

Первое из этих уравнений определяет a_1 :

$$a_1 = -\frac{\omega_1(a)}{h_1'(a)}, \quad (6.47)$$

причем $h_1'(a) = A_1'(a) \neq 0$, так как мы предположили, что функция $A_1(a)$ имеет только простые корни.

Из второго уравнения находим ω_2 :

$$\omega_2 = -\frac{1}{a} \left[\frac{v_1(a) + a_1 g_1'(a)}{2\omega} + \omega_1 a_1 \right]. \quad (6.48)$$

После этого уравнение (6.45) можем записать в виде

$$\omega^2 \left(\frac{d^2 z_2}{d\psi^2} + z_2 \right) = (v_0(a) + a_1 g_0'(a)) + \sum_{n=2}^{\infty} \{ (v_n(a) + a_1 g_n'(a)) \cos n\psi + (w_n(a) + a_1 h_n'(a)) \sin n\psi \}. \quad (6.49)$$

Решением этого уравнения будет:

$$z_2(\psi) = a_2 \cos \psi + \frac{1}{\omega^2} (v_0(a) + a_1 g_0'(a)) + \frac{1}{\omega^2} \sum_{n=2}^{\infty} \{ (v_n(a) + a_1 g_n'(a)) \cos n\psi + (w_n(a) + a_1 h_n'(a)) \sin n\psi \} \frac{1}{1-n^2}, \quad (6.50)$$

где a_2 — неопределенная постоянная, которую определяем из условия периодичности функции $z_2(\psi)$ и т. д. Продолжая изложенный процесс, можем построить приближенные решения для стационарного режима с любой наперед заданной степенью точности. Например, во втором приближении согласно (6.31), (6.39) и (6.37) имеем:

$$x = (a + \varepsilon a_1) \cos(\bar{\omega}t + \varphi) + \frac{\varepsilon}{\omega^2} g_0(a) + \frac{\varepsilon}{\omega^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g_n(a) \cos n(\bar{\omega}t + \varphi) + h_n(a) \sin n(\bar{\omega}t + \varphi)}{1-n^2}, \quad (6.51)$$

где

$$\bar{\omega} = \omega + \varepsilon \frac{g_1(a)}{2\omega a}, \quad (6.52)$$

а амплитуда должна быть определена из уравнения

$$h_n(a) = 0. \quad (6.53)$$

Сравнивая полученное выражение для x (6.51) с ранее найденным выражением для стационарного режима (6.29), замечаем, что единственное отличие этих двух решений состоит в том, что амплитуда первой гармоники в (6.29) равна a , где a — корень первого уравнения (6.30), а в формуле (6.51) амплитуда первой гармоники равна $a + \varepsilon a_1$. Однако такое расхождение полностью совпадает с нашим замечанием по этому поводу, приведенным в § 1.

§ 7. Эквивалентная линеаризация нелинейных колебательных систем

Как указывалось выше, уравнения первого приближения в большинстве случаев приводят к тем же качественным результатам, что и уравнения высших приближений.

Ввиду этого, а также ввиду сложности вычислений, с которыми, как правило, сопряжены операции с уравнениями высших приближений,

обычно целесообразно ограничиваться рассмотрением лишь уравнений первого приближения.

Эти уравнения допускают весьма простую физическую интерпретацию и могут быть образованы даже без предварительного составления исходного точного дифференциального уравнения, например типа (1.1).

В настоящем параграфе мы займемся вопросом интерпретации уравнений первого приближения.

Для этого напомним основное дифференциальное уравнение колебательной системы в виде

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = \varepsilon f \left(x, \frac{dx}{dt} \right), \quad (7.1)$$

где m и k положительны.

Как было установлено, решение уравнения (7.1) в первом приближении может быть представлено в виде

$$x = a \cos \phi, \quad (7.2)$$

причем амплитуда a и полная фаза ϕ должны удовлетворять уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega m} \int_0^{2\pi} f(a \cos \phi, -a\omega \sin \phi) \sin \phi d\phi, \\ \frac{d\phi}{dt} &= \omega_e(a), \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

где

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{k}{m}, \\ \omega_e^2(a) &= \omega^2 - \frac{\varepsilon}{\pi m a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \phi, -a\omega \sin \phi) \cos \phi d\phi. \end{aligned}$$

Напомним, что первое приближение (7.2) является основной гармоникой приближенного решения (1.4), удовлетворяющего исходному уравнению (7.1) с точностью до величин порядка малости ε^m , а амплитуда a является согласно нашим допущениям полной амплитудой основной гармоники.

Заметив это, введем в рассмотрение функции амплитуды $k_e(a)$ и $\lambda_e(a)$, определяемые следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_e(a) &= \frac{\varepsilon}{\pi a \omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \phi, -a\omega \sin \phi) \sin \phi d\phi, \\ k_e(a) &= k - \frac{\varepsilon}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \phi, -a\omega \sin \phi) \cos \phi d\phi. \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

Тогда уравнения первого приближения (7.3) могут быть написаны в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\lambda_e(a)}{2m} a, \\ \frac{d\phi}{dt} &= \omega_e(a), \quad \omega_e^2(a) = \frac{k_e(a)}{m}. \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

Продифференцируем теперь выражение (7.2) для первого приближения. Приняв во внимание (7.5), имеем:

$$\frac{dx}{dt} = -a\omega_e(a) \sin \phi - \frac{\lambda_e(a)}{2m} a \cos \phi. \quad (7.6)$$

Дифференцируя (7.6) еще раз, убеждаемся, что

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -a\omega_e^2(a) \cos \phi + \frac{\lambda_e(a)}{m} a\omega_e(a) \sin \phi + \frac{\lambda_e^2(a)}{4m^2} a \cos \phi + \\ &+ \frac{\lambda_e(a)}{2m} a^2 \frac{d\omega_e(a)}{da} \sin \phi + \frac{d\lambda_e(a)}{da} \frac{a}{2m} \frac{\lambda_e(a)}{2m} a \cos \phi = \\ &= -\frac{k_e(a)}{m} x - \frac{\lambda_e(a)}{m} \frac{dx}{dt} - \frac{\lambda_e^2(a)}{4m^2} x + \\ &+ \frac{\lambda_e(a)}{2m} a^2 \frac{d\omega_e(a)}{da} \sin \phi + \frac{1}{2m} \frac{d\lambda_e(a)}{da} a \frac{\lambda_e(a)}{2m} x. \end{aligned} \quad (7.7)$$

После этого на основании (7.4) можем записать (7.7) в виде

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda_e(a) \frac{dx}{dt} + k_e(a) x = O(\varepsilon^2), \quad (7.8)$$

где $O(\varepsilon^2)$ — величина порядка малости ε^2 .

Таким образом, видим, что рассматриваемое первое приближение (7.2) с точностью до величин порядка малости ε^2 удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению вида

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda_e(a) \frac{dx}{dt} + k_e(a) x = 0. \quad (7.9)$$

Итак, в первом приближении колебания исследуемой нелинейной колебательной системы эквивалентны (с точностью до величин порядка малости ε^2 , т. е. с точностью до величин, отбрасываемых при самом составлении уравнений первого приближения (7.3)) колебаниям некоторой линейной колебательной системы, обладающей коэффициентом затухания $\lambda_e(a)$ и коэффициентом упругости $k_e(a)$.

Ввиду этого будем называть $\lambda_e(a)$ эквивалентным коэффициентом затухания, $k_e(a)$ — эквивалентным коэффициентом упругости, само же линейную колебательную систему, описываемую уравнением (7.9), назовем эквивалентной системой.

Сравнивая уравнение (7.9) с уравнением (7.1), видим, что уравнение (7.9) получается из (7.1) путем замены нелинейного члена

$$F = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \quad (7.10)$$

линейным

$$F_e = -\left[k_1(a)x + \lambda_e(a) \frac{dx}{dt}\right], \quad (7.11)$$

где $k_1(a) = k_e(a) - k$.

Заметим далее, что выражение

$$\delta_e(a) = \frac{\lambda_e(a)}{2m}$$

представляет собой декремент затухания эквивалентной линейной системы, а

$$\omega_e(a) = \sqrt{\frac{k_e(a)}{m}}$$

— собственную частоту колебаний этой системы.

Мы видим, следовательно, что уравнения первого приближения (7.5) могут быть формально образованы следующим образом.

Линеаризируем рассматриваемую колебательную систему, заменяя в основном уравнении (7.1) нелинейную силу (7.10) линейной (7.11), в которой

$$\left. \begin{aligned} \lambda_e(a) &= \frac{\varepsilon}{\pi a \omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi \, d\psi, \\ k_1(a) &= -\frac{\varepsilon}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi \, d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

Для полученной эквивалентной линейной системы с массой m , коэффициентом затухания $\lambda_e(a)$ и коэффициентом упругости $k_e(a) = k + k_1(a)$ обычным путем находим декремент затухания $\delta_e(a)$ и частоту собственных колебаний $\omega_e(a)$, отбрасывая при этом величины второго порядка малости.

Тогда получаем:

$$\delta_e(a) = \frac{\lambda_e(a)}{2m}, \quad \omega_e^2(a) = \frac{k_e(a)}{m}. \quad (7.13)$$

Образовав выражения для декремента затухания и частоты, применим общеизвестные для линейных колебательных систем формулы

$$\frac{da}{dt} = -\delta a, \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega, \quad (7.14)$$

выявляющие тот факт, что декремент затухания есть логарифмическая производная амплитуды, взятая с обратным знаком, и что частота ω есть угловая скорость вращения полной фазы колебания.

Если мы в уравнения (7.14) подставим значения δ и ω по формулам (7.13) и (7.4), то получим равенства, совпадающие с ранее выведенными нами уравнениями первого приближения (7.3).

Изложенный формальный метод образования уравнений первого приближения будем называть методом линеаризации.

При пользовании этим методом возникает вопрос, почему с физической точки зрения при линеаризации, точнее говоря, при замене нелинейной силы (7.10) эквивалентной линейной силой (7.11), коэффициенты $k_1(a)$ и $\lambda_e(a)$ должны принимать именно те значения, которые даются формулами (7.12), а не какие-либо иные. Ввиду этого необходимо решить вопрос о физической интерпретации для этих формул.

Покажем прежде всего, что соответствующие (7.12) значения эквивалентного коэффициента затухания получим, приняв, что средние (за период колебания) мощности, развиваемые реальной (7.10) и эквивалентной (7.11) силами, равны. При этом, приравнивая выражения для обеих мощностей, следует пренебречь величинами порядка малости ε^2 , так как уравнения первого приближения точны лишь до величин именно этого порядка малости.

Так как работа, совершаемая силой $k_e(a)x$, пропорциональной перемещению, за период колебания равна нулю, то, приравнивая друг другу мощности, развиваемые силами (7.10) и (7.11), получаем:

$$\varepsilon \int_0^T f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \frac{dx}{dt} dt = -\lambda_e(a) \int_0^T \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt, \quad (7.15)$$

где T — период колебания. Из (7.15) следует также, что $\lambda_e(a)$ должно быть величиной первого порядка малости.

Но с точностью до величин порядка малости ε мы можем положить в течение интервала времени порядка $\frac{2\pi}{\omega}$:

$$x = a \cos(\omega t + \vartheta), \quad \frac{dx}{dt} = -a\omega \sin(\omega t + \vartheta), \quad (7.16)$$

где a и ϑ постоянны в течение этого интервала. В таком же приближении ω будет частотой колебаний, а $T = \frac{2\pi}{\omega}$ — периодом.

Подставив в обе части формулы (7.15) выражения (7.16), а также $T = \frac{2\pi}{\omega}$, имеем с точностью до величин второго порядка малости (так как в обеих частях (7.15) есть множители, являющиеся величинами первого порядка, именно ε и $\lambda_e(a)$):

$$\begin{aligned} -\varepsilon\omega \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f[a \cos(\omega t + \vartheta), -a\omega \sin(\omega t + \vartheta)] a \sin(\omega t + \vartheta) dt = \\ = -\lambda_e(a) \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} a^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \vartheta) dt = -\lambda_e(a) a^2\pi\omega \end{aligned} \quad (7.17)$$

или

$$\lambda_e(a) \pi\omega a^2 = \varepsilon a \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi d\psi.$$

Имеем, следовательно, как раз то значение коэффициента $\lambda_e(a)$, которое определяется по формулам (7.12).

Чтобы получить аналогичную интерпретацию и для другого коэффициента, для $k_1(a)$, воспользуемся принятым в электротехнике понятием реактивной мощности.

Напомним, что называется реактивной мощностью.

Пусть по некоторому проводнику AB протекает переменный ток $i(t)$ и $E(t)$ есть разность напряжений между концами A и B этого проводника.

Тогда активной мощностью P_a , отдаваемой или поглощаемой (в зависимости от знака) в рассматриваемом проводнике, называют величину работы, совершенной за период колебания T , разделенную на величину T , т. е.

$$P_a = \frac{1}{T} \int_0^T E(t) i(t) dt. \quad (7.18)$$

Как видно, понятие активной мощности полностью соответствует обычному понятию средней механической мощности; будучи связано с понятием работы или энергии, оно имеет вполне реальное физическое значение.

В электротехнике, однако, общепринято вводить в рассмотрение, кроме имеющего непосредственное физическое значение понятия активной мощности, еще и несколько искусственное понятие реактивной мощности.

Реактивной мощностью называют величину

$$P_r = \frac{1}{T} \int_0^T E(t) i^*(t) dt, \quad (7.19)$$

где функция $i^*(t)$ представляет ток одинаковой формы с током $i(t)$, но отстающий по фазе относительно последнего на 90° , иначе говоря:

$$i^*(t) = i\left(t - \frac{T}{4}\right). \quad (7.20)$$

Ввиду очевидной и прямой аналогии между колебаниями механическими и электрическими представляется целесообразным использовать понятие реактивной мощности и для механических колебаний.

Допустим, например, что имеется некоторое тело, находящееся под воздействием какой-либо силы $F(t)$ и совершающее периодические колебания.

Пусть T будет периодом колебания, $x(t)$ — перемещением тела. Так как активной мощности в данном случае соответствует средняя механическая мощность

$$\frac{1}{T} \int_0^T F(t) x'(t) dt, \quad (7.21)$$

то, рассуждая по аналогии с предыдущим, естественно называть реактивной мощностью выражение вида

$$\frac{1}{T} \int_0^T F(t) x'\left(t - \frac{T}{4}\right) dt. \quad (7.22)$$

Приняв это определение и вернувшись к вопросу об интерпретации значения (7.12) для эквивалентного коэффициента $k_1(a)$, покажем, что именно это значение мы получим, если предварительно постулируем равенство реактивных мощностей (опять-таки с точностью до величин порядка малости ε^2), развиваемых реальной и эквивалентной силами. В самом деле, приравнявая друг другу выражения для обеих реактивных мощностей, имеем:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{1}{T} \int_0^T f[x(t), x'(t)] x'\left(t - \frac{T}{4}\right) dt = \\ = -\frac{1}{T} \int_0^T [k_1(a) x(t) + \lambda_\varepsilon(a) x'(t)] x'\left(t - \frac{T}{4}\right) dt. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Так как $\lambda_\varepsilon(a)$ есть величина первого порядка малости, то очевидно, что $k_1(a)$ будет того же порядка малости относительно ε .

Поэтому, подставляя в выражение для реактивных мощностей формулы:

$$x = a \cos(\omega t + \vartheta), \quad \frac{dx}{dt} = -a\omega \sin(\omega t + \vartheta), \quad T = \frac{2\pi}{\omega},$$

точные до величин первого порядка малости, имеем с требуемой точ-

НОСТЬЮ:

$$\varepsilon \frac{1}{T} \int_0^T f[x(t), x'(t)] x' \left(t - \frac{T}{4} \right) dt = \frac{a\omega\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \phi, -a\omega \sin \phi) \cos \phi d\phi,$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T [k_1(a)x(t) + \lambda_e(a)x'(t)] x' \left(t - \frac{T}{4} \right) dt = \frac{a^2\omega k_1(a)}{2},$$

откуда на основании (7.23) получим:

$$k_1(a) = -\frac{\varepsilon}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \phi, -a\omega \sin \phi) \cos \phi d\phi,$$

т. е. то же самое выражение, что и по формуле (7.12).

Итак, резюмируя вышесказанное, видим, что при применении метода линеаризации параметры (эквивалентные коэффициенты) [эквивалентной линейной силы

$$F_e = - \left[k_1(a)x + \lambda_e(a) \frac{dx}{dt} \right], \quad (7.24)$$

заменяющей нелинейную:

$$F = \varepsilon f \left(x, \frac{dx}{dt} \right), \quad (7.25)$$

могут быть определены приравниванием друг другу выражений активных и реактивных мощностей, развиваемых силами (7.24) и (7.25) при гармонических колебаниях:

$$x = a \cos(\omega t + \vartheta),$$

где ω — частота в «нулевом» приближении.

Этот способ определения эквивалентных коэффициентов назовем принципом мощности или принципом энергетического баланса.

Приведем еще один, более простой прием определения эквивалентных коэффициентов.

Для этого подставим значения x и $\frac{dx}{dt}$ согласно формулам (7.16) в выражения (7.24) и (7.25).

Для гармонического колебания (7.16) линейная эквивалентная сила F_e также будет гармонической функцией времени с частотой ω . Обозначая амплитуду и фазу F_e соответственно через J_e и φ_e , имеем:

$$F_e = J_e \cos(\omega t + \varphi_e). \quad (7.26)$$

Нелинейная сила будет, вообще говоря, периодической функцией времени, состоящей из различных гармоник с частотами вида $n\omega$, где $n = 1, 2, \dots$

Допустим, что

$$J \cos(\omega t + \varphi) \quad (7.27)$$

является ее основной гармоникой. Тогда, приравнивая амплитуды и фазы

$$J_e = J. \quad \varphi_e = \varphi$$

эквивалентной силы (7.26) и основной гармоники нелинейной силы (7.27), получаем два уравнения, которые дают для параметров $k_1(a)$ и $\lambda_e(a)$ как раз те значения, что и формулы (7.12).

В самом деле, в раскрытом виде при гармоническом колебании эквивалентная линейная сила будет:

$$-k_1(a) a \cos(\omega t + \vartheta) + \omega \lambda_e(a) a \sin(\omega t + \vartheta), \quad (7.28)$$

а основная гармоника нелинейной силы:

$$\left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi d\psi \right\} \cos(\omega t + \vartheta) + \\ + \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi d\psi \right\} \sin(\omega t + \vartheta), \quad (7.29)$$

Приравнивая друг другу обе гармоники (7.28) и (7.29), получим (практически проще приравнять не амплитуды и фазы, а соответственно коэффициенты при синусах и косинусах в выражениях первых гармоник):

$$\left. \begin{aligned} ak_1(a) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi d\psi, \\ \omega \lambda_e(a) a &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi d\psi, \end{aligned} \right\} \quad (7.30)$$

откуда для $k_1(a)$ и $\lambda_e(a)$ получаем те же самые значения, что и по формулам (7.12).

Этот последний прием будем называть принципом гармонического баланса.

Нетрудно установить, что принципы энергетического и гармонического баланса по существу вполне эквивалентны. Для этого необходимо заметить, что выражения мощностей

$$\frac{1}{T} \int_0^T F(t) x'(t) dt, \quad \frac{1}{T} \int_0^T F(t) x' \left(t - \frac{T}{4} \right) dt,$$

развиваемых некоторой периодической (с периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$) силой $F(t)$ при гармонических колебаниях

$$x = a \cos(\omega t + \vartheta),$$

зависят лишь от основной гармоники $F(t)$.

Таким образом, если основные гармоники (гармоники с частотой ω) данных сил равны, то мощности, развиваемые ими при гармонических колебаниях (частоты ω), также равны, и наоборот.

Этим обстоятельством и обусловлена существенная эквивалентность обоих вышеизложенных способов определения параметров эквивалентной линейной системы в методе линеаризации (принципа гармонического баланса и принципа энергетического баланса).

Заметим теперь, что нет никакой необходимости сначала составлять дифференциальное уравнение колебаний и лишь затем линеаризовать входящие в него нелинейные выражения.

Во многих случаях, особенно для более или менее сложных колебательных систем, может представиться, наоборот, более удобным до

составления дифференциального уравнения, исходя непосредственно из рассмотрения схемы колебательной системы, заменить в ней нелинейные элементы эквивалентными линейными (например, при помощи принципа гармонического баланса), а затем находить выражения для частоты $\omega_e(a)$ и декремента $\delta_e(a)$, исходя из общеизвестных классических формул теории линейных колебаний.

Основным условием допустимости такого рода метода эквивалентной линеаризации является, очевидно, приближенная гармоничность колебаний.

В качестве примера рассмотрим тело массы m , подвешенное на пружине и совершающее приближенно гармонические колебания (рис. 37). Пусть зависимость между упругой силой пружины F и растяжением ее x нелинейна и выражается следующим соотношением:

$$F = f(x). \quad (7.31)$$

Тогда для гармонических колебаний

$$x = a \cos(\omega t + \theta)$$

основная гармоника силы упругости будет:

$$\frac{\cos(\omega t + \theta)}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi.$$

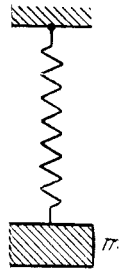


Рис. 37.

Пользуясь изложенным выше принципом гармонического баланса, можно заменить реальную нелинейную пружину эквивалентной линейной с коэффициентом упругости

$$k_e(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi, \quad (7.32)$$

после чего согласно известным формулам находим частоту линеаризованной системы

$$\omega_e(a) = \sqrt{\frac{k_e(a)}{m}}. \quad (7.33)$$

Если рассматриваемую колебательную систему, состоящую из тела массы m и нелинейной пружины, подвесить на линейной пружине с коэффициентом упругости c (рис. 38), то, предполагая, что колебания будут приближенно гармоническими (c достаточно велико), получим согласно принципу гармонического баланса для частоты колебаний следующую формулу:

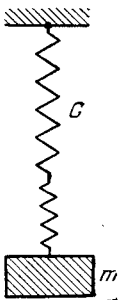


Рис. 38.

$$\omega_e(a) = \sqrt{\frac{c + k(a)}{m}}, \quad (7.34)$$

или с точностью до величин первого порядка малости

$$\omega_e(a) = \sqrt{\frac{c}{m}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{k(a)}{c} \right). \quad (7.35)$$

Предположим теперь, что наша колебательная система испытывает при своих колебаниях некоторое слабое амортизирующее воздействие нелинейного типа и зависящее только от скорости:

$$\Phi = \Phi \left(\frac{dx}{dt} \right). \quad (7.36)$$

Тогда, предполагая, что колебания по форме будут оставаться близкими к гармоническим, для основной гармоники амортизирующей силы получим выражение

$$\frac{\sin(\omega t + \theta)}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(-a\omega \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi.$$

На основании принципа гармонического баланса эту реальную силу можно заменить эквивалентной линейной амортизирующей силой

$$\Phi_e = \lambda_e(a) \frac{dx}{dt},$$

где коэффициент трения выражается следующей формулой:

$$\lambda_e(a) = -\frac{1}{a\omega\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(-a\omega \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi, \quad (7.37)$$

после чего согласно известным формулам находим выражение для декремента затухания

$$\delta_e(a) = \frac{\lambda_e(a)}{2m}. \quad (7.38)$$

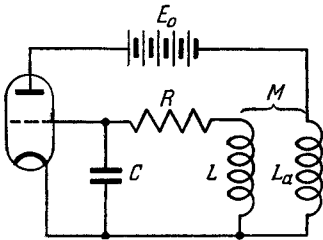


Рис. 39.

Заметим, что наличие трения при принятой нами степени точности не окажет влияния на частоту колебаний, так как $\left(\frac{\lambda_e(a)}{\sqrt{cm}}\right)^2$ является величиной второго порядка малости.

В качестве второго примера рассмотрим электронный генератор, составленный согласно схеме, приведенной на рис. 39. Пусть сопротивление R , включенное последовательно, достаточно мало и, следовательно, колебательный контур, помещенный в этой схеме в цепи сетки, является слабозатухающим.

Обозначая ток в колебательном контуре i , имеем:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = M \frac{di_a}{dt}, \quad (7.39)$$

где i_a — анодный ток, зависящий от управляющего напряжения E (при отсутствии сеточного тока):

$$i_a = f(E). \quad (7.40)$$

Управляющее напряжение в электронном генераторе складывается из постоянного напряжения E_0 и переменного управляющего напряжения e , индуцируемого колебательным контуром.

Таким образом, зависимость анодного тока от переменной слагающей управляющего напряжения будет:

$$i_a = f(E_0 + e). \quad (7.41)$$

Если e изменяется по закону

$$e = a \cos(\omega t + \theta),$$

то основная гармоника анодного тока будет:

$$\frac{\cos(\omega t + \theta)}{\pi} \int_0^{2\pi} f(E_0 + a \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi,$$

и поэтому на основании принципа гармонического баланса можем заметить нелинейную зависимость (7.41) эквивалентной линейной

$$i_a = S e, \quad (7.42)$$

где параметр S — «средняя крутизна характеристики лампы» — имеет вид

$$S(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(E_0 + a \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi. \quad (7.43)$$

После этого уравнения (7.39) можно представить в виде

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = MS \frac{de}{dt}. \quad (7.44)$$

С другой стороны, исходя из схемы рис. 39, можно написать:

$$e = \frac{1}{C} \int i dt + D \left(M \frac{di}{dt} - L_a \frac{di_a}{dt} \right).$$

В случае, если проницаемость лампы очень мала, т. е. D близко к нулю, можно принять:

$$e = \frac{1}{C} \int i dt. \quad (7.45)$$

Подставляя (7.45) в уравнение (7.44), получаем:

$$LC \frac{d^2 e}{dt^2} + (RC - MS) \frac{de}{dt} + e = 0,$$

откуда согласно обычным формулам находим выражения для собственной частоты и декремента затухания:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \frac{1}{\sqrt{LC}}, \\ \delta_e(a) &= \frac{RC - MS(a)}{2LC}. \end{aligned} \right\} \quad (7.46)$$

На этих простых примерах нами показан способ применения метода линеаризации непосредственно к самой схеме данной колебательной системы. При этом очевидно, что нелинейные элементы системы линеаризуются независимо от прочих параметров системы, роль которых при линеаризации сводится лишь к обеспечению приближенной гармоничности колебаний.

Подчеркнем еще раз тот факт, что эквивалентные линейные элементы существенно отличаются от истинных линейных тем, что их параметры — эквивалентные коэффициенты — являются не постоянными, а некоторыми определенными функциями амплитуды колебания.

Преимущество метода эквивалентной линеаризации при эффективном построении уравнений первого приближения особенно выясняется в случае сложных колебательных систем, для которых даже самое образование основных дифференциальных уравнений колебательного процесса, не говоря уже об операциях над ними, может представить затруднения.

В качестве применения метода эквивалентной линеаризации к системам со многими степенями свободы *) рассмотрим колебательный контур, который схематически изображен на рис. 40 и состоит из линейной части с комплексным сопротивлением $Z(i\omega)$ и нелинейного элемента с характеристикой напряжение — ток:

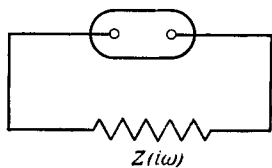


Рис. 40.

$$V = f(I).$$

Тогда соответствующее дифференциальное уравнение будет:

$$Z(p)I = f(I), \quad p = \frac{d}{dt}. \quad (7.47)$$

Предположим, что параметры системы таковы, что в ней возбуждаются периодические колебания, близкие к гармоническим:

$$I \approx a \cos(\omega t + \phi). \quad (7.48)$$

Тогда можем воспользоваться методом эквивалентной линеаризации и заменить в первом приближении нелинейный элемент линейным с характеристикой

$$V = SI,$$

где

$$S(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \phi) \cos \phi d\phi.$$

Для стационарных колебаний найдем тогда уравнение вида

$$Z(i\omega) = S(a),$$

откуда, разделяя вещественную и мнимую части комплексного сопротивления

$$Z(i\omega) = X(\omega) + iY(\omega),$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} X(\omega) &= S(a), \\ Y(\omega) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.49)$$

Одно из полученных уравнений служит для определения частоты, другое — для определения амплитуды колебания.

Метод эквивалентной линеаризации можно уточнить таким образом, чтобы получить не только уравнения первого, но и высших приближений.

Построим уравнения второго приближения. Для этого уточним формулу (7.48), включив в нее высшие гармоники и постоянный член.

В первом приближении напряжение на нелинейном элементе будет:

$$V = f(a \cos \vartheta), \quad \vartheta = \omega t + \phi. \quad (7.50)$$

Разложив это выражение в ряд Фурье, получим:

$$V = \sum_{(n \geq 0)} f_n(a) \cos n\vartheta,$$

*) Подобные методы могут быть применены для исследования систем более общего типа; см., например, Е. П. Попов, О малом параметре в методе гармонической линеаризации, Известия АН СССР, Отд. техн. наук, № 1 (1955).

где, как и обычно:

$$f_0(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \vartheta) d\vartheta,$$

$$f_n(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \vartheta) \cos n\vartheta d\vartheta.$$

Заметим теперь, что гармоническая слагающая напряжения

$$f_n(a) \cos(n\omega t + n\phi) \quad (n=0, 2, 3, \dots)$$

вызывает в линейном элементе ток

$$Z^{-1}(p) f_n(a) \cos(n\omega t + n\phi).$$

Введем абсолютное значение и фазу комплексного сопротивления

$$Z(i\Omega) = R(\Omega) e^{i\varphi(\Omega)}.$$

Тогда

$$Z^{-1}(p) f_n(a) \cos(n\omega t + n\phi) = \frac{f_n(a)}{R(n\omega)} \cos(n\omega t + n\phi - \varphi(n\omega)).$$

Таким образом, уточненный вариант формулы (7.48) будет:

$$I \approx a \cos \vartheta + \sum_{(n=0, 2, 3, \dots)} \frac{f_n(a)}{R(n\omega)} \cos(n\vartheta - \varphi(n\omega)). \quad (7.51)$$

Отсюда, между прочим, сразу вытекает критерий применимости излагаемого метода. Нам необходимо, чтобы член $a \cos \vartheta$ был основным, а остальные лишь поправочными. Поэтому для применимости метода требуется, чтобы

$$\left| \frac{f_n(a)}{R(n\omega)} \right| \ll a \quad (n=0, 2, 3, \dots).$$

Воспользуемся выражением (7.51) для уточнения формулы (7.50).

Имеем:

$$V = f(a \cos \vartheta + \xi),$$

где

$$\xi = \sum_{(n=0, 2, 3, \dots)} \frac{f_n(a)}{R(n\omega)} \cos(n\vartheta - \varphi(n\omega)),$$

но так как ξ должно быть мало по сравнению с первым членом, то напряжение V будет:

$$V = f(a \cos \vartheta) + \xi f'(a \cos \vartheta).$$

Разложив теперь полученное выражение в ряд Фурье, находим:

$$V = \sum_{(n \geq 0)} f_n(a) \cos n\vartheta + \left\{ \sum_{(n \geq 1)} [\Phi_n(a) \cos n\vartheta + G_n(a) \sin n\vartheta] + \Phi_0(a) \right\}, \quad (7.52)$$

где сумма в фигурных скобках дает разложение в ряд Фурье функции

$$\xi f'(a \cos \vartheta).$$

Нас особо будут интересовать значения $\Phi_1(a)$ и $G_1(a)$. Приведем поэтому соответствующие формулы:

$$\Phi_1(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \xi f'(a \cos \vartheta) \cos \vartheta d\vartheta,$$

$$G_1(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \xi f'(a \cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta.$$

Рассматривая опять стационарные колебания, приравняем первую гармонику напряжения из разложения (7.52) первой гармонике напряжения на линейном элементе:

$$Z(i\omega) a \cos(\omega t + \psi) = R(\omega) a \cos(\omega t + \psi + \varphi(\omega)),$$

после чего находим:

$$f_1(a) \cos(\omega t + \psi) + \Phi_1(a) \cos(\omega t + \psi) + G_1(a) \sin(\omega t + \psi) = \\ = R(\omega) a \cos(\omega t + \psi + \varphi(\omega)),$$

откуда получаем уточненные уравнения гармонического баланса:

$$R(\omega) a \cos \varphi(\omega) = f_1(a) + \Phi_1(a), \\ R(\omega) a \sin \varphi(\omega) = -G_1(a),$$

или

$$\left. \begin{aligned} X(\omega) &= \frac{f_1(a) + \Phi_1(a)}{a}, \\ Y(\omega) &= -\frac{G_1(a)}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (7.53)$$

Упростим теперь выражения для $\Phi_1(a)$ и $G_1(a)$. Имеем:

$$\Phi_1(a) = \sum_{(n \neq 1)} \frac{f_n(a)}{R(n\omega)} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(a \cos \vartheta) \cos \vartheta \cos(n\vartheta - \varphi(n\omega)) d\vartheta = \\ = \frac{1}{2} \sum_{(n \neq 1)} \frac{df_n^2(a)}{da} \frac{1}{R(n\omega)} \cos \varphi(n\omega),$$

$$G_1(a) = \sum_{(n \neq 1)} \frac{f_n(a)}{R(n\omega)} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(a \cos \vartheta) \sin \vartheta \sin(n\vartheta - \varphi(n\omega)) d\vartheta = \\ = \sum_{n \neq 1} \frac{f_n(a)}{R(n\omega)} \cos \varphi(n\omega) \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(a \cos \vartheta) \sin \vartheta \sin n\vartheta d\vartheta.$$

Но

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(a \cos \vartheta) \sin \vartheta \sin n\vartheta d\vartheta = -\frac{1}{a\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial f(a \cos \vartheta)}{\partial \vartheta} \sin n\vartheta d\vartheta = \\ = \frac{n}{a\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \vartheta) \cos n\vartheta d\vartheta = \frac{nf_n(a)}{a},$$

т. е.

$$G_1(a) = \sum_{(n \geq 2)} \frac{nf_n^2(a)}{aR(n\omega)} \cos \varphi(n\omega).$$

Таким образом, уточненные уравнения гармонического баланса для стационарных колебаний будут:

$$\left. \begin{aligned} X(\omega) &= \frac{f_1(a)}{a} + \frac{1}{2} \sum_{(n=0, 2, 3, \dots)} \frac{\frac{df_n^2(a)}{da}}{aR(n\omega)} \cos \varphi(n\omega), \\ Y(\omega) &= - \sum_{(n > 2)} \frac{nf_n^2(a)}{a^2R(n\omega)} \cos \varphi(n\omega). \end{aligned} \right\} \quad (7.54)$$

Сравнивая их с уравнениями первого приближения (7.49), видим, что здесь уже отражено влияние обертонов колебаний. Полученными формулами (7.54) можно также воспользоваться для более детального выяснения пределов применимости уравнений первого приближения.

Отметим еще, что приведенные результаты можно было бы получить и методом асимптотических разложений. Для этого целесообразно представить основное уравнение колебательного процесса (7.47), например, в форме

$$\{(p^2 + \omega_0^2)Q(p) + \varepsilon S(p)\} I = \varepsilon f(I). \quad (7.55)$$

§ 8. Нелинейные колебательные системы с медленно меняющимися параметрами

Рассмотрим теперь нелинейную колебательную систему, у которой некоторые параметры, например масса системы, жесткость, коэффициент трения и др., медленно изменяются со временем («медленно» по отношению к естественной единице времени — периоду собственных колебаний). В этом случае мы приходим к рассмотрению следующего нелинейного дифференциального уравнения с медленно меняющимися коэффициентами:

$$\frac{d}{dt} \left[m(\tau) \frac{dx}{dt} \right] + k(\tau) x = \varepsilon f \left(\tau, x, \frac{dx}{dt} \right), \quad (8.1)$$

в котором, как и ранее, ε — малый положительный параметр, $\tau = \varepsilon t$ — «медленное» время.

Построение приближенных решений уравнения (8.1) не вызывает дополнительных принципиальных затруднений и может быть осуществлено с помощью изложенного нами выше асимптотического метода. Отметим, что для построения асимптотических рядов необходимо, чтобы

коэффициенты уравнения (8.1) $m(\tau)$, $k(\tau)$, а также $f\left(\tau, x, \frac{dx}{dt}\right)$ имели

достаточное число производных по τ для всех конечных значений τ , кроме того, для любых τ на интервале $0 \leq \tau \leq L$ (только на этом интервале времени $\left(0, \frac{L}{\varepsilon}\right)$ мы будем рассматривать колебательный процесс, описываемый дифференциальным уравнением (8.1)) $k(\tau) \neq 0$, $m(\tau) \neq 0$ и положительны.

Совершенно очевидно, что если в коэффициентах уравнения (8.1) считать τ некоторым постоянным параметром, то мы получаем уравнение,