т. е.

$$G_1(a) = \sum_{(n\geqslant 2)} \frac{nf_n^2(a)}{aR(n\omega)} \cos\varphi(n\omega).$$

Таким образом, уточненные уравнения гармонического баланса для стационарных колебаний будут:

$$\left.\begin{aligned} X(\omega) &= \frac{f_1(a)}{a} + \frac{1}{2} \sum_{(n=0,\,2,\,3,\,\dots)} \frac{\frac{df_n^2(a)}{da}}{aR(n\omega)} \cos\varphi(n\omega), \\ Y(\omega) &= -\sum_{(n>2)} \frac{nf_n^2(a)}{a^2R(n\omega)} \cos\varphi(n\omega). \end{aligned}\right\} \tag{7.54}$$

Сравнивая их с уравнениями первого приближения (7.49), видим, что здесь уже отражено влияние обертонов колебаний. Полученными формулами (7.54) можно также воспользоваться для более детального выяснения пределов применимости уравнений первого приближения.

Отметим еще, что приведенные результаты можно было бы получить и методом асимптотических разложений. Для этого целесообразно представить основное уравнение колебательного процесса (7.47), например, в форме

$$\{(p^2+\omega_0^2)\,Q(p)+\varepsilon S(p)\}\,I=\varepsilon f(I). \tag{7.55}$$

§ 8. Нелинейные колебательные системы с медленно меняющимися параметрами

Рассмотрим теперь нелинейную колебательную систему, у которой некоторые параметры, например масса системы, жесткость, коэффициент трения и др., медленно изменяются со временем («медленно» по отношению к естественной единице времени — периоду собственных колебаний). В этом случае мы приходим к рассмотрению следующего нелинейного дифференциального уравнения с медленно меняющимися коэффициентами:

$$\frac{d}{dt}\left[m(\tau)\frac{dx}{dt}\right]+k(\tau)\,x=\varepsilon f\left(\tau,\,x,\,\frac{dx}{dt}\right), \tag{8.1}$$

в котором, как и ранее, ε — малый положительный параметр, $\tau=\varepsilon t$ — «медленное» время.

Построение приближенных решений уравнения (8.1) не вызывает дополнительных принципиальных затруднений и может быть осуществлено с помощью изложенного нами выше асимптотического метода. Отметим, что для построения асимптотических рядов необходимо, чтобы коэффициенты уравнения (8.1) $m(\tau)$, $k(\tau)$, а также $f\left(\tau,\,x,\,\frac{dx}{dt}\right)$ имели достаточное число производных по τ для всех конечных значений τ, кроме того, для любых τ на интервале $0\leqslant\tau\leqslant L$ (только на этом интервале времени $\left(0,\,\frac{L}{\varepsilon}\right)$ мы будем рассматривать колебательный процесс, описываемый дифференциальным уравнением (8.1)) $k(\tau)\neq 0$, $m(\tau)\neq 0$ и положительны.

Совершенно очевидно, что если в коэффициентах уравнения (8.1) считать τ некоторым постоянным параметром, то мы получаем уравнение, рассмотренное нами в § 1, для которого построены асимптотические формулы, учитывающие все те дополнительные явления, которые возникают в колебательной системе из-за нелинейного возмущения. При $\tau = \varepsilon t$, т. е. если в исследуемой нелинейной колебательной системе некоторые параметры будут изменяться со временем, хотя и медленно, естественно ожидать еще некоторых дополнительных изменений в решении, не наблюдаемых в колебательных системах с постоянной массой, жесткостью и т. д. Такими дополнительными явлениями будут, например, зависимость «собственной» частоты от «медленного» времени и др.

Учитывая все это, естественно искать общее решение уравнения 8.1) в виде разложения:

$$x = a\cos\psi + \varepsilon u_1(\tau, a, \psi) + \varepsilon^2 u_2(\tau, a, \psi) + \ldots, \tag{8.2}$$

в котором $u_1(\tau, a, \psi)$, $u_2(\tau, a, \psi), \ldots$ являются периодическими функциями угла ψ с периодом 2π, а величины a и ψ как функции времени определяются уже следующими дифференциальными уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(\tau, a) + \varepsilon^2 A_2(\tau, a) + \ldots, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a) + \varepsilon^2 B_2(\tau, a) + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{8.3}$$

где $\omega(\tau) = \sqrt{\frac{k(\tau)}{m(\tau)}}$ — «собственная» частота рассматриваемой колебательной системы. Таким образом, как и в § 1, задача построения асимптотических приближенных решений уравнения (8.1) сводится к определению выражений для функций

$$u_1(\tau, a, \psi),\ u_2(\tau, a, \psi),\ \ldots,\ A_1(\tau, a),\ A_2(\tau, a), \ldots,\ B_1(\tau, a),\ B_2(\tau, a), \ldots \tag{8.4}$$

и последующему интегрированию системы уравнений (8.3), определяющей амплитуду и полную фазу колебания.

Как и в § 1, для однозначного определения функций, стоящих в правых частях уравнений (8.3), необходимо наложить дополнительные условия на функции $u_1(\tau, a, \psi)$, $u_2(\tau, a, \psi), \ldots$ В качестве таких условий принимаем опять-таки условия (1.8), которые должны в данном случае выполняться для любых τ на интервале $0 \leqslant \tau \leqslant L$. После сделанных предварительных замечаний приступим к определению функций (8.4). Для этого дифференцируем правую часть выражения (8.2) с учетом уравнений (8.3) и подставляем в уравнение (8.1), правую часть которого раскладываем в ряд Тейлора. Приравнивая после этого коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем следующие уравнения:

$$m(\tau)\left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2} + \omega^2(\tau)u_1\right] = f_0(\tau, a, \psi) + 2m(\tau)\omega(\tau)A_1\sin\psi + \\ + 2m(\tau)\omega(\tau)B_1\cos\psi + \frac{d(m(\tau)\omega(\tau))}{d\tau}a\sin\psi, \tag{8.5}$$

$$m(\tau)\left[\frac{\partial^2 u_2}{\partial\psi^2} + \omega^2(\tau)u_2\right] = \\ = f_1(\tau, a, \psi) + m(\tau)\left[2\omega(\tau)aB_2 - \frac{\partial A_1}{\partial a}A_1 + aB_1^2 - \frac{\partial A_1}{\partial\tau} - \frac{dm(\tau)}{d\tau}\frac{A_1}{m(\tau)}\right]\cos\psi + \\ + m(\tau)\left[2\omega(\tau)A_2 + 2A_1B_1 + a\frac{\partial B_1}{\partial a}A_1 + a\frac{\partial B_1}{\partial\tau} + \frac{dm(\tau)}{d\tau}\frac{aB_1}{m(\tau)}\right]\sin\psi, \tag{8.6}$$

. . . .

где введены обозначения:

$$f_0(\tau, a, \psi) = f(\tau, a\cos\psi, -a\omega\sin\psi), \tag{8.7}$$

$$\begin{aligned} f_1(\tau, a, \psi) = f'_x(\tau, a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\,u_1 + \\ + f'_{x'}(\tau, a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\left[A_1\cos\psi - aB_1\sin\psi + \frac{\partial u_1}{\partial\psi}\omega(\tau)\right] - \\ - m(\tau)\left[2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau\,\partial\psi}\omega(\tau) + 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial a\,\partial\psi}A_1\omega(\tau) + 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2}\omega(\tau)B_1 + \right. \\ \left. + \frac{\partial u_1}{\partial\psi}\frac{d\omega(\tau)}{d\tau} + \frac{\partial u_1}{\partial\psi}\frac{\omega(\tau)}{m(\tau)}\frac{dm(\tau)}{d\tau}\right]. \end{aligned} \tag{8.8}$$

Далее, из уравнения (8.5), учитывая условия отсутствия первой гармоники в функции $u_1(\tau, a, \psi)$, находим:

$$u_1(\tau, a, \psi) = \frac{1}{2\pi k(\tau)}\sum_{n\neq\pm 1}\frac{e^{in\psi}}{1-n^2}\int_0^{2\pi} f_0(\tau, a, \psi)\,e^{-in\psi}\,d\psi. \tag{8.9}$$

Но условие отсутствия первой гармоники в (8.9) даст нам следующие выражения для $A_1(\tau, a)$ и $B_1(\tau, a)$:

$$\left.\begin{aligned} A_1(\tau, a) = -\frac{a}{2m(\tau)\,\omega(\tau)}\frac{d\,[m(\tau)\,\omega(\tau)]}{d\tau} - \\ - \frac{1}{2\pi m(\tau)\,\omega(\tau)}\int_0^{2\pi} f_0(\tau, a, \psi)\sin\psi\,d\psi, \\ B_1(\tau, a) = -\frac{1}{2\pi m(\tau)\,\omega(\tau)\,a}\int_0^{2\pi} f_0(\tau, a, \psi)\cos\psi\,d\psi. \end{aligned}\right\} \tag{8.10}$$

Таким образом, в первом приближении асимптотическое решение уравнения (8.1) следует искать в форме

$$x = a\cos\psi, \tag{8.11}$$

где a и ψ должны быть определены из уравнений первого приближения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon a}{2m(\tau)\,\omega(\tau)}\frac{d\,[m(\tau)\,\omega(\tau)]}{d\tau} - \\ - \frac{\varepsilon}{2\pi m(\tau)\,\omega(\tau)}\int_0^{2\pi} f_0(\tau, a, \psi)\sin\psi\,d\psi, \\ \frac{d\psi}{dt} = \omega(\tau) - \frac{\varepsilon}{2\pi m(\tau)\,\omega(\tau)\,a}\int_0^{2\pi} f_0(\tau, a, \psi)\cos\psi\,d\psi. \end{aligned}\right\} \tag{8.12}$$

Заметим, что по аналогии с § 7 уравнения первого приближения (8.12) можно записать в виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon a}{2m(\tau)\,\omega(\tau)}\frac{d\,[m(\tau)\,\omega(\tau)]}{d\tau} - \delta_e(\tau, a)\,a, \\ \frac{d\psi}{dt} = \omega_e(\tau, a), \end{aligned}\right\} \tag{8.13}$$

где $\delta_e(\tau, a)$ и $\omega_e(\tau, a)$ являются соответственно эквивалентным декрементом затухания и эквивалентной частотой, причем они отличаются от приведенных в § 7 аналогичных выражений только наличием «медленного» времени и определяются выражениями:

$$\left.\begin{aligned} \delta_e(\tau, a) &= \frac{\varepsilon}{2\pi m(\tau)\,\omega(\tau)\,a}\int_0^{2\pi} f_0(\tau, a, \psi)\sin\psi\,d\psi, \\ \omega_e^2(\tau, a) &= \omega^2(\tau) - \frac{\varepsilon}{\pi m(\tau)\,a}\int_0^{2\pi} f_0(\tau, a, \psi)\cos\psi\,d\psi. \end{aligned}\right\} \quad (8.14)$$

Для построения второго приближения необходимо найти из условия отсутствия первой гармоники в функции $u_2(\tau, a, \psi)$ выражения для $A_2(\tau, a)$ и $B_2(\tau, a)$.

Исходя из уравнения (8.6), имеем:

$$\left.\begin{aligned} A_2(\tau, a) &= -\frac{1}{2\omega(\tau)}\left[a\frac{\partial B_1}{\partial a}A_1 + a\frac{\partial B_1}{\partial \tau} + 2A_1B_1 + \frac{a}{m(\tau)}\frac{dm(\tau)}{d\tau}B_1\right] - \\ &\qquad - \frac{1}{2\pi m(\tau)\,\omega(\tau)}\int_0^{2\pi} f_1(\tau, a, \psi)\sin\psi\,d\psi, \\ B_2(\tau, a) &= \frac{1}{2\omega(\tau)\,a}\left[\frac{\partial A_1}{\partial a}A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \tau} - aB_1^2 + \frac{1}{m(\tau)}\frac{dm(\tau)}{d\tau}A_1\right] - \\ &\qquad - \frac{1}{2\pi m(\tau)\,\omega(\tau)\,a}\int_0^{2\pi} f_1(\tau, a, \psi)\cos\psi\,d\psi, \end{aligned}\right\} \quad (8.15)$$

и следовательно, асимптотическое решение уравнения (8.1) во втором приближении будет:

$$x = a\cos\psi + \varepsilon u_1(\tau, a, \psi), \quad (8.16)$$

где a и ψ должны быть определены из уравнений второго приближения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(\tau, a) + \varepsilon^2 A_2(\tau, a), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a) + \varepsilon^2 B_2(\tau, a). \end{aligned}\right\} \quad (8.17)$$

Здесь $A_1(\tau, a)$ и $B_1(\tau, a)$ определяются выражениями (8.10), $A_2(\tau, a)$ и $B_2(\tau, a)$ — выражениями (8.15), а $u_1(\tau, a, \psi)$ — согласно формуле (8.9). Заметим, что во всех полученных формулах при интегрировании по ψ считаем a и τ постоянными параметрами.

Сопоставляя полученные выражения для первого и второго приближения с результатами § 1, убеждаемся, что общая схема построения решений для случая колебательной системы, описываемой уравнением (8.1), будет такая же, как и в случае системы, рассматривавшейся в § 1. Полученные нами уравнения первого приближения отличаются от уравнений (1.24) наличием «медленного» времени и дополнительного слагаемого

$$-\frac{\varepsilon a}{2m(\tau)\,\omega(\tau)}\,\frac{d[m(\tau)\,\omega(\tau)]}{d\tau}.$$

Таким образом, в первом приближении медленная изменяемость массы и коэффициента упругости, кроме нарушения гармоничности колебаний, вводит дополнительные «силы трения», знак которых будет зависеть от того, каким образом изменяются параметры исследуемой колебательной системы.

Остановимся еще на следующем обстоятельстве. При построении асимптотических приближенных решений мы сводим интегрирование одного уравнения второго порядка (8.1) к интегрированию двух уравнений первого порядка (8.12) или (8.17), которые во многих случаях не могут быть проинтегрированы в элементарных функциях, и поэтому их решения приходится искать при помощи численных методов.

Используя численные методы, можно было бы проинтегрировать непосредственно уравнение (8.1), однако это сложная задача, требующая чрезвычайно много времени и в большинстве случаев трудно выполнимая в связи с возможностью накопления большой систематической ошибки. Численное же интегрирование уравнений первого (или второго) приближения не представляет затруднений ввиду того, что в этих уравнениях переменными являются амплитуда и фаза, а не сама осциллирующая функция x. Для получения полной картины процесса здесь достаточно вычислить небольшое количество точек, расположенных на сравнительно «гладкой» кривой, что существенно упрощает численное интегрирование, в то время как при интегрировании непосредственно уравнения (8.1) нам пришлось бы находить не огибающую, а непосредственно синусоиду.

Заметим, что для составления как уравнений первого приближения (8.12), так и второго приближения (8.17) нет необходимости пользоваться формулами (8.10) или (8.15). Мы можем для составления этих уравнений, так же как и в случае уравнения (1.1), воспользоваться непосредственно уравнениями гармонического баланса, которые в нашем случае имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\left\{\frac{d}{dt}\left[m(\tau)\frac{dx}{dt}\right]+k(\tau)x-\right.\\
&\qquad\left.-\varepsilon f\left(\tau, x; \frac{dx}{dt}\right)\right\}_{x=a\cos\psi+\ldots}\cos\psi\,d\psi=0,\\
&\int_0^{2\pi}\left\{\frac{d}{dt}\left[m(\tau)\frac{dx}{dt}\right]+k(\tau)x-\right.\\
&\qquad\left.-\varepsilon f\left(\tau, x, \frac{dx}{dt}\right)\right\}_{x=a\cos\psi+\ldots}\sin\psi\,d\psi=0.
\end{aligned}\right\}\tag{8.18}$$

Подставляя в подынтегральные выражения значения x, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, найденные из (8.2) с точностью до величин первого порядка малости, с учетом, разумеется, того, что a и ψ являются функциями времени, удовлетворяющими уравнениям (8.3), и производя интегрирование, получим для $A_1(\tau, a)$ и $B_1(\tau, a)$ выражения (8.10). Учитывая при подстановке x, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$ также величины, пропорциональные ε^2, получим для $A_2(\tau, a)$ и $B_2(\tau, a)$ выражения (8.15).

Заметим, что при вычислении интегралов (8.18) τ, как и a, считаем некоторым постоянным параметром и интегрирование ведем только по ψ.

Рассмотрим еще некоторые частные случаи уравнения (8.1), для которых уравнения первого приближения (8.12) принимают совсем простую форму.

Допустим, что в исследуемой колебательной системе отсутствует трение, и уравнение, описывающее движение, имеет следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\left[m(\tau)\frac{dx}{dt}\right]+c(\tau)x=\varepsilon f(\tau, x). \tag{8.19}$$

В этом случае уравнениями первого приближения будут:

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon a}{2m(\tau)\,\omega(\tau)}\,\frac{d[m(\tau)\,\omega(\tau)]}{d\tau},\\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega(\tau)-\frac{\varepsilon}{2\pi m(\tau)\,\omega(\tau)\,a}\int_0^{2\pi} f_0(\tau, a, \psi)\cos\psi\,d\psi. \end{aligned}\right\} \tag{8.20}$$

Система уравнений (8.20) может быть проинтегрирована до конца. Действительно, из первого уравнения находим:

$$a=\frac{a_0}{[m(\tau)\,\omega(\tau)]^{1/2}}, \tag{8.21}$$

где a_0 — начальное значение амплитуды при $t=0$. Подставляя найденное значение амплитуды во второе уравнение системы (8.20), получим:

$$\psi=\int_0^t \omega_e(\tau)\,dt, \tag{8.22}$$

где

$$\omega_e(\tau)=\omega(\tau)-\frac{\varepsilon}{2\pi[m(\tau)\,\omega(\tau)]^{1/2}a_0}\int_0^{2\pi} f_0\left(\tau, \frac{a_0}{[m(\tau)\,\omega(\tau)]^{1/2}}, \psi\right)\cos\psi\,d\psi. \tag{8.23}$$

Таким образом, в первом приближении колебания, описываемые уравнением (8.19), будут «синусоидальными» с амплитудой, обратно пропорциональной $\sqrt{m(\tau)\,\omega(\tau)}$, и фазой, изменяющейся согласно формуле (8.22).

В качестве второго частного случая рассмотрим систему с медленно меняющейся массой $m(\tau)$, находящуюся под воздействием линейной упругой силы $k(\tau)x$ с медленно меняющимся коэффициентом упругости и нелинейного трения, зависящего от скорости и «медленного» времени. Колебания этой системы описываются уравнением

$$\frac{d}{dt}\left[m(\tau)\frac{dx}{dt}\right]+k(\tau)x=\varepsilon f\left(\tau, \frac{dx}{dt}\right). \tag{8.24}$$

В этом случае уравнения первого приближения принимают следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon a}{2m(\tau)\,\omega(\tau)}\,\frac{d[m(\tau)\,\omega(\tau)]}{d\tau}-\frac{\varepsilon}{2\pi m(\tau)\,\omega(\tau)}\int_0^{2\pi} f_0(\tau, a, \psi)\sin\psi\,d\psi,\\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega(\tau). \end{aligned}\right\} \tag{8.25}$$

Из второго уравнения сразу находим закон изменения полной фазы колебания

$$\psi=\int_0^t \omega(\tau)\,dt, \tag{8.26}$$

Из системы (8.25) следует, что частота колебания, описываемого уравнением (8.24), в первом приближении не зависит от амплитуды, а зависит только от характера медленного изменения коэффициентов $m(\tau)$ и $k(\tau)$.

В качестве примера рассмотрим колебания математического маятника постоянной массы (в случае переменной массы дополнительных затруднений не возникает) при наличии малого затухания, пропорционального первой степени скорости, и медленного изменения длины. К подобной схеме приводятся многочисленные задачи практики. Обозначая θ угол отклонения маятника от вертикального положения, g — ускорение силы тяжести, m массу маятника, $l=l(\tau)$ — медленно изменяющуюся длину, $2n$ — коэффициент трения, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt}\left[ml^2(\tau)\frac{d\theta}{dt}\right]+2n\frac{d}{dt}[l(\tau)\,\theta]+mgl(\tau)\sin\theta=0. \tag{8.27}$$

Для небольших отклонений мы можем $\sin\theta$ заменить первыми двумя членами разложения в степенной ряд, после чего уравнение (8.27) можно записать следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\left[ml^2(\tau)\frac{d\theta}{dt}\right]+mgl(\tau)\,\theta=\varepsilon f\left(\tau,\theta,\frac{d\theta}{dt}\right), \tag{8.28}$$

в котором

$$\varepsilon f\left(\tau,\theta,\frac{d\theta}{dt}\right)=\frac{mgl(\tau)}{6}\theta^3-2nl(\tau)\frac{d\theta}{dt}-2\varepsilon n\frac{dl(\tau)}{d\tau}\theta. \tag{8.29}$$

В первом приближении согласно (8.11) и (8.12) имеем:

$$\theta=a\cos\psi, \tag{8.30}$$

где a и ψ должны быть определены из системы уравнений первого приближения:

$$\left.\begin{aligned}\frac{da}{dt}&=-\frac{na}{ml(\tau)}-\frac{3\varepsilon l'(\tau)}{4l(\tau)}a,\\ \frac{d\psi}{dt}&=\omega(\tau)-\frac{\omega(\tau)a^2}{16},\end{aligned}\right\} \tag{8.31}$$

где $\omega(\tau)=\sqrt{\dfrac{g}{l(\tau)}}$.

Интегрируя первое уравнение системы (8.31) при начальных значениях $t=0$, $a=a_0$, получаем выражение для a:

$$a=a_0e^{-\frac{n}{m}\int\limits_0^t\frac{dt}{l(\tau)}}\left(\frac{l(0)}{l(\tau)}\right)^{3/4}. \tag{8.32}$$

Подставляя это значение a во второе уравнение системы (8.31), найдем:

$$\psi=\int\limits_0^t\omega(\tau)\left(1-\frac{a_0^2e^{-\frac{2n}{m}\int\limits_0^t\frac{dt}{l(\tau)}}\left(\frac{l(0)}{l(\tau)}\right)^{3/2}}{16}\right)dt. \tag{8.33}$$

Формулы (8.32) и (8.33) дают возможность построить график зависимости амплитуды и фазы от времени при медленном изменении длины маятника по произвольному закону.

Если в этих формулах положить $l = \text{const}$, то получим:

$$\left.\begin{aligned} a &= a_0 e^{-\frac{\lambda}{2} t}, \\ \psi &= \omega\left(t + \frac{a_0^2 (e^{-\lambda t} - 1)}{16\lambda}\right) + \varphi, \end{aligned}\right\} \tag{8.34}$$

где $\lambda = \frac{2n}{ml}$, φ — начальное значение фазы.

Последние формулы совпадают с ранее найденными выражениями (2.44).

Допустим теперь, что длина маятника изменяется по линейному закону $l(\tau) = l_0 + l_1\tau$; l_0 — значение длины при $t = 0$, εl_1 — скорость изменения длины маятника (для малого интервала времени всегда можно предположить с достаточной степенью точности, что длина изменяется по линейному закону). В этом случае для амплитуды и фазы имеем выражения:

$$a = a_0\left(\frac{l_0}{l_0 + l_1\tau}\right)^{\frac{3}{4} + \frac{n}{ml_1\varepsilon}}, \tag{8.35}$$

$$\psi = \int_0^t \sqrt{\frac{g}{l_0 + l_1\tau}}\left[1 - \frac{a_0^2}{16}\left(\frac{l_0}{l_0 + l_1\tau}\right)^{\frac{3}{2} + \frac{2n}{ml_1\varepsilon}}\right] dt. \tag{8.36}$$

Согласно формуле (8.35) амплитуда колебаний при медленном изменении длины маятника будет изменяться не по экспоненциальному закону, как при обычном линейном трении, а обратно пропорционально некоторой степенной функции времени. При этом очевидно, что при $n < 0$, $l_1 > 0$ и $\left|\frac{n}{ml_1\varepsilon}\right| < \frac{3}{4}$, а также при $n > 0$ и $l_1 > 0$ колебания затухают.

Таким образом, медленное увеличение длины маятника, как и следовало ожидать, способствует затуханию колебаний. Если $l_1 < 0$, $n > 0$ и $\left|\frac{n}{l_1 m\varepsilon}\right| < \frac{3}{4}$, то амплитуда возрастает, а при $\left|\frac{n}{l_1 m\varepsilon}\right| > \frac{3}{4}$ — убывает. При $l_1 < 0$ и $n < 0$ амплитуда возрастает. При отсутствии затухания ($n = 0$) амплитуда колебаний возрастает с уменьшением длины и убывает с увеличением длины.

Аналогичный анализ может быть проведен и для частоты колебаний. Так, например, при отсутствии затухания мгновенная частота уменьшается при увеличении длины маятника и увеличивается при уменьшении длины.

Подсчитаем для данного примера колебаний маятника с медленно меняющейся длиной второе приближение.

Согласно формулам (8.16), (8.9) и (8.17) после ряда выкладок имеем:

$$\theta = a\cos\psi - \frac{a^3}{192}\cos 3\psi, \tag{8.37}$$

где a и ψ должны быть определены из системы уравнений второго приближения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\left(\frac{3l'(\tau)}{4l(\tau)}\varepsilon + \frac{n}{ml(\tau)}\right)\left(a + \frac{a^3}{16}\right), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega(\tau) - \frac{\omega(\tau)\, a^2}{16} + \frac{1}{2\omega(\tau)}\left\{\frac{n^2}{m^2 l^2(\tau)} + \right. \\ &\left. + \frac{\varepsilon l'(\tau) n}{ml^2(\tau)} + \frac{5\varepsilon^2 l''(\tau)}{4l(\tau)} + \frac{5\omega^2(\tau)\, a^4}{2^9\cdot 3} - \frac{3\varepsilon^2 l'^2(\tau)}{16 l^2(\tau)}\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{8.38}$$

которые тоже могут быть проинтегрированы до конца. Так, из первого уравнения системы (8.38) получаем следующее соотношение между a и t:

$$\frac{a}{\sqrt{16+a^2}} = \frac{a_0}{\sqrt{16+a_0^2}}\, e^{-\frac{n}{m}\int\limits_0^t \frac{dt}{l(\tau)}} \left(\frac{l(0)}{l(\tau)}\right)^{3/4}, \tag{8.39}$$

после чего можем проинтегрировать также и второе уравнение системы (8.38).