$

$$\text{если } a(0) > a_1, \text{ то } a(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} a_2,$$

причем если $a(0) > a_2$, то амплитуда монотонно убывает до значения a_2 , а если $a_1 < a(0) < a_2$, то амплитуда монотонно возрастает, стремясь к тому же значению a_2 .

Итак, если параметры колебательной системы удовлетворяют условию (4.42), в системе возможно устойчивое стационарное колебание с постоянной амплитудой:

$$a_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{I}{\pi \lambda} \right)^2 + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{I}{\pi \lambda} \right)^4 - x_0^2 \left(\frac{I}{\pi \lambda} \right)^2}},$$

но для того, чтобы возбудить это колебание, необходимо, чтобы начальная амплитуда колебаний была больше a_1 , т. е. необходим достаточно сильный начальный толчок, который создал бы отклонение маятника, превышающее a_1 .

Например, если начальные условия при $t = 0$ будут

$$x = 0, \quad \frac{dx}{dt} = A,$$

то мы видим, что

$$\phi_0 = \frac{3\pi}{2}, \quad A = a_0 \omega$$

и, следовательно, условие возбуждения колебаний будет

$$A > a_1 \omega.$$

§ 5. Стационарные амплитуды и их устойчивость

В предыдущих параграфах были получены приближенные уравнения, определяющие закон изменения со временем амплитуды главной гармоники колебания.

Для любого n -го приближения полученное уравнение имеет вид

$$\frac{da}{dt} = \Phi(a), \quad (5.1)$$

где

$$\Phi(a) = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots + \varepsilon^n A_n(a),$$

и потому может быть проинтегрировано в квадратурах.

Однако, и не производя интегрирования, можно исследовать поведение решения $a = a(t)$ в зависимости от свойств $\Phi(a)$, чем сейчас и будем заниматься.

Допустим прежде всего, что не существует положительной величины a^* , для которой

$$\Phi(a) > 0 \text{ для всех } a > a^*.$$

Условие это, очевидно, необходимо принять и из чисто физических соображений.

Действительно, если бы такое значение a^* существовало, то, взяв начальное значение амплитуды большим a^* :

$$a(0) > a^*,$$

получили бы в соответствии с уравнением (5.1) неограниченное возрастание амплитуды

$$a(t) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty,$$

т. е. неограниченное раскачивание колебаний, что, очевидно, физически невозможно.

Поэтому в дальнейшем всегда будем предполагать, что это условие (которое можно назвать условием ограниченности амплитуд) выполнено.

Из уравнения (5.1) выводим, что амплитуда увеличивается, когда $\Phi(a) > 0$, и уменьшается, когда $\Phi(a) < 0$.

Неизменяющиеся, стационарные значения a определяются уравнением

$$\Phi(a) = 0, \quad (5.2)$$

для получения которого необходимо приравнять нулю правую часть уравнения (5.1).

Из уравнения (5.1) видим, что если начальное значение амплитуды не стационарно (не удовлетворяет уравнению (5.2)), то с возрастанием времени амплитуда $a(t)$, монотонно возрастая (если $\Phi(a^0) > 0$) или убывая (если $\Phi(a^0) < 0$), стремится к стационарному значению.

Итак, всякое нестационарное колебание с течением времени приближается к стационарному. Нестационарные колебания называются обычно неустановившимися колебаниями или колебаниями в переходном режиме. Факт приближения всякого колебания к стационарному выявляет особую роль стационарных колебаний, в особенности для высокочастотных колебательных процессов, для которых ввиду малости их периода колебаний переходной режим очень быстро приближается к стационарному. Поэтому колебания такого рода почти тотчас после начала колебательного процесса можно рассматривать практически как стационарные.

Заметим, что существует случай вырождения, когда функция $\Phi(a)$ тождественно равна нулю. В этом случае переходных режимов нет и всякое колебание является стационарным. Этот случай имеет место, например, когда $f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ зависит только от x и не зависит от $\frac{dx}{dt}$. Тогда уравнение (1.1) принимает вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + F(x) = 0, \quad (5.3)$$

подробно рассмотренный нами выше.

Это уравнение можно интерпретировать как уравнение колебаний материальной точки, находящейся под действием силы $F(x)$, зависящей лишь от положения и потому равной $\frac{dU}{dx}$,

где потенциал

$$U = \int_0^x F(x) dx.$$

Уравнение (5.3) является уравнением консервативной колебательной системы, энергия которой не меняется в течение колебаний.

Практически, однако, никакая обычная колебательная система не является консервативной, и в ней всегда имеются диссипативные силы, вызывающие рассеяние энергии, а также, если речь идет об автоколебательной системе, могут находиться и источники энергии.

Перейдем теперь к вопросу устойчивости стационарных колебаний.

Допустим, что a_0 — некоторый корень уравнения (5.2), т. е. постоянное, стационарное решение уравнения (5.1). Рассмотрим бесконечно близкие к a_0 решения уравнения (5.1). Полагая

$$a = a_0 + \delta a,$$

для бесконечно малого приращения δa получим (пренебрегаем членами высшего порядка малости):

$$\frac{d \delta a}{dt} = \Phi'(a_0) \delta a,$$

что дает:

$$\delta a = (\delta a)_0 e^{\Phi'(a_0) t}.$$

Таким образом, мы видим, что рассматриваемое значение амплитуды является устойчивым, т. е. соответствует устойчивому стационарному колебанию, если

$$\Phi'(a_0) < 0, \quad (5.4)$$

в противном случае, когда

$$\Phi'(a_0) > 0,$$

соответствующее стационарное колебание является, очевидно, неустойчивым.

В частности, так как значение $a_0 = 0$, соответствующее состоянию равновесия (статическому режиму), всегда является корнем уравнения (5.2) (благодаря формуле (1.33)), неравенство

$$\Phi'(0) > 0$$

будет представлять условие самовозбуждения колебаний.

Записав его в раскрытой форме:

$$\varepsilon A_1'(0) + \varepsilon^2 A_2'(0) + \dots + \varepsilon^n A_n'(0) > 0,$$

и оставляя в стороне случаи, когда функция $A_1(a)$ может иметь кратные корни, мы видим, что при достаточно малых ε (что, впрочем, всегда явно или неявно предполагается) вопрос о самовозбуждении решается знаком одного члена, именно $\varepsilon A_1'(0)$, т. е. так же, как если бы мы имели дело с уравнением первого приближения.

Далее, в соответствии с (5.2) стационарные амплитуды должны удовлетворять уравнению

$$A_1(a) + \varepsilon A_2(a) + \dots + \varepsilon^{n-1} A_n(a) = 0.$$

Поэтому, оставляя в стороне вышеупомянутые случаи кратных корней, можем разложить a в ряд по степеням параметра ε :

$$a = a^{(0)} + \varepsilon a^{(1)} + \varepsilon^2 a^{(2)} + \dots, \quad (5.5)$$

где $a^{(0)}$ — корень уравнения $A_1(a) = 0$ (стационарная амплитуда в первом приближении),

$$a^{(1)} = -\frac{A_2(a^{(0)})}{A_1'(a^{(0)})}, \dots$$

Так как данный стационарный режим будет устойчивым или неустойчивым, если соответственно

$$\varepsilon A'_1(a) + \varepsilon^2 A'_2(a) + \dots + \varepsilon^n A'_n(a) \leq 0,$$

и так как вследствие соотношения

$$\varepsilon A'_1(a) + \varepsilon^2 A'_2(a) + \dots + \varepsilon^n A'_n(a) = \varepsilon A'_1(a^{(0)}) + \varepsilon^2 \dots,$$

вытекающего из (5.5), знак его левой части определяется при достаточно малом ε знаком $\varepsilon A'_1(a^{(0)})$, видим, что вопрос об устойчивости стационар-

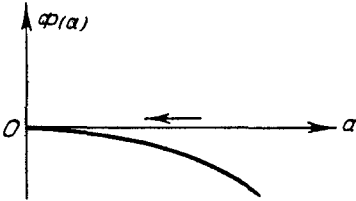


Рис. 25.

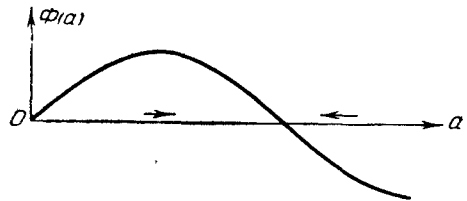


Рис. 26.

ных колебаний решается при достаточно малых ε в зависимости от знака $\varepsilon A'_1(a^{(0)})$, т. е. так, как если бы имели дело с уравнением первого приближения.

Вообще следует подчеркнуть, что, за исключением некоторых особых случаев, уравнения первого приближения приводят к тем же качественным результатам, что и уравнения высших приближений. Переход

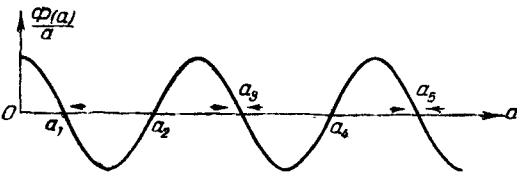


Рис. 27.

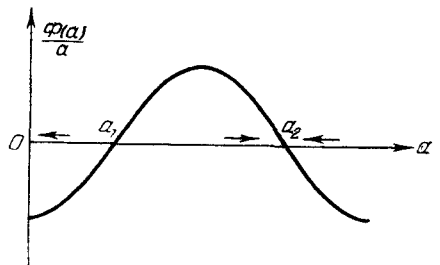


Рис. 28.

к уравнениям высших приближений вводит обычно лишь поправки количественного характера, например поправки к величине стационарной амплитуды и т. п.

Заметим, что условие самовозбуждения колебаний не является необходимым для возможности существования устойчивого стационарного режима колебаний. Для этого, очевидно, достаточно, чтобы уравнение стационарности (5.2) имело по крайней мере один не равный нулю корень, удовлетворяющий условию (5.4).

Кроме аналитического исследования функции $\Phi(a)$, во многих случаях для определения характера колебательного процесса удобно рассматривать графики типа рис. 25 — 28, на которых приведена зависимость $\Phi(a)$ от a .

Стационарные амплитуды здесь определяются точками пересечения кривой $\Phi(a)$ с осью абсцисс. Нетрудно убедиться, что точки, в которых кривая пересекает ось Oa сверху вниз, соответствуют устойчивым

амплитудам колебаний, а точки, в которых кривая пересекает ось Oa снизу вверх, дают неустойчивые амплитуды.

Действительно, в первом случае нарушение стационарной амплитуды вызывает такое ее последующее изменение, благодаря которому амплитуда возвращается к своему стационарному значению. Во втором случае имеем обратную картину. На рис. 25—28 стрелками показано направление изменения a . Рис. 25 соответствует диссипативному случаю, рис. 26 — случаю самовозбуждения с одной возможной стационарной амплитудой, рис. 27 — случаю самовозбуждения с несколькими возможными стационарными амплитудами: a_1, a_3, a_5 (колебания с амплитудами a_2, a_4 , очевидно, неустойчивы).

Вообще, если функция $\Phi(a)$ имеет корень a^* , удовлетворяющий неравенству $\Phi'(a^*) < 0$, то возможен стационарный режим колебаний с постоянной амплитудой, равной a^* . Заметим, что стационарная амплитуда самовозбужденных колебаний (т. е. предел монотонно возрастающей амплитуды колебаний, для которых a^0 было весьма мало) равна наименьшей из всех возможных стационарных амплитуд. Этот факт становится ясным из того очевидного физического соображения, что амплитуда, возрастая, не может перескочить через устойчивый корень уравнения $\Phi(a) = 0$, т. е. через корень этого уравнения, удовлетворяющий условию $\Phi'(a) < 0$.

На рис. 28 изображен случай, когда система несамовозбуждена, но вместе с тем в ней все же возможны стационарные колебания. В этом случае если начальное значение амплитуды a^0 меньше a_1 , то колебания затухают, если же оно больше a_1 , то колебания устанавливаются и в пределе превращаются в стационарные колебания с амплитудой a_2 .

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (\lambda_1 + \lambda_2x + \lambda_3x^2 + \lambda_4x^3 + \lambda_5x^4) \frac{dx}{dt} + \omega^2x = 0, \quad (5.6)$$

встречающееся в теории ламповых генераторов.

Чтобы обеспечить применимость к этому уравнению полученных нами результатов, допустим, что возмущающий член является достаточно малым, и положим

$$-(\lambda_1 + \lambda_2x + \lambda_3x^2 + \lambda_4x^3 + \lambda_5x^4) \frac{dx}{dt} = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right).$$

Тогда получим:

$$\frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \phi, -a\omega \sin \phi) \sin \phi \, d\phi = \lambda_1 a \omega + \frac{\lambda_3 a^3 \omega}{4} + \frac{\lambda_5 a^5 \omega}{8},$$

и потому на основании (1.27) приходим к следующему уравнению первого приближения для амплитуды:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\lambda_1 a}{2} - \frac{\lambda_3 a^3}{8} - \frac{\lambda_5 a^5}{16}.$$

Заметим, что если $\lambda_5 < 0$, то правая часть этого уравнения оказывается положительной для всех достаточно больших значений a . Таким образом, в этом случае колебания с достаточно большой амплитудой неограниченно раскачиваются, т. е. $a(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, что, очевидно, невозможно по физическим соображениям.

Допустим поэтому, что $\lambda_5 > 0$. Далее заметим, что условием самовозбуждения будет $\lambda_1 < 0$. Рассматривая случай отсутствия самовозбужде-

ния, положим $\lambda_1 > 0$. Решая уравнение

$$\frac{\lambda_1 a}{2} + \frac{\lambda_3 a^3}{8} + \frac{\lambda_5 a^5}{16} = 0, \quad (5.7)$$

кроме «статического» решения $a = 0$, находим:

$$a^2 = -\frac{\lambda_3}{\lambda_5} \pm \sqrt{\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_5}\right)^2 - \frac{8\lambda_1}{\lambda_5}}.$$

Так как $\lambda_1 > 0$, $\lambda_5 > 0$, то, если $\lambda_3 > 0$ или если $\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_5}\right)^2 < \frac{8\lambda_1}{\lambda_5}$, уравнение (5.7) не имеет положительных решений. График зависимости $\frac{da}{dt}$ от a имеет вид, представленный на рис. 25, показывающем, что колебания любой амплитуды являются затухающими.

Пусть, наоборот,

$$\lambda_3 < 0, \quad \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_5}\right)^2 > \frac{8\lambda_1}{\lambda_5};$$

тогда имеем два возможных значения для амплитуды стационарных колебаний:

$$a_1 = \sqrt{-\frac{\lambda_3}{\lambda_5} - \sqrt{\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_5}\right)^2 - \frac{8\lambda_1}{\lambda_5}}},$$

$$a_2 = \sqrt{-\frac{\lambda_3}{\lambda_5} + \sqrt{\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_5}\right)^2 - \frac{8\lambda_1}{\lambda_5}}}.$$

График зависимости $\frac{da}{dt}$ от a в этом случае приведен на рис. 29. Очевидно, что a_1 соответствует неустойчивым, а a_2 — устойчивым колебаниям.

Итак, колебания с начальной амплитудой, меньшей a_1 , будут затухать, а колебания с начальной амплитудой, большей a_1 , будут приближаться к устойчивому стационарному режиму.

Рассмотрим теперь случай, когда в колебательной системе имеется некоторый параметр μ (или группа параметров), который можно изменять как угодно медленно (адиабатически). В этом случае правая часть уравнения (5.1) будет зависеть от μ и может быть представлена в виде $\Phi(a, \mu)$.

Будем рассматривать изменение параметра, настолько медленное по сравнению с эффективной длительностью переходного режима (т. е. по сравнению с временем, по истечении которого произвольное колебание становится практически стационарным), что для каждого значения μ в течение этого изменения колебание можно предполагать стационарным.

Для определенности допустим, что для μ , меньших некоторого μ_0 ,

$$\Phi'_a(0, \mu) < 0,$$

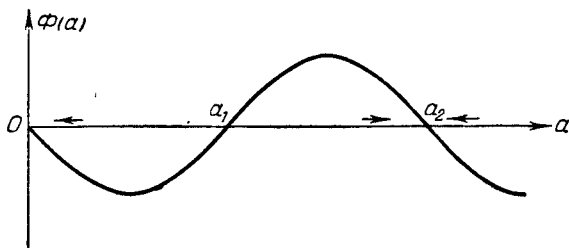


Рис. 29.

а для μ , больших этого значения,

$$\Phi'_a(0, \mu) > 0.$$

Будем теперь адиабатически изменять μ , увеличивая его, начиная с некоторого значения μ_1 , меньшего μ_0 .

Пусть система находилась вначале в равновесии: $a = 0$. Тогда, поскольку при $\mu < \mu_0$ система не самовозбуждена, она и останется в равновесии вплоть до достижения параметром μ критического значения, равного μ_0 . При переходе через это критическое значение появляется самовозбуждение, и равновесие становится невозможным, амплитуда a от нуля переходит к значению $a(\mu)$, равному наименьшему устойчивому корню уравнения

$$\Phi(a, \mu) = 0.$$

Таким образом, зависимость амплитуды от параметра представляется в виде

$$\begin{aligned} a &= 0 && \text{для } \mu < \mu_0, \\ a &= a(\mu) && \text{для } \mu > \mu_0. \end{aligned}$$

Если полученная кривая зависимости a от μ непрерывна, то мы будем говорить, что имеем случай мягкого возбуждения колебаний (по отношению к данному параметру). В случае мягкого возбуждения при переходе через критическое значение $\mu = \mu_0$ в системе начинается генерация колебаний, амплитуда которых вблизи критического значения постепенно возрастает от нуля.

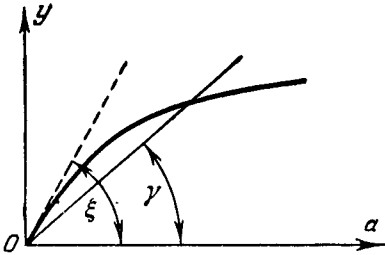


Рис. 30.

Если же в точке $\mu = \mu_0$ имеется разрыв, то тогда при переходе через критическое значение амплитуда перескакивает от нулевого значения сразу к значению $a(\mu_0 + 0)$. Этот случай называют случаем жесткого возбуждения.

Пусть, например, правая часть уравнения (5.1) имеет следующий вид:

$$\Phi(a, \mu) = \left\{ \Phi(a) - \frac{a}{\mu} \right\} \Psi(a, \mu), \quad (5.8)$$

где $\Psi(a, \mu) > 0$ и $\Phi(a)$ — некоторая функция a , не зависящая от μ . В этом случае вопрос о характере возбуждения можно решить с помощью следующих графических построений.

Построим кривую (рис. 30)

$$y = \Phi(a).$$

Тогда стационарные амплитуды определяются точками пересечения этой кривой прямыми вида $y = \frac{1}{\mu} a$. Устойчивыми будут те, для которых угол наклона прямой больше угла наклона касательной в точке пересечения.

Таким образом, на рис. 30 имеем случай мягкого возбуждения, так как при переходе μ через критическое значение, равное

$$\mu_0 = \frac{1}{\operatorname{tg} \xi} = \frac{1}{\Phi'_a(0)},$$

амплитуда начинает возрастать от нуля.

На рис. 31 имеем случай жесткого возбуждения. При переходе через критическое значение амплитуда перескакивает от нуля к a_1 .

Рассмотрим детально случай, представленный на рис. 31. Пусть мы увеличиваем постепенно параметр μ от нуля, уменьшая таким образом угол γ наклона прямой $y = \frac{1}{\mu} a$, и пусть система находится вначале в состоянии покоя $a = 0$.

Тогда, очевидно, амплитуда будет равна нулю вплоть до того момента, пока γ не станет меньше ξ . После перехода через ξ амплитуда

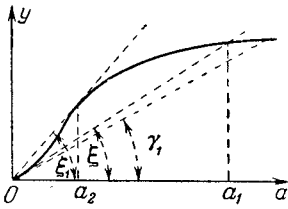


Рис. 31.

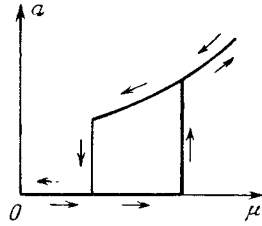


Рис. 32.

скачком принимает значение a_1 и затем начинает непрерывно расти. Если мы теперь начнем уменьшать μ (увеличивать γ), начиная от значения $\gamma_1 > \xi$, то амплитуда будет убывать и, начиная с $\gamma = \xi_1$, срывается, при этом в системе устанавливается состояние покоя. Отобразив графически зависимость a от μ в течение такого процесса, получим кривые (рис. 32), имеющие характерную гистерезисную петлю. Значение стационарной амплитуды зависит не только от значения параметра, но и от того, каким образом этот параметр изменялся.

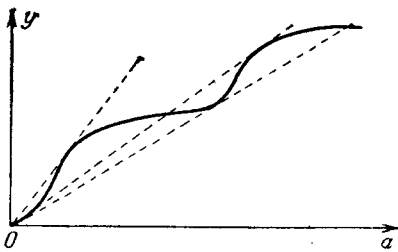


Рис. 33.

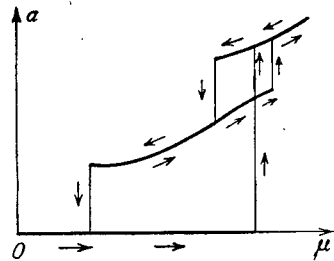


Рис. 34.

Подобного рода явления наблюдаются в некоторых автоколебательных системах и называются колебательным гистерезисом или затягиванием; последнее наименование отражает тот факт, что при бесконечно медленном, или, как иногда говорят, адиабатическом, изменении параметра амплитуда стремится как бы затянуть возможно дольше плавное изменение до тех пор, пока непрерывное изменение приводит к неустойчивым амплитудам.

Гистерезисные петли могут иметь и более сложную форму, чем на рис. 32. Так, например, для случая диаграммы рис. 33 при изменении μ имеем зависимость, схематически изображенную на рис. 34. Для исследования характера возбуждения колебаний можно воспользоваться еще следующим приемом, по существу аналогичным вышеизложенному.

Построим кривую

$$y = \frac{\Phi(a)}{a}. \quad (5.9)$$

Тогда стационарные амплитуды определяются точками пересечения этой кривой прямыми, параллельными оси a :

$$y = \frac{1}{\mu}. \quad (5.10)$$

Условие устойчивости

$$\frac{\partial \Phi(a, \mu)}{\partial a} < 0$$

может быть записано в виде

$$\frac{\partial \left\{ \frac{\Phi(a)}{a} - \frac{1}{\mu} \right\}}{\partial a} < 0 \quad (5.11)$$

и потому допускает простую геометрическую интерпретацию. Устойчивыми будут амплитуды, соответствующие таким точкам пересечения кривой

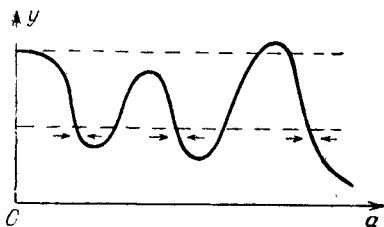


Рис. 35.

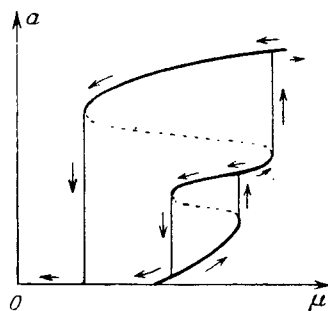


Рис. 36.

(5.9) с прямой (5.10), в которых направление кривой идет сверху вниз (рис. 35).

Сказанное относится к стационарным амплитудам, не равным нулю. Кроме этого, всегда существует и стационарная амплитуда, равная нулю. Она будет неустойчива, если

$$\left\{ \frac{\Phi(a)}{a} \right\}_{a=0} > \frac{1}{\mu}, \quad (5.12)$$

т. е. если точка пересечения кривой (5.9) с осью $a=0$ лежит выше точки пересечения с этой осью прямой (5.10). В противном случае равновесие устойчиво.

Как видно, этот последний графический прием удобнее первого, так как в этом случае не требуется проводить касательных. В остальном рассуждения остаются теми же, что дает нам возможность не детализировать их.

На рис. 36 схематически изображена картина колебательного гистерезиса, соответствующего случаю, изображенному на рис. 35.

В качестве простейшего примера рассмотрим уравнение электронного генератора (при безразмерном времени):

$$\frac{d^2 V}{dt^2} + V + \frac{1}{\sqrt{LC}} \left\{ \frac{L}{R} - (M - DL) f'(E_0 + V) \right\} \frac{dV}{dt} = 0. \quad (5.13)$$

Здесь V — переменная слагающая управляющего напряжения, L , C и R — соответственно самоиндукция, емкость и сопротивление колебательного контура, M — коэффициент взаимной индукции между цепью сетки и колебательным контуром, E_0 — постоянная слагающая управляющего напряжения, D — проницаемость лампы.

Ввиду того, что при обычном устройстве генератора безразмерное выражение

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} \left\{ \frac{1}{R} - (M - DL) f' (E_0 + V) \right\} \quad (5.14)$$

будет величиной порядка 0,01, для построения приближенного решения можем воспользоваться ранее выведенными формулами.

На основании (1.23), (1.24) и (1.27) в первом приближении имеем:

$$V = a \cos (t + \varphi), \quad (5.15)$$

причем

$$2\sqrt{LC} \frac{da}{dt} = -\frac{L}{R} a + (M - DL) F(a), \quad (5.16)$$

где

$$F(a) = \frac{a}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(E_0 + a \cos \tau) \sin^2 \tau d\tau = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(E_0 + a \cos \tau) \sin \tau d\tau. \quad (5.17)$$

Характер возбуждения колебаний, выраженный уравнением (5.16), согласно изложенному выше может быть исследован двумя графическими приемами:

1) Путем построения кривой

$$y = F(a),$$

так называемой колебательной характеристики лампы. Тогда стационарные амплитуды определяются точками пересечения этой кривой с прямыми

$$y = \frac{L}{(M - DL) R} a.$$

2) Путем построения кривой

$$y = \frac{F(a)}{a}$$

и рассмотрения ее пересечений с прямыми

$$y = \frac{L}{(M - DL) R},$$

параллельными оси $y = 0$.

Заметим мимоходом, что угловой коэффициент касательной к характеристике лампы, т. е. $f'(E)$, именуется обычно в радиотехнике крутизной характеристики.

Ввиду того, что

$$\frac{F(a)}{a} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(E_0 + a \cos \tau) \sin^2 \tau d\tau = f'(E_0 + a \cos \vartheta) \quad (0 \leq \vartheta \leq 2\pi),$$

выражение $\frac{F(a)}{a}$ можно назвать средней крутизной лампы.

Поэтому первый графический метод иногда называется методом колебательной характеристики, второй — методом средней крутизны.

В данном примере параметр $\mu = \frac{(M-DL)R}{L}$.

В настоящем параграфе мы подробно рассмотрели первое уравнение системы (1.3), выражающее зависимость амплитуды от времени и тем самым характеризующее свойства колебательного процесса с точки зрения его амплитуды.

Что касается второго уравнения системы (1.3), то оно характеризует частотные свойства колебаний.

Согласно этому уравнению мгновенная собственная частота колебаний $\frac{d\psi}{dt}$ равна $\omega(a)$. Поэтому в случае стационарных колебаний $\omega(a)$, являясь постоянной, будет обычной собственной частотой.

Легко видеть, что собственная частота $\omega(a)$, а тем самым и период $T = \frac{2\pi}{\omega(a)}$ стационарных колебаний, зависит от амплитуды. Таким образом, вообще говоря, нелинейные колебательные системы не изохронны.

Как мы видели выше, в некоторых важных частных случаях нелинейная колебательная система в первом приближении может быть изохронной.

§ 6. Построение стационарных решений

В предыдущих параграфах нами приведен метод построения приближенных решений для уравнений типа (1.1). Построены первые и высшие приближения для различных частных случаев уравнения (1.1), а также произведены расчеты для конкретных примеров. Как мы убедились выше, во всех случаях решение нелинейного дифференциального уравнения типа (1.1) замещается решением двух уравнений первого порядка, определяющих амплитуду и фазу колебания.

Таким образом, для того чтобы построить приближенное решение с определенной, наперед заданной точностью, нам необходимо составить уравнения типа (1.5) и после этого найти из них выражения для амплитуды и фазы как функций времени.

Для определения приближенных решений, соответствующих установившемуся режиму в колебательной системе (стационарным колебаниям), необходимо приравнять правую часть уравнения (5.1) нулю, так как при стационарном режиме амплитуда постоянна и, следовательно, производная от нее равна нулю. Из полученного алгебраического уравнения находим стационарные значения амплитуды. Однако для построения приближенных решений, соответствующих непосредственно стационарным колебаниям, можно указать более простой способ, чем изложенный выше.

Рассмотрим сначала уравнение консервативной колебательной системы (2.1), которое можно записать в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f(x). \quad (6.1)$$

Согласно результатам § 2 стационарное решение этого уравнения во втором приближении имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos(\omega t + \varphi) - \frac{\varepsilon}{\omega^2} \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \frac{f_n(a) \cos n(\omega t + \varphi)}{n^2 - 1}, \\ \omega_{II}^2(a) &= \omega^2 - \frac{\varepsilon f_1(a)}{a} + \varepsilon^2 \dots, \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$