В данном примере параметр $\mu = \frac{(M-DL)R}{L}$.

В настоящем параграфе мы подробно рассмотрели первое уравнение системы (1.3), выражающее зависимость амплитуды от времени и тем самым характеризующее свойства колебательного процесса с точки зрения его амплитуды.

Что касается второго уравнения системы (1.3), то оно характеризует частотные свойства колебаний.

Согласно этому уравнению мгновенная собственная частота колебаний $\frac{d\psi}{dt}$ равна $\omega(a)$. Поэтому в случае стационарных колебаний $\omega(a)$, являясь постоянной, будет обычной собственной частотой.

Легко видеть, что собственная частота $\omega(a)$, а тем самым и период $T = \frac{2\pi}{\omega(a)}$ стационарных колебаний, зависит от амплитуды. Таким образом, вообще говоря, нелинейные колебательные системы не изохронны.

Как мы видели выше, в некоторых важных частных случаях нелинейная колебательная система в первом приближении может быть изохронной.

§ 6. Построение стационарных решений

В предыдущих параграфах нами приведен метод построения приближенных решений для уравнений типа (1.1). Построены первые и высшие приближения для различных частных случаев уравнения (1.1), а также произведены расчеты для конкретных примеров. Как мы убедились выше, во всех случаях решение нелинейного дифференциального уравнения типа (1.1) заменяется решением двух уравнений первого порядка, определяющих амплитуду и фазу колебания.

Таким образом, для того чтобы построить приближенное решение с определенной, наперед заданной точностью, нам необходимо составить уравнения типа (1.5) и после этого найти из них выражения для амплитуды и фазы как функций времени.

Для определения приближенных решений, соответствующих установившемуся режиму в колебательной системе (стационарным колебаниям), необходимо приравнять правую часть уравнения (5.1) нулю, так как при стационарном режиме амплитуда постоянна и, следовательно, производная от нее равна нулю. Из полученного алгебраического уравнения находим стационарные значения амплитуды. Однако для построения приближенных решений, соответствующих непосредственно стационарным колебаниям, можно указать более простой способ, чем изложенный выше.

Рассмотрим сначала уравнение консервативной колебательной системы (2.1), которое можно записать в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f(x). \tag{6.1}$$

Согласно результатам § 2 стационарное решение этого уравнения во втором приближении имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos(\omega t + \varphi) - \frac{\varepsilon}{\omega^2}\sum_{\substack{n=0\\ n\neq 1}}^{\infty} \frac{f_n(a)\cos n(\omega t+\varphi)}{n^2-1}, \\ \omega_{\mathrm{II}}^2(a) &= \omega^2 - \varepsilon\frac{f_1(a)}{a} + \varepsilon^2 \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{6.2}$$

где $f_n(a)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ — коэффициенты Фурье в разложении

$$\left.\begin{aligned} f(a\cos\psi) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n(a)\cos n\psi, \\ f_n(a) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi)\cos n\psi\,d\psi, \end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

a и φ — постоянные интегрирования, определяющиеся начальными значениями.

Исходя из выражений (6.2), естественно для получения высших приближений, соответствующих стационарному режиму, воспользоваться следующим приемом.

Представим решение уравнения (6.1) в виде $x=z(\overline{\omega}t+\varphi)$, где $z(\overline{\omega}t+\varphi)$ — периодическая функция $\overline{\omega}t+\varphi$ с периодом 2π.

Заметим, что $x=z(\overline{\omega}t+\varphi)$ будет удовлетворять уравнению (6.1) только тогда, когда $z(\overline{\omega}t+\varphi)$ удовлетворяет уравнению

$$\overline{\omega}^2\frac{d^2z}{d\psi^2}+\omega^2 z=\varepsilon f(z). \tag{6.4}$$

Решение уравнения (6.4) $z=z(\psi)$, $\psi=\overline{\omega}t+\varphi$, а также выражение для частоты колебания $\overline{\omega}$ естественно искать в виде разложений

$$z(\psi)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n z_n(\psi), \tag{6.5}$$

$$\overline{\omega}^2=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\alpha_n, \tag{6.6}$$

коэффициенты которых определим, подставив (6.5) и (6.6) в (6.4) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра ε, причем потребуем, чтобы $z_n(\psi)$ были периодическими функциями ψ с периодом 2π.

Произведя подстановку, получаем следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_0\frac{d^2z_0}{d\psi^2}+\omega^2 z_0=0, \\ &\alpha_0\frac{d^2z_1}{d\psi^2}+\omega^2 z_1=f(z_0)-\alpha_1\frac{d^2z_0}{d\psi^2}, \\ &\alpha_0\frac{d^2z_2}{d\psi^2}+\omega^2 z_2=f'(z_0)z_1-\alpha_2\frac{d^2z_0}{d\psi^2}-\alpha_1\frac{d^2z_1}{d\psi^2}, \\ &\alpha_0\frac{d^2z_3}{d\psi^2}+\omega^2 z_3=f'(z_0)z_2+\frac{1}{2}f''(z_0)z_1^2-\alpha_3\frac{d^2z_0}{d\psi^2}-\alpha_2\frac{d^2z_1}{d\psi^2}-\alpha_1\frac{d^2z_2}{d\psi^2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{6.7}$$

Определяя из первых $N+1$ уравнений системы (6.7) функции $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_N$, а также величины $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$, можем составить выражение

$$x=\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^n z_n(\overline{\omega}t+\varphi), \tag{6.8}$$

где

$$\overline{\omega}^2=\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^n\alpha_n,$$

которое будет удовлетворять уравнению (6.1) с точностью до величин порядка малости ε^{N+1} и, следовательно, может рассматриваться как $N+1$-е приближение решения уравнения (6.1), соответствующее стационарным колебаниям. Определение функций $z_n(\omega t+\varphi)$ и величин α_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$ из уравнений (6.7) может быть произведено, вообще говоря, неоднозначно. Для того чтобы эти величины были определены однозначно, необходимо наложить некоторые дополнительные условия.

Потребуем, чтобы $z_n(\psi)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ не имели в своем составе основной гармоники аргумента ψ. Из первого уравнения (6.7) находим:

$$z_0(\psi)=a\cos\psi, \qquad \alpha_0=\omega^2. \tag{6.9}$$

Подставляя (6.9) во второе уравнение системы (6.7), имеем:

$$\omega^2\left(\frac{d^2z_1}{d\psi^2}+z_1\right)=f(a\cos\psi)+\alpha_1 a\cos\psi \tag{6.10}$$

или, учитывая (6.3),

$$\omega^2\left(\frac{d^2z_1}{d\psi^2}+z_1\right)=\sum_{\substack{n=0\\ n\neq 1}}^{\infty} f_n(a)\cos n\psi+(\alpha_1 a+f_1(a))\cos\psi. \tag{6.11}$$

Принимая во внимание требование периодичности функции $z_1(\psi)$, приравниваем в правой части уравнения (6.11) нулю коэффициент при первой гармонике аргумента ψ. В результате получаем уравнение для определения α_1:

$$\alpha_1 a+f_1(a)=0,$$

откуда находим:

$$\alpha_1=\frac{-f_1(a)}{a}.$$

Подставляя найденное значение α_1 в правую часть уравнения (6.11), имеем:

$$\frac{d^2z_1}{d\psi^2}+z_1=\frac{1}{\omega^2}\sum_{\substack{n=0\\ n\neq 1}}^{\infty} f_n(a)\cos n\psi, \tag{6.12}$$

откуда находим для $z_1(\psi)$ следующее выражение:

$$z_1(\psi)=\frac{1}{\omega^2}\sum_{\substack{n=0\\ n\neq 1}}^{\infty}\frac{f_n(a)\cos n\psi}{1-n^2}. \tag{6.13}$$

При этом как выражение (6.13), так и выражение для α_1 совпадают с выражениями, найденными согласно общему методу.

Продолжая изложенный процесс, можем последовательно определить все функции $z_1, z_2, z_3, \ldots$ и величины $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ до сколь угодно большого значения индекса и тем самым построить приближенные решения, удовлетворяющие рассматриваемому уравнению (6.1) с точностью до любой степени ε.

В качестве примера определим стационарное решение в третьем улучшенном приближении (с точностью до величин порядка малости ε^3 включительно) для колебательной системы, описываемой уравнением вида

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x+\varepsilon x^3=0. \tag{6.14}$$

Для определения функций z_0, z_1, z_2, z_3 и величин α_0, α_1, α_2, α_3 на основании (6.7) получаем уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_0 \frac{d^2 z_0}{d\psi^2} + z_0 = 0,\\
&\alpha_0 \frac{d^2 z_1}{d\psi^2} + z_1 = -z^3 - \alpha_1 \frac{d^2 z_0}{d\psi^2},\\
&\alpha_0 \frac{d^2 z_2}{d\psi^2} + z_2 = -3z_0^2 z_1 - \alpha_2 \frac{d^2 z_0}{d\psi^2} - \alpha_1 \frac{d^2 z_1}{d\psi^2},\\
&\alpha_0 \frac{d^2 z_3}{d\psi^2} + z_3 = -3z_0^2 z_2 - 3z_1 z_0 - \alpha_3 \frac{d^2 z_0}{d\psi^2} - \alpha_2 \frac{d^2 z_1}{d\psi^2} - \alpha_1 \frac{d^2 z_2}{d\psi^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{6.15}$$

Из первого уравнения находим:

$$z_0(\psi) = a\cos\psi, \qquad \alpha_0 = 1. \tag{6.16}$$

После этого второе уравнение можно записать в виде

$$\frac{d^2 z_1}{d\psi^2} + z_1 = -a^3\cos^3\psi + \alpha_1 a\cos\psi, \tag{6.17}$$

или

$$\frac{d^2 z_1}{d\psi^2} + z_1 = -\frac{a^3}{4}\cos 3\psi + \left(\alpha_1 a - \frac{3}{4}a^3\right)\cos\psi, \tag{6.18}$$

откуда имеем:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{3}{4}a^2,\\
z_1(\psi) &= \frac{a^3}{32}\cos 3\psi.
\end{aligned}\right\} \tag{6.19}$$

Подставляя (6.16) и (6.19) в третье уравнение системы (6.15), получаем:

$$\frac{d^2 z_2}{d\psi^2} + z_2 = -\frac{3a^5}{32}\cos^2\psi\cos 3\psi + \frac{27}{128}a^5\cos 3\psi + \alpha_2 a\cos\psi, \tag{6.20}$$

или

$$\frac{d^2 z_2}{d\psi^2} + z_2 = \frac{21}{128}a^5\cos 3\psi - \frac{3a^5}{128}\cos 5\psi + \left(\alpha_2 a - \frac{3a^5}{128}\right)\cos\psi, \tag{6.21}$$

откуда находим:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_2 &= \frac{3a^4}{128},\\
z_2(\psi) &= -\frac{21}{1024}a^5\cos 3\psi + \frac{a^5}{1024}\cos 5\psi.
\end{aligned}\right\} \tag{6.22}$$

После этого последнее уравнение системы (6.15) может быть записано в виде:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 z_3}{d\psi^2} + z_3 = {}& -3a^2\cos^2\psi\left(-\frac{21}{1024}a^5\cos 3\psi + \frac{a^5}{1024}\cos 5\psi\right) -\\
& -3\frac{a^6}{1024}\cos^2 3\psi\, a\cos\psi + \alpha_3 a\cos\psi + \frac{3a^4}{128}\frac{9a^3}{32}\cos 3\psi -\\
& -\frac{3}{4}a^2\left(\frac{21}{1024}a^5\, 9\cos 3\psi - \frac{a^5}{1024}25\cos 5\psi\right),
\end{aligned} \tag{6.23}$$

или

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 z_3}{d\psi^2} + z_3 = {}& -\frac{1059a^7}{2048}\cos 3\psi + \frac{177}{2048}a^7\cos 5\psi -\\
& -\frac{3}{2048}a^7\cos 7\psi + \left(\alpha_3 a + \frac{57}{4096}a^7\right)\cos\psi,
\end{aligned} \tag{6.24}$$

из которого находим:

$$\left.\begin{aligned} a_3 &= -\frac{57}{4096}a^6, \\ z_3(\psi) &= \frac{1059}{2048\cdot 8}a^7\cos 3\psi - \frac{177}{2048\cdot 24}a^7\cos 5\psi + \frac{3}{2048\cdot 48}a^7\cos 7\psi. \end{aligned}\right\} \qquad (6.25)$$

Таким образом, принимая во внимание (6.8), (6.19), (6.22) и (6.25), получаем приближенное стационарное решение уравнения (6.14) с точностью до величин порядка малости ε^3 включительно в виде

$$\begin{aligned} x = a\cos(\bar{\omega}t+\varphi) + \varepsilon\frac{a^3}{32}\left[1-\varepsilon\frac{21}{32}a^2+\varepsilon^2\frac{1059}{512}a^4\right]\cos 3(\bar{\omega}t+\varphi) + \\ + \varepsilon^2\frac{a^5}{1024}\left[1-\varepsilon\frac{177}{48}a^2\right]\cos 5(\bar{\omega}t+\varphi) + \varepsilon^3\frac{3a^7}{2048\cdot 48}\cos 7(\bar{\omega}t+\varphi), \end{aligned} \qquad (6.26)$$

где a и φ — произвольные постоянные, а частота колебаний $\bar{\omega}$ определяется выражением

$$\bar{\omega}^2 = 1 + \frac{3}{4}\varepsilon a^2 + \frac{3}{128}\varepsilon^2 a^4 - \frac{57}{4096}\varepsilon^3 a^6. \qquad (6.27)$$

Перейдем теперь к построению приближенных решений для стационарных колебаний в неконсервативных системах. Для этого рассмотрим уравнение вида (1.1)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right). \qquad (6.28)$$

Стационарное решение (улучшенное первое приближение) этого уравнения согласно § 2 может быть записано в виде

$$x = a\cos\psi + \frac{g_0(a)}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{g_n(a)\cos n\psi + h_n(a)\sin n\psi}{n^2-1}, \qquad (6.29)$$

где $g_n(a)$ и $h_n(a)$ $(n=0, 2, 3, \ldots)$ определяются согласно формулам (1.29), $\psi = \bar{\omega}(a)t+\varphi$, а a и $\bar{\omega}(a)$ должны быть найдены из следующих выражений:

$$\left.\begin{aligned} A_1(a) &= 0, \\ \bar{\omega}(a) &= \omega + \varepsilon B_1(a), \end{aligned}\right\} \qquad (6.30)$$

$A_1(a)$ и $B_1(a)$ определяются согласно формулам (1.27).

Для случая консервативных колебательных систем, как мы уже убедились, $A_1(a)$ тождественно равно нулю, и поэтому выражение для приближенного стационарного решения (6.29) зависит от двух произвольных постоянных a и φ.

Рассмотрим теперь случай, когда $A_1(a)$ не обращается тождественно в нуль ни в каком интервале значений a. Предположим также, что функция $A_1(a)$ имеет лишь простые корни. В этом случае каждому корню $A_1(a)$ соответствует некоторое стационарное состояние, причем выражение (6.29) для этого стационарного состояния зависит лишь от одной произвольной постоянной, а именно от φ.

Приступая к изложению формальной методики построения стационарных решений уравнения (1.1), воспользуемся в основном способом, примененным выше для консервативных колебательных систем.

Решение уравнения (6.28), соответствующее стационарным колебаниям, представим в виде

$$x = z(\bar{\omega}t+\varphi), \qquad (6.31)$$

где φ — произвольная постоянная, $\bar{\omega}$ — частота колебания, $z(\psi)$ — периодическая функция ψ с периодом 2π.

Как и выше, функция $z(\psi)$ должна удовлетворять уравнению

$$\bar{\omega}^2 \frac{d^2 z}{d\psi^2} + \omega^2 z = \varepsilon f\left(z, \ \bar{\omega}\frac{dz}{d\psi}\right). \tag{6.32}$$

Будем искать функцию $z(\psi)$ и частоту колебаний $\bar{\omega}$ в виде разложений

$$\left.\begin{aligned} z(\psi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n z_n(\psi), \\ \bar{\omega} &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \omega_n, \end{aligned}\right\} \tag{6.33}$$

где $z_n(\psi)$ — периодические функции ψ с периодом 2π.

Подставляя значения $z(\psi)$ и $\bar{\omega}$ (6.33) в уравнение (6.32) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\omega_0^2 \frac{d^2 z_0}{d\psi^2} + \omega^2 z_0 = 0, \\ &\omega_0^2 \frac{d^2 z_1}{d\psi^2} + \omega^2 z_1 = f\left(z_0, \ \omega_0 \frac{dz_0}{d\psi}\right) - 2\omega_0\omega_1 \frac{d^2 z_0}{d\psi^2}, \\ &\omega_0^2 \frac{d^2 z_2}{d\psi^2} + \omega^2 z_2 = f'_z\left(z_0, \ \omega_0 \frac{dz_0}{d\psi}\right) z_1 + f'_{z'}\left(z_0, \ \omega_0 \frac{dz_0}{d\psi}\right)\omega_0 \frac{dz_1}{d\psi} + \\ &\quad + f'_{z'}\left(z_0, \ \omega_0 \frac{dz_0}{d\psi}\right)\omega_1 \frac{dz_0}{d\psi} - 2\omega_0\omega_2 \frac{d^2 z_0}{d\psi^2} - 2\omega_0\omega_1 \frac{d^2 z_1}{d\psi^2} - \omega_1^2 \frac{d^2 z_0}{d\psi^2}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{6.34}$$

Решаем первое из этих уравнений, полагая

$$z_0 = a \cos\psi, \quad \omega_0 = \omega, \tag{6.35}$$

где a — некоторая, пока не определенная постоянная.

Подставив значения $z_0(\psi)$ и ω_0 (6.35) в правую часть второго уравнения системы (6.34) и учитывая (1.16), имеем

$$\omega^2\left(\frac{d^2 z_1}{d\psi^2} + z_1\right) = \sum_{n=0}^{\infty} [g_n(a)\cos n\psi + h_n(a)\sin n\psi] + 2\omega\omega_1 a \cos\psi. \tag{6.36}$$

Чтобы это уравнение имело относительно $z_1(\psi)$ периодическое решение (т. е. чтобы в выражении для $z_1(\psi)$ не появилось секулярных членов), необходимо приравнять нулю коэффициенты при основной гармонике, входящей в правую часть (6.36).

Приравнивая, получаем уравнения

$$\left.\begin{aligned} h_n(a) &= A_1(a) = 0, \\ \omega_1 &= -\frac{g_1(a)}{2a\omega}, \end{aligned}\right\} \tag{6.37}$$

определяющие a и ω_1. После этого уравнение (6.36) примет вид

$$\omega^2\left(\frac{d^2 z_1}{d\psi^2} + z_1\right) = g_0(a) + \sum_{n=2}^{\infty} [g_n(a)\cos n\psi + h_n(a)\sin n\psi]. \tag{6.38}$$

Решая его, находим:

$$z_1(\psi) = a_1 \cos\psi + \frac{g_0(a)}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g_n(a)\cos n\psi + h_n(a)\sin n\psi}{1-n^2}, \tag{6.39}$$

где a_1 — произвольная постоянная, которая должна быть определена из условия периодичности $z_2(\psi)$.

Покажем, как определяется a_1. Для этого выражение для $z_1(\psi)$ представим в виде

$$z_1(\psi) = a_1 \cos\psi + u(a, \psi), \tag{6.40}$$

где

$$u(a, \psi) = \frac{g_0(a)}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g_n(a)\cos n\psi + h_n(a)\sin n\psi}{1-n^2}$$

является известной периодической функцией ψ.

Подставляя значение $z_1(\psi)$ (6.40) в третье уравнение системы (6.34), получим:

$$\begin{aligned}\omega^2\left(\frac{d^2 z_2}{d\psi^2} + z_2\right) = f'_z(a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi)\,a_1\cos\psi -\\ - f'_{z'}(a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi)\,a_1\omega\sin\psi + 2\omega\omega_1 a_1\cos\psi +\\ + 2\omega\omega_2 a\cos\psi + v(\psi),\end{aligned} \tag{6.41}$$

где

$$\begin{aligned}v(\psi) = f'_z(a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi)\,u + f'_{z'}(a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi)\,\omega\frac{du}{d\psi} +\\ + f'_{z'}(a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi)\,\omega_1 a\sin\psi + \omega_1^2 a\cos\psi.\end{aligned} \tag{6.42}$$

Напишем разложение для $v(\psi)$ в ряд Фурье:

$$v(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} [v_n(a)\cos n\psi + w_n(a)\sin n\psi]. \tag{6.43}$$

Кроме того, имеем:

$$\begin{aligned}f'_z(a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi)\cos\psi - f'_{z'}(a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi)\,\omega\sin\psi =\\ = \sum_{n=0}^{\infty} [g'_n(a)\cos n\psi + h'_n(a)\sin n\psi],\end{aligned} \tag{6.44}$$

и поэтому уравнение (6.41) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\omega^2\left(\frac{d^2 z_2}{d\psi^2} + z_2\right) = a_1 \sum_{n=0}^{\infty} [g'_n(a)\cos n\psi + h'_n(a)\sin n\psi] +\\ + 2\omega(\omega_1 a_1 + \omega_2 a)\cos\psi + \sum_{n=0}^{\infty} [v_n(a)\cos n\psi + w_n(a)\sin n\psi].\end{aligned} \tag{6.45}$$

Для того чтобы $z_2(\psi)$ являлось периодической функцией, необходимо в правой части уравнения (6.45) приравнять нулю коэффициенты при $\sin\psi$ и $\cos\psi$. Получаем:

$$\left.\begin{aligned} a_1 h'_n(a) &= -w_1(a),\\ a_1 g'_1(a) + 2\omega(\omega_1 a_1 + \omega_2 a) &= -v_1(a). \end{aligned}\right\} \tag{6.46}$$

Первое из этих уравнений определяет a_1:

$$a_1 = -\frac{w_1(a)}{h_1'(a)}, \tag{6.47}$$

причем $h_1'(a) = A_1'(a) \neq 0$, так как мы предположили, что функция $A_1(a)$ имеет только простые корни.

Из второго уравнения находим ω_2:

$$\omega_2 = -\frac{1}{a}\left[\frac{v_1(a) + a_1 g_1'(a)}{2\omega} + \omega_1 a_1\right]. \tag{6.48}$$

После этого уравнение (6.45) можем записать в виде

$$\omega^2\left(\frac{d^2 z_2}{d\psi^2} + z_2\right) = (v_0(a) + a_1 g_0'(a)) + \sum_{n=2}^{\infty}\{(v_n(a) + a_1 g_n'(a))\cos n\psi + (w_n(a) + a_1 h_n'(a))\sin n\psi\}. \tag{6.49}$$

Решением этого уравнения будет:

$$z_2(\psi) = a_2\cos\psi + \frac{1}{\omega^2}(v_0(a) + a_1 g_0'(a)) + \frac{1}{\omega^2}\sum_{n=2}^{\infty}\{(v_n(a) + a_1 g_n'(a))\cos n\psi + (w_n(a) + a_1 h_n'(a))\sin n\psi\}\frac{1}{1-n^2}, \tag{6.50}$$

где a_2 — неопределенная постоянная, которую определяем из условия периодичности функции $z_3(\psi)$ и т. д. Продолжая изложенный процесс, можем построить приближенные решения для стационарного режима с любой наперед заданной степенью точности. Например, во втором приближении согласно (6.31), (6.39) и (6.37) имеем:

$$x = (a + \varepsilon a_1)\cos(\bar{\omega} t + \varphi) + \frac{\varepsilon}{\omega^2} g_0(a) + \frac{\varepsilon}{\omega^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{g_n(a)\cos n(\bar{\omega} t + \varphi) + h_n(a)\sin n(\bar{\omega} t + \varphi)}{1-n^2}, \tag{6.51}$$

где

$$\bar{\omega} = \omega + \varepsilon\frac{g_1(a)}{2\omega a}, \tag{6.52}$$

а амплитуда должна быть определена из уравнения

$$h_n(a) = 0. \tag{6.53}$$

Сравнивая полученное выражение для x (6.51) с ранее найденным выражением для стационарного режима (6.29), замечаем, что единственное отличие этих двух решений состоит в том, что амплитуда первой гармоники в (6.29) равна a, где a — корень первого уравнения (6.30), а в формуле (6.51) амплитуда первой гармоники равна $a + \varepsilon a_1$. Однако такое расхождение полностью совпадает с нашим замечанием по этому поводу, приведенным в § 1.

§ 7. Эквивалентная линеаризация нелинейных колебательных систем

Как указывалось выше, уравнения первого приближения в большинстве случаев приводят к тем же качественным результатам, что и уравнения высших приближений.

Ввиду этого, а также ввиду сложности вычислений, с которыми, как правило, сопряжены операции с уравнениями высших приближений,