

ГЛАВА II МЕТОД ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ

§ 9. Траектории на фазовой плоскости. Особые точки

Излагавшиеся ранее асимптотические методы ограничены в своем применении требованием наличия в уравнении малого параметра. Однако во многих случаях нам приходится иметь дело с уравнениями более общего типа, к которым эти методы неприменимы.

Если уравнения, описывающие движение исследуемой динамической системы, могут быть приведены к виду

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad (9.1)$$

то для них можно применить качественные методы исследования. К уравнениям типа (9.1) сводятся все те уравнения, которые были рассмотрены ранее. Кроме того, как увидим далее, при исследовании колебательных систем слабо нелинейных, но находящихся под воздействием внешних периодических сил в качестве уравнений первого приближения получим также уравнения типа (9.1).

Для качественного исследования решений уравнений (9.1) целесообразно рассматривать x , y как координаты точки на плоскости. Эта плоскость, как известно, называется фазовой плоскостью, а точка x , y — фазовой точкой. Движение $x = x(t)$, $y = y(t)$ совершается по некоторой линии, которая называется фазовой траекторией. Построение фазовой траектории для данной системы означает построение кривой, выражающей для заданного движения зависимость скорости от смещения.

Фазовая плоскость с имеющимися на ней фазовыми траекториями дает возможность сразу увидеть всю совокупность движений, могущих возникнуть в рассматриваемой динамической системе.

Для построения фазовых траекторий необходимо найти решение системы уравнений (9.1) $x = x(t)$, $y = y(t)$, представляющее собой уравнение фазовой траектории в параметрической форме, либо найти характеристики, т. е. интегральные кривые уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}, \quad (9.2)$$

дающие непосредственно зависимость между x и y .

Остановимся сначала на простейших случаях.

Рассмотрим уравнение линейного вибратора:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h \frac{dx}{dt} + kx = 0. \quad (9.3)$$

Полагая

$$\frac{dx}{dt} = y,$$

приводим уравнение (9.3) к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -2hy - kx, \\ \frac{dx}{dt} &= y. \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

Предположим, что трение невелико, т. е. $h^2 < k$, $k > 0$; тогда решение системы (9.4) запишется в виде

$$\left. \begin{aligned} x &= ae^{-ht} \cos(\omega_1 t + \alpha), \\ y &= -abe^{-ht} \sin(\omega_1 t + \alpha + \vartheta), \end{aligned} \right\} \quad (9.5)$$

где $\omega_1^2 = k - h^2$, $\vartheta = \operatorname{arctg} \frac{h}{\omega_1}$, a и α — произвольные постоянные, определяющиеся начальными значениями.

Выражения (9.5) представляют собой уравнения фазовой траектории в параметрической форме. При их помощи не представляет затруднений проанализировать характер движения фазовой точки на фазовой плоскости.

Заметим, что система (9.4) определяет в каждой точке фазовой плоскости единственную касательную к интегральной кривой, за исключением точки $x = 0$, $y = 0$. Наклон касательной определяется выражением

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2hy - kx}{y}. \quad (9.6)$$

В точке $x = 0$, $y = 0$ направление касательной становится неопределенным. Такие точки носят название критических или особых точек. Для простейших особых точек (особых точек первого порядка, или элементарных точек) через особую точку либо не проходит ни одной, либо проходит больше чем одна интегральная кривая.

Допустим сначала, что $h = 0$. Тогда решения (9.5) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos(\omega t + \alpha), \\ y &= -a\omega \sin(\omega t + \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (9.7)$$

На фазовой плоскости получаем семейство подобных эллипсов (рис. 41), причем через каждую точку фазовой плоскости проходит только один эллипс, соответствующий определенным начальным условиям.

Исключая из выражений (9.7) время t , получаем уравнение семейства эллипсов в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 \omega^2} = 1, \quad (9.8)$$

которое мы могли бы также получить, интегрируя непосредственно уравнение (9.6) при $h = 0$.

Через начало координат не проходит ни одной интегральной кривой. Такая особая точка, вблизи которой интегральные кривые замкнуты и охватывают особую точку, называется центром.

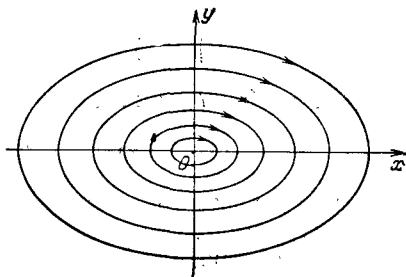


Рис. 41.

Так как в данном случае все фазовые траектории являются замкнутыми кривыми, эллипсами (за исключением траектории, выродившейся в точку $x=0, y=0$), то движение будет периодическим.

Особой точке $x=0, y=0$ соответствует состояние равновесия в рассматриваемой колебательной системе.

Совершенно ясно, что и в общем случае уравнений (9.1) состояниям равновесия системы соответствуют на фазовой плоскости точки, для которых одновременно $\frac{dx}{dt}=0, \frac{dy}{dt}=0$, т. е. особые точки уравнений (9.2).

Периодическим же движениям, происходящим в системе, на фазовой плоскости соответствуют замкнутые фазовые траектории уравнения (9.2).

В дальнейшем нам придется пользоваться понятием устойчивости состояния равновесия.

Приведем здесь только определение, не вдаваясь в детали. Состояние равновесия является устойчивым, если при любой заданной области допустимых отклонений от состояния равновесия (область η) мы можем указать область $\delta(\eta)$, окружающую состояние равновесия и обладающую тем свойством, что ни одно движение, начинающееся внутри $\delta(\eta)$, никогда не покинет области η (рис. 42).

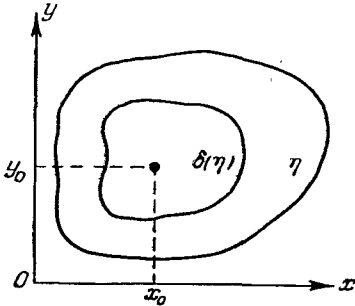


Рис. 42.

Аналитически это определение устойчивости может быть выражено следующим образом: состояние равновесия $x=x_0, y=y_0$ называется устойчивым, если для любого наперед заданного, сколь угодно малого η можно найти такое $\delta(\eta)$, что если для $t=t_0$

$$|x(t_0) - x_0| < \delta(\eta), \quad |y(t_0) - y_0| < \delta(\eta),$$

то и для любых t , таких, что $t_0 < t < \infty$,

$$|x(t) - x_0| < \eta, \quad |y(t) - y_0| < \eta.$$

Нетрудно видеть, что состояние равновесия типа центра является устойчивым состоянием равновесия.

Пусть теперь $h > 0$, что соответствует затухающему колебательному процессу. В этом случае получаем согласно выражению (9.5) на фазовой плоскости семейство спиралей, для которых начало координат является асимптотической точкой (рис. 43), причем чем меньше отношение $\frac{h}{\omega_1}$, т. е. чем меньше трение, тем ближе в течение одного оборота спираль к эллипсу.

Фазовая скорость в данном случае нигде, за исключением начала координат, не обращается в нуль, но непрерывно уменьшается по мере приближения изображающей точки к началу координат.

Фазовые траектории соответствуют в данном случае осциллирующим, но затухающим движениям, а особая точка $x=0, y=0$ соответствует состоянию равновесия.

Рассматриваемая в данном случае особая точка, являющаяся асимптотической точкой всех интегральных кривых, имеющих вид спиралей, называется фокусом, причем при $h > 0$ фокус будет устойчивым.

Пусть теперь $h < 0$. В этом случае мы опять получаем семейство спиралей (рис. 44), однако фазовая точка с течением времени будет удаляться от начала координат. Скорость движения изображающей точки по интегральной кривой, обращаясь в нуль при $x = 0$, $y = 0$, монотонно возрастает по мере удаления точки от начала координат. В данном случае положение равновесия неустойчиво, и особая точка $x = 0$, $y = 0$ представляет собой неустойчивый фокус.

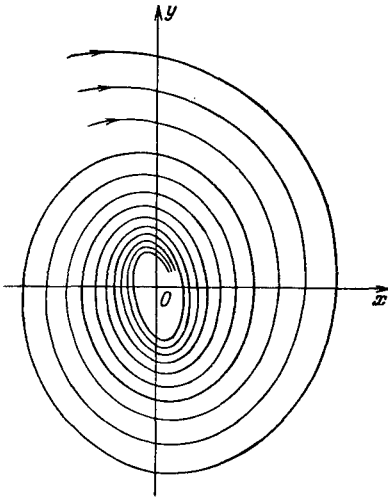


Рис. 43.

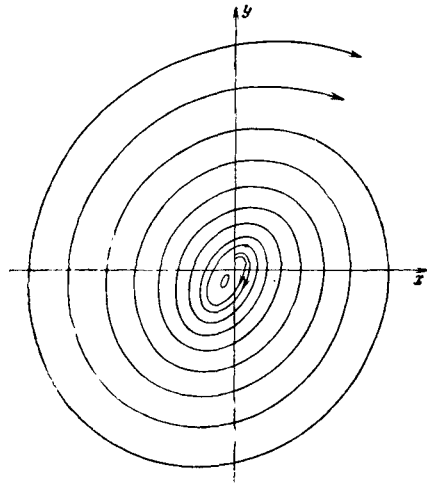


Рис. 44.

Рассмотрим теперь случай, когда $h^2 > k$, что соответствует при $h > 0$ затухающему аperiodическому процессу. В этом случае решение системы (9.4) можно представить в виде

$$x = C_1 e^{-q_1 t} + C_2 e^{-q_2 t}, \quad (9.9)$$

$$y = -C_1 q_1 e^{-q_1 t} - C_2 q_2 e^{-q_2 t}, \quad (9.10)$$

где обозначено:

$$\left. \begin{aligned} -q_1 &= -h + \sqrt{h^2 - k}, \\ -q_2 &= -h - \sqrt{h^2 - k}. \end{aligned} \right\} \quad (9.11)$$

Для получения картины на фазовой плоскости умножим выражение (9.9) сначала на q_1 , затем на q_2 и сложим с (9.10). Возводя полученные результаты соответственно в степени q_1 и q_2 , находим:

$$(y + q_1 x)^{q_1} = C (y + q_2 x)^{q_2} \quad (9.12)$$

или

$$y + q_1 x = C (y + q_2 x)^{\frac{q_2}{q_1}}. \quad (9.13)$$

На фазовой плоскости получаем семейство деформированных парабол (рис. 45), касающихся прямой $y = -q_1 x$ в начале координат. Нетрудно установить направление движения изображающей точки по интегральным кривым. Изображающая точка будет двигаться по интегральным кривым

в направлении, указанном на рис. 45 стрелками, т. е. всегда будет приближаться к началу координат.

Точка $x=0, y=0$ будет особой точкой, причем все интегральные кривые проходят через нее. Особая точка такого типа называется узлом. В рассматриваемом случае положение равновесия будет устойчивым, и этому положению соответствует устойчивый узел.

Рассмотрим теперь характер интегральных кривых на фазовой плоскости для случая большого отрицательного трения $h < 0, h^2 > k$. В этом случае, воспользовавшись (9.13), получаем на фазовой плоскости семейство кривых параболического типа (рис. 46) с особой точкой тоже типа узла.

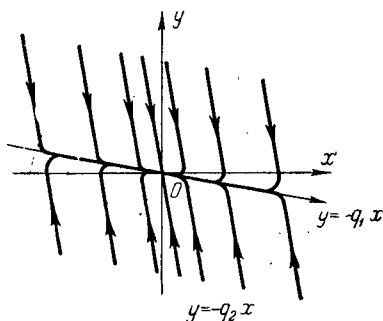


Рис. 45.

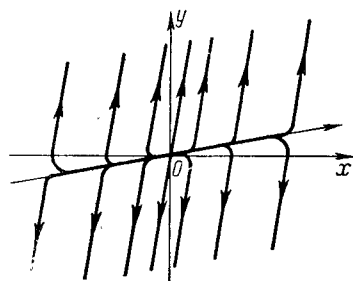


Рис. 46.

Однако, анализируя движение изображающей точки, легко убедиться, что изображающая точка при движении по любой из интегральных кривых стремится уйти от состояния равновесия (см. рис. 46, на котором направление движения указано стрелками). Таким образом, рассматриваемая особая точка представляет собой неустойчивый узел, причем, как и выше, неустойчивость обусловлена тем, что $h < 0$. Заметим, что неустойчивость очевидна непосредственно из рассмотрения выражений (9.9) и (9.10).

Для полноты изложения приведем еще один тип фазовых траекторий, с которыми встретимся при дальнейшем изложении. Для этого рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} - kx = 0, \quad (9.14)$$

где k положительно. Уравнение вида (9.14) получаем, рассматривая, например, малые отклонения маятника около верхнего положения неустойчивого равновесия.

Решение уравнения (9.14) будет:

$$\left. \begin{aligned} x &= C_1 e^{\sqrt{k}t} + C_2 e^{-\sqrt{k}t}, \\ y &= C_1 \sqrt{k} e^{\sqrt{k}t} - C_2 \sqrt{k} e^{-\sqrt{k}t}. \end{aligned} \right\} \quad (9.15)$$

При помощи этих соотношений не представляет затруднений построить фазовые траектории. Действительно, согласно (9.15) легко получить соотношение

$$\frac{x^2}{C} - \frac{y^2}{Ck} = 1, \quad (9.16)$$

представляющее собой уравнение семейства гипербол (рис. 47). При $C=0$ мы получаем две асимптоты этого семейства гипербол, проходящие

через начало координат:

$$\left. \begin{aligned} y &= \sqrt{kx}, \\ x &= -\sqrt{kx}. \end{aligned} \right\} \quad (9.17)$$

Начало координат является единственной особой точкой, причем, за исключением асимптот, ни одна интегральная кривая не проходит через начало координат. Такая особая точка называется особой точкой типа седла.

Рассматривая направление движения изображающей точки на фазовой плоскости, приходим к выводу, что где бы ни находилась изображающая точка в начальный момент (за исключением начала координат и асимптоты $y = -\sqrt{kx}$), она всегда, в конце концов, будет удаляться от начала координат, причем движение будет носить аperiodический характер, а не колебательный. Положение равновесия, соответствующее особой точке типа седла, всегда будет неустойчивым ввиду того, что движение по асимптоте $y = -\sqrt{kx}$ не может быть никогда точно реализовано, так как вероятность начального состояния, соответствующего движению к особой точке, равна нулю.

Перейдем теперь к рассмотрению общего случая. Прежде всего займемся изучением точек равновесия — особых точек уравнения (9.2), в которых

$$P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = 0. \quad (9.18)$$

Пусть $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — вещественные аналитические функции. Предположим, что точки равновесия, т. е. решения уравнений (9.18), изолированы и, таким образом, число особых точек в любой ограниченной области конечно.

Тогда для анализа поведения динамической системы в окрестности данной особой точки $x = x_0, y = y_0$ положим

$$x = x_0 + \delta x, \quad y = y_0 + \delta y. \quad (9.19)$$

Не нарушая формы уравнений (9.1), можем принять особую точку $x = x_0, y = y_0$ за начало координат. Тогда, подставляя (9.19) в уравнения (9.1), получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + dy + P_2(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= ax + by + Q_2(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (9.20)$$

где для упрощения записи вариации $\delta x, \delta y$ заменены через x и y и введены обозначения:

$$c = P'_x(0, 0), \quad d = P'_y(0, 0), \quad a = Q'_x(0, 0), \quad b = Q'_y(0, 0),$$

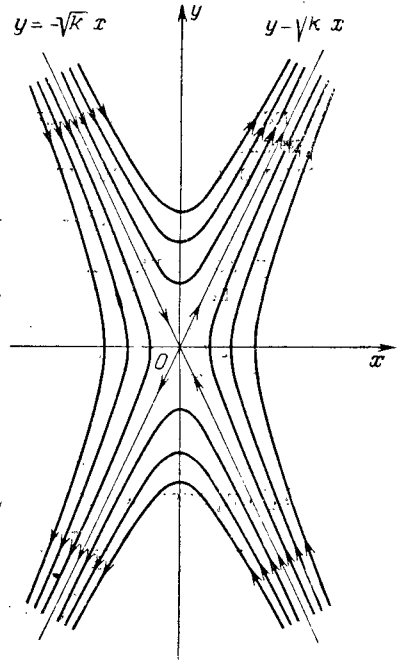


Рис. 47.

а $P_2(x, y)$ и $Q_2(x, y)$ — функции, обладающие непрерывными частными производными до второго порядка включительно и обращающиеся в начале координат в нуль вместе со своими частными производными первого порядка.

Пренебрегая в уравнениях (9.20) членами высшего порядка по отношению к малым отклонениям от точки равновесия, получаем следующую систему с постоянными коэффициентами:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + dy, \\ \frac{dy}{dt} &= ax + by, \end{aligned} \right\} \quad (9.21)$$

которая, как известно, называется «уравнениями в вариациях» около точки равновесия.

Характеристическое уравнение системы (9.21) будет:

$$\lambda^2 - (b + c)\lambda - (ad - bc) = 0. \quad (9.22)$$

Будем рассматривать только случаи, когда характеристические корни λ_1, λ_2 не равны нулю и, следовательно, $ad - bc \neq 0$. Соответствующие критические точки называются особыми точками первого порядка или элементарными точками.

Решение системы уравнений (9.21) будет:

$$\left. \begin{aligned} x &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \\ y &= C_1 x_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 x_2 e^{\lambda_2 t}, \end{aligned} \right\} \quad (9.23)$$

где λ_1 и λ_2 определяются следующими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2} [b + c + \sqrt{(b - c)^2 + 4ad}], \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} [b + c - \sqrt{(b - c)^2 + 4ad}], \end{aligned} \right\} \quad (9.24)$$

а x_1 и x_2 — корни уравнения

$$dx^2 + (b - c)x - a = 0. \quad (9.25)$$

Анализируя правые части выражений (9.24), нетрудно установить, при каких соотношениях между коэффициентами уравнений (9.21) a, b, c, d правые части (9.23) стремятся к нулю или остаются ограниченными при $t \rightarrow \infty$ и, следовательно, соответствующая критическая точка будет устойчивой.

Для того чтобы критическая точка была устойчива, необходимо, чтобы $b + c < 0$ при $(b - c)^2 + 4ad \leq 0$; в случае, если $(b - c)^2 + 4ad > 0$, то для устойчивости необходимо также, чтобы $ad - bc < 0$, в противном случае критическая точка будет неустойчива.

Если $b + c = 0$, то для устойчивости необходимо, чтобы $(b - c)^2 + 4ad < 0$.

В случае, если $b + c > 0$, критическая точка будет всегда неустойчива.

Если $ad - bc \neq 0$, то характер критической точки уравнений (9.1) по существу определяется характером ее первого приближения (за исключением случая, когда $b + c = 0$), т. е. характером решения системы (9.21), полученной при замене $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ их членами первого порядка.

Совершенно очевидно, что присутствие отброшенных нами членов высшего порядка не изменит характера движения в окрестности точки равновесия в случае, если $\operatorname{Re}[\lambda_1, \lambda_2] \neq 0$, поскольку ясно, что отброшенные члены могут вызвать лишь малые добавки к «эффективным» значениям декремента затухания. В случае, если $\operatorname{Re}[\lambda_1] = 0$ или $\operatorname{Re}[\lambda_2] = 0$, то малые отброшенные члены могут повлиять на характер движения, поскольку его устойчивость как раз и будет определяться этими малыми добавками.

Рассмотрим, например, уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \left(\frac{dx}{dt} \right)^3 + x = 0, \quad (9.26)$$

которое можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -\lambda y^3 - x, \\ \frac{dx}{dt} &= y. \end{aligned} \right\} \quad (9.27)$$

Для исследования характера точки равновесия $x=0, y=0$ получаем уравнения в вариациях

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -x, \\ \frac{dx}{dt} &= y, \end{aligned} \right\} \quad (9.28)$$

согласно которым точка равновесия $x=0, y=0$ устойчива, так как $b+c=0, 4ad=-4 < 0$.

Как видно, для уравнений (9.27) характер движения меняется, так как наличие в уравнении (9.26) члена $\lambda \left(\frac{dx}{dt} \right)^3$ приведет к затуханию колебаний или к неограниченному возрастанию, в зависимости от того, будет ли λ положительна или отрицательна.

Приведем здесь теорему, являющуюся весьма частным случаем теоремы Ляпунова.

Пусть в уравнениях (9.20) $P_2(x, y)$ и $Q_2(x, y)$ — функции, обладающие непрерывными частными производными до второго порядка включительно в некоторой окрестности точки $x=0, y=0$. Пусть в этой точке $P_2(x, y)$ и $Q_2(x, y)$ со своими частными производными первого порядка обращаются в нуль.

Тогда, если для соответствующей системы «первого приближения» (9.21) вещественные части корней характеристического уравнения (9.22) отрицательны, тривиальное решение $x=0, y=0$ системы (9.20) устойчиво по Ляпунову.

Больше того, все решения системы (9.20), исходящие из начальных точек, достаточно близких к $(0, 0)$, будут асимптотически приближаться к тривиальному решению при $t \rightarrow +\infty$.

Доказательство этого утверждения весьма просто можно получить следующим путем.

Пусть

$$\left. \begin{aligned} x &= U_{11}(t), & y &= U_{21}(t), \\ x &= U_{12}(t), & y &= U_{22}(t) \end{aligned} \right\} \quad (9.29)$$

будут решениями уравнений первого приближения при начальных условиях:

$$\begin{aligned} U_{11}(0) &= 1, & U_{21}(0) &= 0, \\ U_{12}(0) &= 0, & U_{22}(0) &= 1. \end{aligned}$$

Тогда нетрудно заметить, что уравнения вида

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + dy + F_1(t), \\ \frac{dy}{dt} &= ax + by + F_2(t) \end{aligned}$$

интегрируются с помощью квадратур:

$$\begin{aligned} x &= U_{11}(t)x(0) + \int_0^t \{U_{11}(t-\tau)F_1(\tau) + U_{12}(t-\tau)F_2(\tau)\} d\tau, \\ y &= U_{22}(t)y(0) + \int_0^t \{U_{21}(t-\tau)F_1(\tau) + U_{22}(t-\tau)F_2(\tau)\} d\tau. \end{aligned}$$

Воспользовавшись этими формулами для уравнений (9.20), получим:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= U_{11}(t)x(0) + \int_0^t \{U_{11}(t-\tau)P_2(x(\tau), y(\tau)) + \\ &\quad + U_{12}(t-\tau)Q_2(x(\tau), y(\tau))\} d\tau, \\ y(t) &= U_{22}(t)y(0) + \int_0^t \{U_{21}(t-\tau)P_2(x(\tau), y(\tau)) + \\ &\quad + U_{22}(t-\tau)Q_2(x(\tau), y(\tau))\} d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (9.30)$$

Мы заменили тем самым систему дифференциальных уравнений (9.20) системой интегральных уравнений.

Подчеркнем, что ввиду того, что вещественные части корней характеристического уравнения (9.22), по предположению, отрицательны, функции $U_{ab}(t)$ будут экспоненциально затухать, так что можно написать:

$$|U_{ab}(t)| \leq ke^{-\alpha t}, \quad (9.31)$$

где k и α — положительные постоянные.

Будем исследовать интегральные уравнения (9.30) с помощью обычного метода последовательных приближений.

Воспользовавшись оценкой (9.31), найдем, что при достаточно малых начальных значениях $x(0)$, $y(0)$:

- 1) $|x_n(t)| \leq Ce^{-\alpha t}$, $|y_n(t)| \leq Ce^{-\alpha t}$, C — постоянная, не зависящая от n .
- 2) $x_n(t)$, $y_n(t)$ сходятся к решениям $x(t)$, $y(t)$ равномерно для всех t на интервале $(0, \infty)$.

Отсюда и вытекает, что $x(t)$, $y(t)$ будут стремиться к нулю при $t \rightarrow +\infty$.

Перейдем теперь к анализу характера критических точек на фазовой плоскости.

Для этого надо рассмотреть поведение характеристик в окрестности особой точки.

Уравнение характеристик в параметрической форме дано выражениями (9.23), согласно которым не представляет затруднений построить интегральные кривые и проанализировать их характер в зависимости от соотношений между коэффициентами a , b , c , d .

Рассмотрим различные случаи.

Пусть $(b-c)^2 + 4ad < 0$; в этом случае правые части выражений (9.23) имеют колебательный характер. Если $b+c=0$, то в окрестности критической точки характеристиками является семейство подобных эллипсов, охватывающих особую точку, которая в данном случае будет особой точкой типа центра. Если $b+c \neq 0$, то характеристики представляют собой семейство спиралей, для которых асимптотической точкой является критическая точка типа фокуса, причем в случае, если $b+c < 0$, характеристики стремятся к началу координат при $t \rightarrow \infty$, и фокус будет являться устойчивой особой точкой; если $b+c > 0$, то характеристики будут стремиться к началу координат при $t \rightarrow -\infty$; в этом случае фокус будет неустойчивой особой точкой.

Пусть $(b-c)^2 + 4ad = 0$. Тогда, исключая из выражений (9.23) время, получим уравнение характеристик на фазовой плоскости в окрестности критической точки в виде

$$y - \kappa_1 x = c (y - \kappa_2 x)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}. \quad (9.32)$$

Последнее выражение, как уже указывалось выше, представляет собой уравнение семейства парабол или семейства гипербол в зависимости от знака показателя степени $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$. Если $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 0$, то (9.32) представляет собой уравнение семейства парабол. Таким образом, если $ad - bc < 0$, критическая точка является узлом, устойчивость которого зависит от знака выражения $b+c$.

В случае, если $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$, что будет при $ad - bc > 0$, то (9.32) является уравнением семейства гипербол и критическая точка является особой точкой типа седла.

Рассмотрим теперь случай, когда $(b-c)^2 + 4ad = 0$ и когда, следовательно, корни характеристического уравнения (9.22) равны и вещественны: $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}(b+c)$.

Тогда, если $a = d = 0$, $b = c = \lambda$, согласно уравнению (9.21) получаем;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \quad (9.33)$$

и уравнение характеристик $y = cx$ представляет собой уравнение семейства прямых, проходящих через начало координат. Особая точка $x = 0$, $y = 0$ в этом случае тоже называется узлом.

В общем же случае необходимо в уравнениях (9.21) сделать замену переменных согласно формулам:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= ax + \frac{b-c}{2}y, \\ \eta &= y. \end{aligned} \right\} \quad (9.34)$$

Тогда, после исключения времени t , получаем следующее уравнение:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\eta}{\xi} + \frac{1}{C}, \quad (9.35)$$

решение которого

$$\eta = \frac{1}{\lambda} \xi \ln \xi + C\xi \quad (9.36)$$

представляет собой совокупность кривых, проходящих через особую точку и представленных на рис. 48. Особая точка опять является узлом,

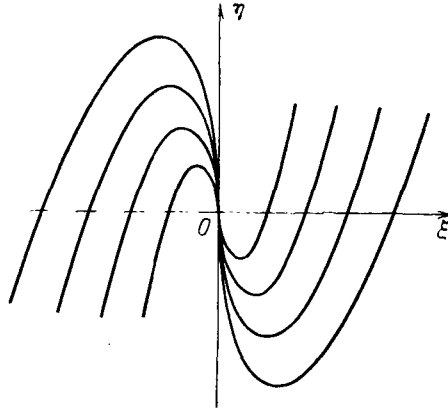


Рис. 48.

причем узел будет устойчивым при $b+c < 0$ и неустойчивым при $b+c > 0$.

Результаты проведенного рассмотрения даны в табл. 5

Таблица 5

1	$(b-c)^2 + 4ad < 0$	$b+c \neq 0$ фокус $b+c=0$ центр	$b+c < 0$ устойчивый фокус $b+c > 0$ неустойчивый фокус
2	$(b-c)^2 + 4ad = 0$	узел	$b+c < 0$ устойчивый узел $b+c > 0$ неустойчивый узел
3	$(b-c)^2 + 4ad > 0$	$ad-bc < 0$ узел $ad-bc > 0$ седло	$b+c < 0$ устойчивый узел $b+c > 0$ неустойчивый узел

Перейдем теперь от локального исследования характера движения вблизи особых точек к исследованию поведения интегральных кривых на всей фазовой плоскости.

Для получения ориентировочного представления о возможном характере поведения интегральных кривых на фазовой плоскости рассмотрим вначале приближенное решение уравнения (1.1), описывающего колебания системы с малой нелинейностью:

$$x = a \cos \psi + \varepsilon \dots, \quad y = \frac{dx}{dt} = -a\omega \sin \psi + \varepsilon \dots, \quad (9.37)$$

где амплитуда колебаний a и фаза ψ определяются следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\delta(a)a, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_1(a). \end{aligned} \right\} \quad (9.38)$$

Выражения (9.37) представляют собой уравнения фазовых траекторий в параметрической форме. Поведение этих фазовых траекторий будет зависеть от корней уравнения

$$\Phi(a) = a\delta(a) = 0, \quad (9.39)$$

соответствующих стационарному режиму в колебательной системе, а также от знака функции $\Phi'_a(a)$.

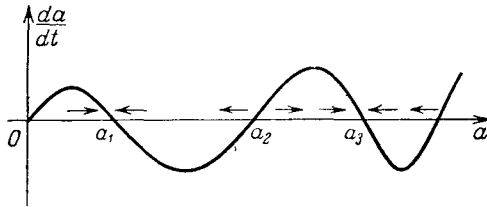


Рис. 49.

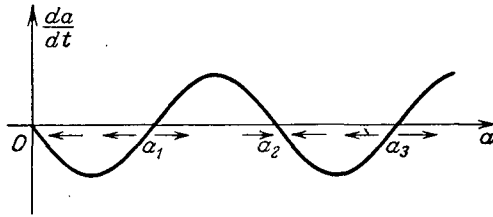


Рис. 50.

Тривиальный корень $a = 0$ соответствует, очевидно, состоянию равновесия.

Пусть уравнение (9.39) имеет ряд корней, для которых $\Phi'_a(a) \neq 0$. Тогда мы получаем положение, изображенное на графиках типа рис. 49 или 50.

Очевидно, что в первом случае a_1 и a_3 являются корнями уравнения (9.39), соответствующими устойчивому стационарному режиму в колебательной системе, а a_2 соответствует неустойчивому режиму, $a = 0$ является неустойчивым состоянием равновесия. Во втором случае $a = 0$ будет устойчивым положением равновесия, a_1 и a_3 соответствуют неустойчивому стационарному режиму, а a_2 — устойчивому стационарному режиму.

Переходя к фазовой плоскости, мы получим точку равновесия и ряд замкнутых кривых, близких к эллипсу:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2\omega^2} = 1 \quad (a = a_1, a_2, a_3, \dots). \quad (9.40)$$

На рис. 51 и 52 приведена картина на фазовой плоскости соответственно для двух рассмотренных выше типов корней уравнения (9.39).

Таким образом, на фазовой плоскости мы получили особую точку, соответствующую нулевому корню, и замкнутые траектории, соответствующие

щие корням уравнения (9.39) a_1, a_2, a_3, \dots . Все остальные фазовые траектории будут асимптотически стремиться к этим замкнутым траекториям при $t \rightarrow \infty$ или при $t \rightarrow -\infty$.

В данном случае фазовая плоскость разделена на ряд полос, целиком заполненных интегральными кривыми, асимптотически приближающимися

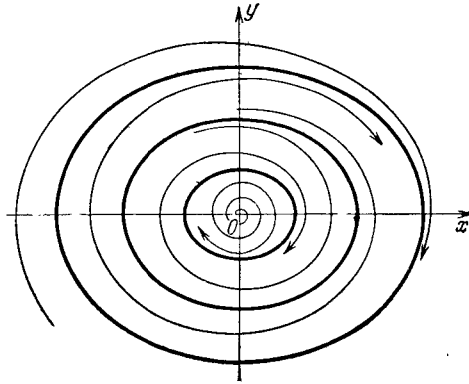


Рис. 51.

к некоторой замкнутой интегральной кривой, которая называется предельным циклом, или к точке равновесия. Предельный цикл будет устойчив, если все интегральные кривые полосы достигают его при $t \rightarrow \infty$, и неустойчив, если они достигают его при $t \rightarrow -\infty$.

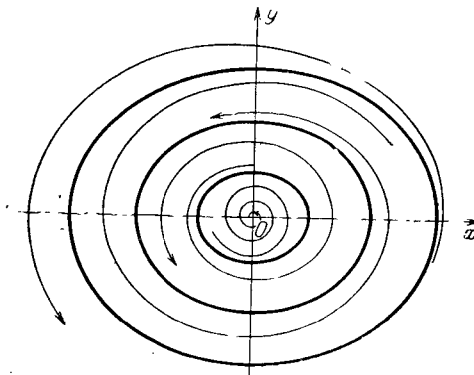


Рис. 52.

Заметим, что в случае, если колебательная система консервативна, то

$$\Phi(a) \equiv 0,$$

и в системе возможен стационарный периодический режим с произвольной амплитудой, зависящей только от начальных значений.

Этому случаю на фазовой плоскости соответствует семейство замкнутых циклов, окружающих особую точку типа центр (рис. 53).

Разумеется, приведенное нами рассуждение не является строгим и, самое главное, оно относится лишь к частному случаю систем, близких к линейному гармоническому вибратору, для которых возможна только одна особая точка.

Общий случай системы (9.1) был исследован Пуанкаре с помощью строгих качественных методов, причем в результате получается картина поведения траекторий на фазовой плоскости, являющаяся естественным обобщением приведенной выше.

Предположим, что система (9.1) описывает некоторый колебательный процесс. Этим самым мы исключаем из рассмотрения случай, когда на фазовой плоскости могут существовать траектории, уходящие в бесконечность.

Тогда на фазовой плоскости имеем особые точки, замкнутые траектории и сепаратрисы — интегральные кривые, проходящие через особую точку типа седла. Сепаратриса играет особую роль, так как она разделяет фазовую плоскость на ряд областей, заполненных траекториями различных типов (рис. 54).

Любая незамкнутая интегральная кривая или навивается на предельный цикл, или приближается к одной или ряду особых точек. Замкнутые циклы могут образовывать как непрерывное семейство, так и дискретное.

Картина, при которой циклы образуют непрерывное семейство с особой точкой внутри типа центра, с физической точки зрения типична для консервативных систем.

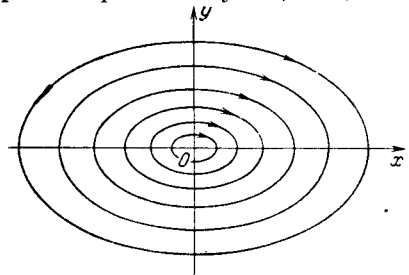


Рис. 53.

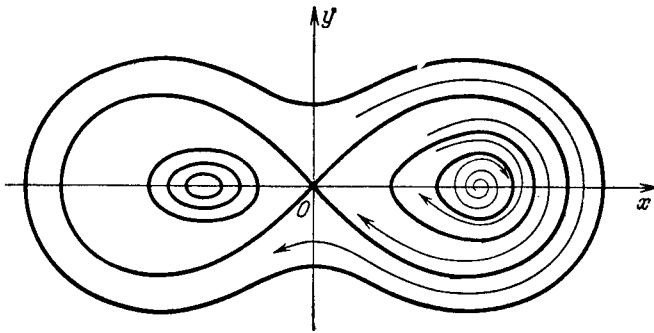


Рис. 54.

В случае, если циклы образуют дискретное семейство, то они заключены в полосы, причем все интегральные кривые, заключенные в такой полосе, асимптотически стремятся к циклу, являющемуся в данном случае предельным. Если приближение к данному циклу совершается при $t \rightarrow \infty$, мы говорим об устойчивом предельном цикле. Если это приближение имеет место при $t \rightarrow -\infty$, то естественно говорить о неустойчивом цикле.

Такая картина характерна для автоколебательных систем. Предельные устойчивые циклы изображают стационарные режимы автоколебаний, причем совершенно очевидна независимость стационарного режима в автоколебательной системе от начальных условий, лежащих в известных пределах. Разумеется, в случае наличия нескольких предельных циклов при существенном изменении начальных значений возможна переброска с одного предельного цикла на другой.

Приведенная картина поведения траекторий на фазовой плоскости очень наглядна, однако она с большим трудом поддается детализации при решении конкретных примеров.

До сих пор не существует достаточно общих теоретических методов для решения вопроса о существовании предельных циклов и определения места их расположения, за исключением случая систем, близких к линейным ($\varepsilon \ll 1$).

При исследовании задач такого рода часто большое значение имеет понятие индекса, введенное Пуанкаре.

Возьмем на рассматриваемой фазовой плоскости некоторую замкнутую кривую Γ , причем предположим, что эта кривая простая (т. е. не имеет двойных точек) и не проходит через состояния равновесия. Возьмем на

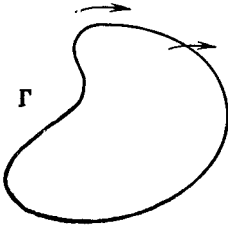


Рис. 55.

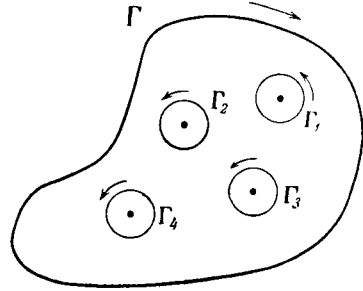


Рис. 56.

этой кривой некоторую точку S и проведем через нее вектор, совпадающий с направлением касательной к проходящей через эту точку фазовой траектории.

Пусть непрерывная функция $\theta(t)$ определяет угол, который этот вектор образует с положительным направлением оси Ox .

Если точка S сделает полный оборот по замкнутой кривой Γ и вернется на прежнее место, то вектор совершит за этот период некоторое число оборотов и, следовательно, $\theta(t)$ изменится на величину $2\pi j$, где j — положительное или отрицательное целое число (рис. 55). Число j называется индексом замкнутого контура Γ .

Очевидно, что число j может быть выражено криволинейным интегралом:

$$j = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} d \left(\operatorname{arctg} \frac{dy}{dx} \right) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \frac{P dQ - Q dP}{P^2 + Q^2}. \quad (9.41)$$

Этот криволинейный интеграл берется от полного дифференциала; следовательно, если внутри области, охватываемой кривой Γ , подынтегральная функция и ее производные непрерывны, то интеграл равен нулю.

Совершенно ясно, что такие свойства непрерывности могут нарушаться лишь в точках, для которых

$$P^2 + Q^2 = 0,$$

т. е. в особых точках нашего уравнения.

Поэтому, если внутри кривой Γ особых точек не содержится, то ее индекс равен нулю.

В общем случае, когда внутри Γ имеется ряд особых точек, проведем построение, изображенное на рис. 56.

В этом случае сумма интегралов (9.41), взятых по кривой Γ и кривым $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots$, окружающим особые точки, равна нулю, поскольку в соответствующей многосвязной области, ограниченной кривыми $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots$, особых точек уже не содержится.

Поскольку кривым $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots$ мы приписываем обход, противоположный принятому в определении индекса, видим, что индекс кривой Γ является суммой чисел, зависящих лишь от свойств соответствующей особой точки.

Эти числа и называются индексами особых точек. По данному определению, индекс какой-либо особой точки равняется интегралу

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \frac{P dQ - Q dP}{P^2 + Q^2},$$

взятому по кривой Γ , окружающей лишь одну данную точку M , и не зависящему от формы Γ .

Для фактического определения индекса можно, следовательно, взять в качестве Γ эллипс

$$(ax + by)^2 + (cx + dy)^2 = 1, \quad (9.42)$$

сколь угодно близкий к точке равновесия. Здесь, как видно, мы поместили начало координат в рассматриваемую особую точку.

Тогда, пренебрегая в выражениях для $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ членами высшего порядка малости, получим:

$$j = \frac{q}{2\pi} \oint (x dy - y dx), \quad (9.43)$$

где

$$q = bc - ad,$$

или, в силу известного выражения для площади через криволинейный интеграл,

$$j = \frac{q}{\pi} S,$$

где $S = \frac{\pi}{|q|}$ — площадь эллипса и, следовательно,

$$j = \frac{q}{|q|}.$$

Отсюда сразу следует, что индекс Пуанкаре для узла, фокуса и центра равен $+1$, а для седла -1 . Эти же результаты можно было бы получить, исходя из непосредственного рассмотрения картины на фазовой плоскости (рис. 57).

Следует подчеркнуть, что даже если мы знаем характер и местоположение особых точек, то этого еще совершенно недостаточно для общего суждения о поведении интегральных кривых дифференциального уравнения (9.2). Однако для ряда частных случаев можно прийти к важным заключениям.

Рассмотрим, например, некоторую замкнутую интегральную кривую, определяемую уравнением (9.2), без двойных точек и особых точек.

Так как вектор, касательный к такой кривой, при полном обходе кривой в положительном направлении поворачивается на угол 2π , то, следовательно, сумма индексов всех особых точек, находящихся внутри замкнутой интегральной кривой, равна 1 .

Таким образом, очевидно, что внутри замкнутой интегральной кривой должна находиться, по крайней мере, одна особая точка, причем если эта точка одна, то это центр, фокус или узел.

Если внутри замкнутой интегральной кривой имеется несколько особых точек, то число особых точек типа седла на единицу меньше числа особых точек остальных типов.

Понятие индекса дает возможность определить количество и местоположение предельных циклов для данного уравнения, т. е. выделить на фазовой плоскости некоторое число колец конечной ширины, в каждом из которых расположен только один предельный цикл.

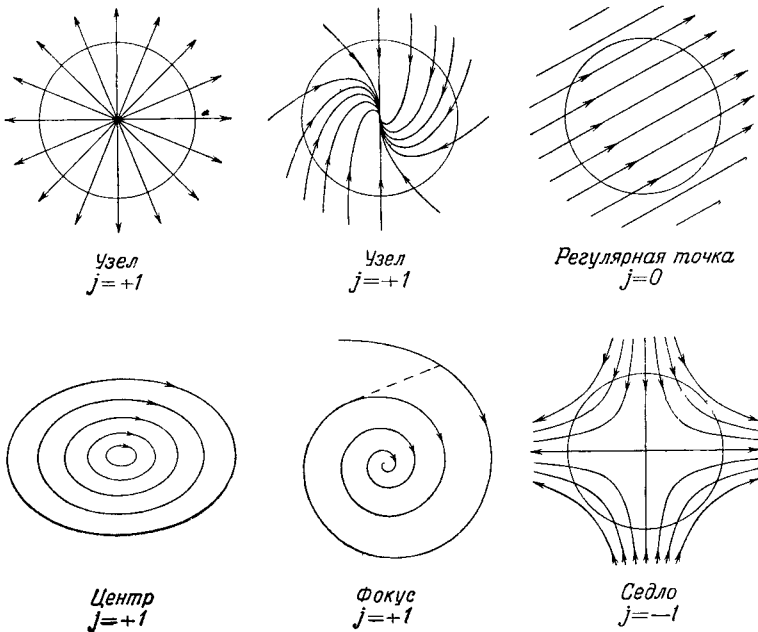


Рис. 57.

Для этого нужно выделить несколько особых точек, сумма индексов которых равна $+1$, и окружить их двумя замкнутыми кривыми так, чтобы в полученной кольцеобразной области не было особых точек.

После этого надо исследовать направление вектора скорости изображающей точки на этих кривых. В зависимости от направления этого вектора можно вывести заключение о наличии предельного цикла, а также о его характере. Так, например, если вектор скорости изображающей точки направлен везде внутрь кольцеобразной области, то в данной области существует, по крайней мере, один устойчивый предельный цикл. Если вектор скорости везде направлен наружу, то существует, по крайней мере, один неустойчивый предельный цикл и т. д.

Приведем в заключение изящный пример*), для которого легко определить предельный цикл аналитически.

*) И. Г. Петровский, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, Гостехиздат, М — Л., 1947.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+y)\sqrt{x^2+y^2}-y}{(x-y)\sqrt{x^2+y^2}-x}. \quad (9.44)$$

Делая замену переменных $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, где ρ и φ — полярные координаты, получим уравнение

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho - 1, \quad (9.45)$$

общий интеграл которого будет:

$$\rho = 1 + Ce^\varphi, \quad (9.46)$$

где C — произвольная постоянная. Чтобы ρ было всегда положительным, необходимо, чтобы $\varphi \ll \ln|C|$ для $C < 0$. Семейство интегральных кривых в этом случае будет состоять из окружности радиуса $\rho = 1$ (для $C = 0$), спиралей, выходящих из начала координат и асимптотически приближающихся к окружности изнутри (навивающихся на окружность изнутри) при $\varphi \rightarrow -\infty$ (для $C < 0$), и спиралей, асимптотически приближающихся к окружности снаружи (навивающихся на окружность снаружи) при $\varphi \rightarrow -\infty$ (для $C > 0$). Окружность с радиусом $\rho = 1$ будет в данном случае являться предельным циклом уравнения (9.44) (рис. 58).

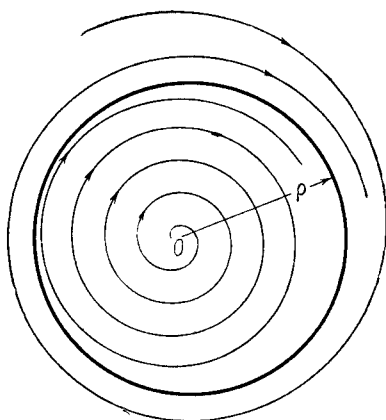


Рис. 58.

§ 10. Метод Льенара

Во многих важных частных случаях нелинейное дифференциальное уравнение (9.2) удобно исследовать с помощью графического построения интегральных кривых на фазовой плоскости. Очень изящным методом графического построения интегральных кривых является метод, предложенный французским инженером Льенаром [26]. Этот метод позволяет изучить все типы движения, допускаемые данным уравнением, и найти предельные циклы.

Льенар исследовал уравнение вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) \frac{dx}{dt} + g(x) = 0, \quad (10.1)$$

К уравнению такого типа, как известно, принадлежит уравнение Ван-дер-Поля, а также может быть приведено уравнение Рэля и др.

После работы Льенара вопрос об установлении критериев существования и единственности предельного цикла для уравнения типа (10.1) был предметом исследования ряда авторов. Упомянем, например, работы В. С. Иванова, Левинсона и Смита, А. В. Драгилева.

Приведем формулировку теоремы А. В. Драгилева. Введем обозначения:

$$F(x) = \int_0^x f(x) dx, \quad G(x) = \int_0^x g(x) dx. \quad (10.2)$$