

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+y)\sqrt{x^2+y^2}-y}{(x-y)\sqrt{x^2+y^2}-x}. \quad (9.44)$$

Делая замену переменных $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, где ρ и φ — полярные координаты, получим уравнение

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho - 1, \quad (9.45)$$

общий интеграл которого будет:

$$\rho = 1 + Ce^\varphi, \quad (9.46)$$

где C — произвольная постоянная. Чтобы ρ было всегда положительным, необходимо, чтобы $\varphi \ll \ln|C|$ для $C < 0$. Семейство интегральных кривых в этом случае будет состоять из окружности радиуса $\rho = 1$ (для $C = 0$), спиралей, выходящих из начала координат и асимптотически приближающихся к окружности изнутри (навивающихся на окружность изнутри) при $\varphi \rightarrow -\infty$ (для $C < 0$), и спиралей, асимптотически приближающихся к окружности снаружи (навивающихся на окружность снаружи) при $\varphi \rightarrow -\infty$ (для $C > 0$). Окружность с радиусом $\rho = 1$ будет в данном случае являться предельным циклом уравнения (9.44) (рис. 58).

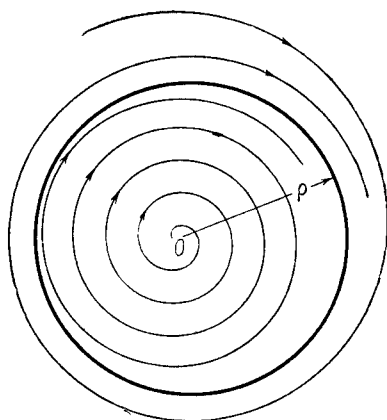


Рис. 58.

§ 10. Метод Льенара

Во многих важных частных случаях нелинейное дифференциальное уравнение (9.2) удобно исследовать с помощью графического построения интегральных кривых на фазовой плоскости. Очень изящным методом графического построения интегральных кривых является метод, предложенный французским инженером Льенаром [26]. Этот метод позволяет изучить все типы движения, допускаемые данным уравнением, и найти предельные циклы.

Льенар исследовал уравнение вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) \frac{dx}{dt} + g(x) = 0, \quad (10.1)$$

К уравнению такого типа, как известно, принадлежит уравнение Ван-дер-Поля, а также может быть приведено уравнение Рэля и др.

После работы Льенара вопрос об установлении критериев существования и единственности предельного цикла для уравнения типа (10.1) был предметом исследования ряда авторов. Упомянем, например, работы В. С. Иванова, Левинсона и Смита, А. В. Драгилева.

Приведем формулировку теоремы А. В. Драгилева. Введем обозначения:

$$F(x) = \int_0^x f(x) dx, \quad G(x) = \int_0^x g(x) dx. \quad (10.2)$$

Тогда, если:

- 1) $g(x)$ удовлетворяет условиям Липшица;

$$xg(x) > 0, \quad x \neq 0; \quad G(\infty) = \infty;$$

2) $F(x)$ однозначно определена в промежутке $-\infty < x < \infty$ и для каждого конечного интервала удовлетворяет условиям Липшица и, кроме того, для достаточно малых $|x|$ $F(x) < 0$ при $x > 0$ и $F(x) > 0$ при $x < 0$;

- 3) существуют число M и такие числа k и k' , $k' < k$, что

$$F(x) \geq k, \quad \text{когда } x > M,$$

$$F(x) \leq k', \quad \text{когда } x < -M,$$

то уравнение (10.1) имеет, по крайней мере, один предельный цикл.

Как видно, здесь при весьма общих условиях устанавливается существование, по крайней мере, одного предельного цикла.

Вопросу о единственности предельного цикла посвящена теорема Левинсона и Смита:

Пусть

1. $g(x)$ — нечетная функция, такая, что $g(x) > 0$ для $x > 0$.

2. $F(x)$ — нечетная функция, причем существует значение x_0 , такое, что $F(x) < 0$ для $0 < x < x_0$ и $F(x) \geq 0$ и монотонно возрастает для $x \geq x_0$.

3. $F(\infty) = G(\infty) = \infty$.

4. $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям Липшица на любом конечном интервале.

В таком случае уравнение (10.1) имеет предельный цикл, и притом единственный.

Мы не будем останавливаться здесь на доказательстве этих теорем*).

Рассмотрим более простой случай, когда выполнены следующие ограничительные условия:

1. $f(x)$ — функция четная, $g(x)$ — нечетная и, кроме того, $xg(x) > 0$ для любых x , а $f(0) < 0$.

2. $f(x)$ и $g(x)$ — функции аналитические.

3. $F(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$.

4. Уравнение $F(x) = 0$ имеет единственный положительный корень $x = a$, и, кроме того, для $x \geq a$ функция $F(x)$ монотонно возрастает.

Как нетрудно видеть, этим условиям удовлетворяет уравнение Ван-дер-Поля, а также уравнение Рэля.

Покажем, что при их выполнении уравнение (10.1) обладает единственным замкнутым циклом, который будет устойчивым. Доказательство проведем с помощью весьма наглядного и элементарного способа, приведенного в книге С. Лефшеца [24]. Положим

$$y = \frac{dx}{dt} + F(x), \quad \lambda(x, y) = \frac{y^2}{2} + G(x). \quad (10.3)$$

При таких обозначениях $\frac{y^2}{2}$ можно интерпретировать как кинетическую энергию, причем заметим, что введенную выше функцию $G(x)$ можно интерпретировать как потенциальную энергию.

*) Доказательство этих теорем можно найти в книге В. В. Немыцкого и В. В. Степанова [33].

Определим теперь энергию, рассеиваемую системой при колебаниях, описывающихся уравнением (10.1). Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{y^2}{2} + G(x) \right) &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} + F(x) \right)^2 + G(x) \right\} = \\ &= \frac{dx}{dt} \left(\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) \frac{dx}{dt} + g(x) \right) + F(x) \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} + F(x) \right), \end{aligned}$$

или, принимая во внимание (10.1) и обозначения (10.2) и (10.3), находим после сокращения на dt :

$$d\lambda = F(x) dy. \tag{10.4}$$

Таким образом, энергия, рассеянная системой, будет выражаться величиной интеграла $\int F(x) dy$, взятого вдоль интегральной кривой.

Переходя к переменным x, y , из уравнения (10.1) получим эквивалентную ему систему:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y - F(x), \\ \frac{dy}{dt} &= -g(x). \end{aligned} \right\} \tag{10.5}$$

Таким образом, нам надо показать, что система (10.5) обладает единственным устойчивым циклом.

Система уравнений (10.5) обладает следующими очевидными свойствами:

1) если $x(t)$ и $y(t)$ являются решениями системы уравнений (10.5), то в силу приведенных ограничений $-x(t), -y(t)$ также будут решениями (так как $F(x)$ — функция нечетная); следовательно, кривая, симметричная интегральной кривой по отношению к началу координат, является также интегральной кривой уравнения (10.5);

2) единственной критической точкой системы (10.5) на фазовой плоскости является начало координат, и поэтому предельный цикл должен окружать начало координат;

3) наклон интегральной кривой Γ определяется следующим уравнением:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{g(x)}{y - F(x)}. \tag{10.6}$$

Так как $g(0) = 0$, то все касательные к траектории Γ в точках, лежащих на оси Oy (за исключением начала координат), горизонтальны.

С другой стороны, если мы рассмотрим кривую Δ , уравнение которой будет $y - F(x) = 0$ (рис. 59, пунктирная линия), то нетрудно заметить, что все касательные к Γ в точках пересечения ее с Δ вертикальны, за исключением начала координат (так как на Δ $y - F(x) = 0$ и, следовательно, $\frac{dy}{dx} = \infty$). Далее, так как $g(x)$ — нечетная, $xg(x) > 0$, то согласно (10.5) y убывает вдоль кривой Γ направо от оси Oy и возрастает налево от оси Oy . Кроме того, x возрастает, когда Γ лежит над Δ

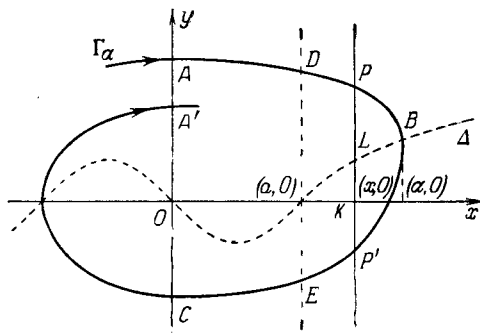


Рис. 59.

(так как в этом случае $y - F(x) > 0$), и убывает, когда Γ лежит ниже Δ . Следовательно, кривая Γ имеет вид, изображенный на рис. 59.

Обозначим через a абсциссу точки B и будем в дальнейшем писать Γ_a вместо Γ .

Установим теперь, при каких условиях Γ_a будет замкнутым циклом.

Очевидно, необходимо, чтобы $OA' = OA$, так как в противном случае, повторяя наше рассуждение, убедимся, что, продолжая Γ за точку A' , мы получим, поскольку цикл не может себя пересекать, точку A'' , лежащую ниже A' (рис. 60), и т. д. Таким образом, если $OA' \neq OA$, кривая Γ_a не сможет возвратиться ни в точку A , ни в точку A' и,

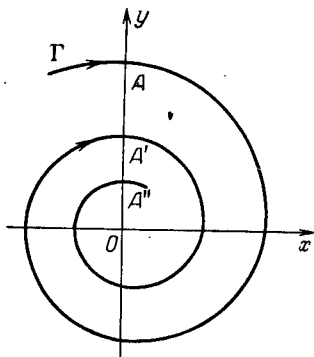


Рис. 60.

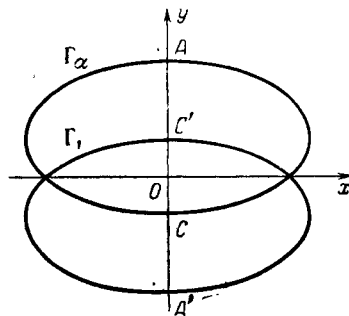


Рис. 61.

следовательно, не сможет быть замкнутой. Следовательно, Γ_a должна пересекать каждую ось в двух и только в двух точках. Отсюда следует, что $OA = -OC$.

Действительно, допустим, что $OA \neq -OC$ и пусть точки A' и C' симметричны точкам A и C по отношению к началу координат. Согласно первому свойству системы уравнений (10.5) кривая, симметричная кривой Γ_a по отношению к началу координат, будет замкнутой интегральной кривой Γ_1 , проходящей через точки A' , C' . Так как ось Oy перпендикулярна к Γ_a , то мы приходим к положению, изображенному на рис. 61, когда кривые Γ_a и Γ_1 пересекаются, что невозможно. Таким образом, $OA = -OC$.

Наоборот, предположим, что $OA = -OC$. Тогда кривая, симметричная дуге AC по отношению к началу координат, является дугой цикла, соединяющей точку A с точкой C налево от оси Oy . Вместе с дугой AC она образует замкнутый цикл.

Итак, для того чтобы Γ_a являлась замкнутым циклом, необходимо и достаточно, чтобы $OA = -OC$.

Так как, согласно обозначениям (10.2), $\lambda(0, y) = \frac{y^2}{2}$, то последнее условие можно сформулировать следующим образом.

Для того чтобы Γ_a являлась замкнутым циклом, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lambda(A) = \lambda(C). \quad (10.7)$$

Итак, покажем, что при выполнении условий, которым удовлетворяют функции $f(x)$ и $g(x)$, выполняется равенство (10.7) и, следовательно, уравнение (10.1) обладает предельным циклом.

Для доказательства будем рассматривать следующие криволинейные интегралы, взятые вдоль кривой Γ .

Положим

$$\varphi(\alpha) = \lambda(C) - \lambda(A) = \int_{ABC} d\lambda = \int_{ABC} F(x) dy. \tag{10.8}$$

Если $\alpha \leq a$ (см. рис. 59), то $dy < 0$, а также согласно четвертому условию (см. стр. 134) $F(x) < 0$ и, таким образом, $\varphi(\alpha) > 0$, т. е. $\lambda(C) > \lambda(A)$.

Следовательно, в этом случае Γ_α не может быть замкнутым циклом. (В этом случае $\int_{ABC} F(x) dy > 0$, т. е. энергия, рассеянная системой, положительна и, очевидно, в системе не могут осуществляться незатухающие колебания.)

Поэтому предположим, что $\alpha \geq a$, т. е. кривая Γ_α имеет такой вид, как на рис. 59. Обозначим:

$$\varphi_1(\alpha) = \int_{AD} d\lambda + \int_{CE} d\lambda, \quad \varphi_2(\alpha) = \int_{DBE} d\lambda;$$

тогда

$$\varphi(\alpha) = \varphi_1(\alpha) + \varphi_2(\alpha).$$

Согласно (10.4) и (10.6) мы можем написать:

$$d\lambda = F(x) \frac{dy}{dx} dx = - \frac{F(x)g(x)}{y - F(x)} dx. \tag{10.9}$$

Так как $F(x) < 0$ для $x < a$, то $d\lambda$ положительно, когда Γ_α описана в направлении от A к D или от E к C и, таким образом, $\varphi_1(\alpha) > 0$. Наоборот, вдоль DBE мы имеем $d\lambda < 0$ и, следовательно, $\varphi_2(\alpha) < 0$.

Очевидно, что при увеличении α дуга AD будет подниматься, а дуга CE опускаться и, таким образом, для фиксированного x будет увеличиваться $|y|$. Так как для $\varphi_1(\alpha)$ пределы интегрирования, принимая во внимание (10.9), фиксированы (от $x = 0$ до $x = a$), то в результате увеличения α $\varphi_1(\alpha)$ будет уменьшаться, так как $d\lambda = \frac{g(x)}{|F(x)| \pm 1} dx$

уменьшается при увеличении y .

Перейдем теперь к оценке характера изменения $\varphi_2(\alpha)$ при увеличении α . Пусть α_1 и α_2 — два последовательных значения α , причем $\alpha_2 > \alpha_1$. Покажем, что

$$\varphi_2'(\alpha_2) < \varphi_2(\alpha_1).$$

Проведем перпендикуляры $D_1D'_1$ и $E_1E'_1$ к прямой D_2E_2 (рис. 62). Тогда

$$\int_{D_2E_2} F(x) dy = \int_{D_2D'_1} F(x) dy + \int_{D'_1E'_1} F(x) dy + \int_{E'_1E_2} F(x) dy. \tag{10.10}$$

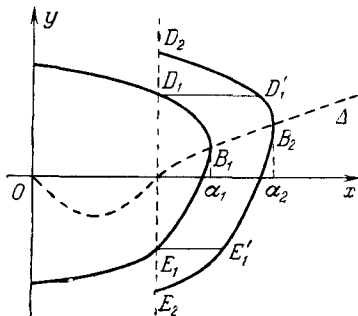


Рис. 62.

Так как при этом $F(x) > 0$, а $dy < 0$, то

$$\int_{D_2B_2E_2} F(x) dy < \int_{D'_1E'_1} F(x) dy. \quad (40.11)$$

По самому построению D'_1 и E'_1 мы видим, что y меняется на кривых $D_1B_1E_1$ и $D'_1E'_1$ в одинаковых пределах (от большего значения к меньшему).

С другой стороны, для данного y абсцисса x точки кривой $D'_1E'_1$ будет больше, чем для соответствующей точки кривой $D_1B_1E_1$.

Поэтому для данного y $F(x)$ на $D_1B_1E_1$ будет меньше, чем $F(x)$ на $D'_1E'_1$. Следовательно, поскольку $dy < 0$,

$$\int_{D'_1E'_1} F(x) dy < \int_{D_1B_1E_1} F(x) dy, \quad (40.12)$$

и из (40.11) найдем:

$$\int_{D_2B_2E_2} F(x) dy < \int_{D_1B_1E_1} F(x) dy, \quad (40.13)$$

т. е. действительно $\varphi_2(\alpha_2) < \varphi_2(\alpha_1)$ при $\alpha_2 > \alpha_1$.

Таким образом, $\varphi(\alpha) = \varphi_1(\alpha) + \varphi_2(\alpha)$ при $\alpha \geq 0$ является монотонно убывающей функцией α .

Заметим, что в случае $\alpha \leq a$ имеем:

$$\varphi(\alpha) = \varphi_1(\alpha) > 0.$$

Покажем теперь, что

$$-\varphi_2(\alpha) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \alpha \rightarrow \infty.$$

Фиксируем для этого какое-либо x_1 так, чтобы

$$a < x_1 < \alpha,$$

и проведем ось PP' параллельно оси Oy через точку x_1 на оси Ox (рис. 59).

Имеем:

$$\int_{DBE} d\lambda < \int_{PB\bar{P}} d\lambda = \int_{PB\bar{P}_1} F(x) dy. \quad (40.14)$$

Но для дуги PBP_1 имеем $x \geq x_1$ и, следовательно,

$$F(x) \geq F(x_1).$$

Найдем поэтому

$$\int_{DBE} d\lambda \leq F(x_1) \int_{PB\bar{P}_1} dy = -F(x_1) |\overline{PP_1}|,$$

откуда

$$-\varphi_2(\alpha) = - \int_{DBE} d\lambda > \overline{KL} \cdot \overline{KP}. \quad (40.15)$$

Но ясно, что отрезки \overline{KP} и \overline{KL} могут быть взяты сколь угодно большими при достаточно больших α .

Итак, действительно,

$$-\varphi_2(\alpha) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \alpha \rightarrow \infty.$$

Таким образом, мы показали, что $\varphi(\alpha)$ является монотонно убывающей функцией от значений $\varphi(\alpha) > 0$ до $\varphi(\alpha) = -\infty$ при $\alpha \rightarrow \infty$. Следовательно, $\varphi(\alpha)$ обращается в нуль один и только один раз для $\alpha = \alpha_0$, а Γ_{α_0} будет искома единственная замкнутая характеристика, так как для нее выполняется условие (10.7).

Покажем теперь, что Γ_{α_0} будет устойчивым предельным циклом.

Если $\alpha < \alpha_0$, то $\varphi(\alpha) > 0$ и, следовательно, $\lambda(C) > \lambda(A)$.

Если $\alpha > \alpha_0$, то $\varphi(\alpha) < 0$ и, следовательно, $\lambda(C) < \lambda(A)$.

Пусть точки A_0 и C_0 соответствуют пересечению Γ_{α_0} с осью y ; тогда очевидно, что точка C ближе к Γ_{α_0} , чем точка A , если $\alpha < \alpha_0$, и, следовательно, точка A' ближе к Γ_{α_0} , чем A .

Проводя аналогичные рассуждения для случая $\alpha > \alpha_0$, приходим к заключению об устойчивости предельного цикла Γ_{α_0} .

Перейдем теперь к изложению метода фактического построения интегральных кривых на фазовой плоскости.

Графическим методом Льенара обычно пользуются тогда, когда упругая сила $g(x)$ линейна относительно x ; при этом соответствующим выбором новых переменных можно, не нарушая общности, привести уравнение (10.6) к виду

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y - F(x)}. \tag{10.16}$$

Метод графического интегрирования уравнений типа (10.16), предложенный Льенаром, состоит в следующем. На фазовой плоскости строим кривую Δ , уравнение которой

$$y - F(x) = 0 \tag{10.17}$$

(рис. 63).

Построив эту кривую, мы можем графически найти направление касательной к интегральной кривой уравнения (10.16), проходящей через любую точку фазовой плоскости. Для этого из точки $M(x, y)$, для которой мы ищем направление касательной, опускаем перпендикуляр на ось абсцисс \overline{MC} и продолжаем его до пересечения с кривой Δ в точке D . Из точки D опускаем перпендикуляр на ось ординат \overline{DN} . Тогда линия \overline{NM} будет перпендикулярна к интегральной кривой уравнения (10.16), проходящей через точку M . Действительно, если фазовая точка уравнения (10.16) в момент $t=0$ совпадает с точкой $M(x, y)$, то спустя отрезок времени dt она переместится вдоль оси ординат на отрезок

$$dy = -x dt = \overline{ND} dt = \overline{MC}' ,$$

а вдоль оси абсцисс на отрезок

$$dx = (y - F(x)) dt = \overline{MD} dt = \overline{C'M}' .$$

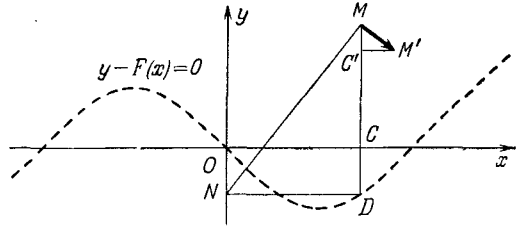


Рис. 63.

Так как треугольники NDM и $MC'M'$ подобны, то

$$\frac{\overline{MC'}}{\overline{ND}} = \frac{\overline{C'M'}}{\overline{DM}} = \frac{\overline{M'M}}{\overline{MN}}$$

и, следовательно, $\overline{M'M} \perp \overline{MN}$.

Таким образом, для того чтобы через данную точку $M(x, y)$ в плоскости x, y провести касательную к интегральной кривой Γ , проходящей через эту точку $M(x, y)$, достаточно провести вертикальную прямую MCD , горизонтальную прямую DN и соединить точки N и M . Искомая касательная к кривой Γ будет перпендикулярна к прямой NM , откуда следует, что, имея произвольную кривую Δ и произвольные начальные условия x_0, y_0 , изображаемые точкой $M_0(x_0, y_0)$, легко найти направление касательных и, следовательно, построить приближенную интегральную кривую.

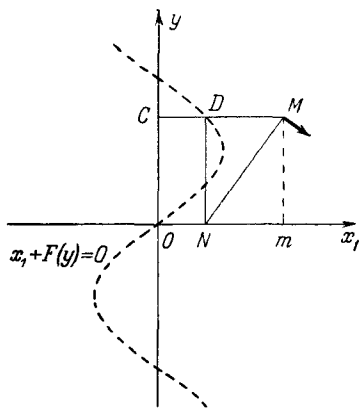


Рис. 64.

Итак, для построения интегральной кривой Γ , проходящей через заданную точку фазовой плоскости $M(x, y)$, поступаем следующим образом. При помощи описанного построения находим касательную в данной точке и заменяем интегральную кривую в окрестности этой точки небольшим отрезком касательной, затем в конце полученного отрезка опять определяем направление касательной и в окрестности новой точки заменяем интегральную кривую отрезком прямой. В результате получается приближенная интегральная кривая в виде ломаной линии, причем степень точности будет зависеть от величины отдельных звеньев.

Во многих случаях для преобразования уравнения (10.1) вместо замены переменных (10.3) удобно произвести замену согласно формуле

$$x_1 = \int x^* dt$$

и рассматривать уравнение в виде

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + F\left(\frac{dx_1}{dt}\right) + x_1 = 0 \quad (10.18)$$

или, обозначая $\frac{dx_1}{dt} = y$ и исключая время t ,

$$y \frac{dy}{dx_1} + F(y) + x_1 = 0. \quad (10.19)$$

В этом случае уравнение вспомогательной кривой будет:

$$x_1 + F(y) = 0, \quad (10.20)$$

на фазовой плоскости мы получаем построение, приведенное на рис. 64. Опуская из точки M перпендикуляры на оси абсцисс Mm и ординат MC , а также опуская перпендикуляр из точки D на ось абсцисс, находим согласно уравнению (10.19):

$$\overline{Nm} = -y \frac{dy}{dx_1}, \quad (10.21)$$

и, следовательно, уравнение (10.19) может быть записано в виде

$$\overline{Nm} = \overline{CM} - \overline{CD}, \quad (10.22)$$

так как $\overline{CM} = x_1$, $\overline{CD} = -F(y)$.

Итак, и в этом случае можем провести построение приближенных интегральных кривых согласно изложенной выше схеме.

Если кривая Δ симметрична относительно начала координат, то построенные таким образом интегральные кривые Γ будут навиваться на замкнутые кривые — предельные циклы, соответствующие периодическому режиму, существование и устойчивость которых были доказаны выше.

Заметим, что графическое построение, предложенное Льенаром, не предполагает обязательной симметрии кривой Δ . Этот графический прием применим также в случае, если Δ более или менее близка к симметричной кривой, например к кривой, определяемой характеристикой неоновой лампы и т. д. При этом кривая Δ не должна обязательно изображаться каким-либо алгебраическим уравнением. Эта кривая может быть получена экспериментально; последнее очень важно с практической точки зрения.

Приведем некоторые примеры, иллюстрирующие описанное графическое построение интегральных кривых.

Заметим, что для некоторых частных случаев построение Льенара сразу дает интегральную кривую и необходимость в построении приближенной ломаной отпадает.

Например, в случае свободных линейных колебаний, описываемых уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0, \quad (10.23)$$

уравнение фазовых траекторий будет:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}. \quad (10.24)$$

В данном случае уравнение кривой Δ будет $x=0$, и тогда точка N совпадает с началом координат для всех задаваемых значений точки D . Следовательно, интегральными кривыми будут окружности с центром в начале координат.

Если колебания системы происходят под воздействием линейной упругой силы при наличии кулонова трения, уравнение движения может быть представлено в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + A \operatorname{sign} \frac{dx}{dt} + x = 0. \quad (10.25)$$

В этом случае для кривой Δ получаем следующее уравнение:

$$\left. \begin{aligned} x = A & \quad \text{при} \quad \frac{dx}{dt} > 0, \\ x = -A & \quad \text{при} \quad \frac{dx}{dt} < 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.26)$$

Очевидно, что для интегральной кривой Γ в верхней полуплоскости точка N совпадает с точкой S_1 , а в нижней полуплоскости — с точкой S_2

(рис. 65) независимо от задаваемых значений точки D . Таким образом, интегральная кривая Γ будет состоять из дуг окружностей с центрами в точках S_1 и S_2 ; эти дуги переходят друг в друга при пересечении интегральной кривой с осью Ox . При этом очевидно, что амплитуда затухающих колебаний уменьшается на величину $2A$ при каждом

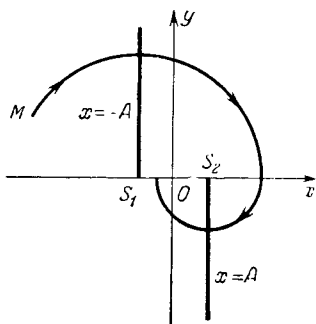


Рис. 65.

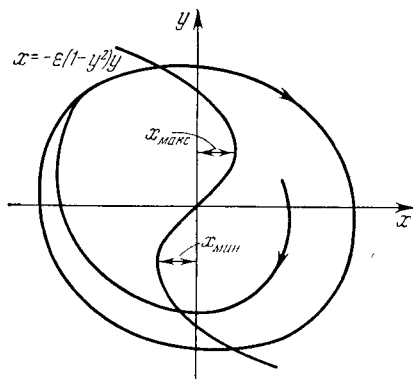


Рис. 66.

прохождении между двумя последовательными положениями покоя $y = 0$ до тех пор, пока колебательная система окончательно не приходит в состояние покоя.

Проинтегрируем теперь методом Льенара уравнение Ван-дер-Поля, причем возьмем его в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon \left(1 - \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right) \frac{dx}{dt} + x = 0. \quad (10.27)$$

Уравнение кривой Δ на фазовой плоскости будет:

$$x - \varepsilon (1 - y^2) y = 0, \quad (10.28)$$

где ε — некоторый параметр.

Свойства функции $-\varepsilon(1 - y^2)y$ следующие:

- 1) при $y = 0$ и $y = \pm 1$ $x = 0$;
- 2) при $y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ x принимает экстремальные значения:

$$x = \pm \frac{2\varepsilon}{\sqrt{3}}$$

(рис. 66).

Согласно этому при увеличении ε петля будет вытягиваться вдоль оси x , приближаясь к паре прямых $y = \pm 1$ (рис. 67).

В случае, когда $\varepsilon = 0$, интегральные кривые уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varepsilon(1 - y^2)y - x}{y} \quad (10.29)$$

образуют семейство концентрических окружностей с центром в начале координат, и тогда это уравнение будет соответствовать простым гармоническим колебаниям.

При $\varepsilon \neq 0$ исследование поведения интегральных кривых уравнения (10.27) проводим, пользуясь графическим методом Льенара. Согласно этому методу для кривой (10.28) строим поле направлений и находим предель-

ные циклы. На рис. 67 приведены кривые (10.28), построенные соответственно для трех различных значений: $\varepsilon=0,1$; $\varepsilon=1$ и $\varepsilon=10$. На этих же рисунках по методу Льенара построены предельные циклы системы. Как известно, в рассматриваемом случае $\varepsilon > 0$ начало координат является неустойчивым положением равновесия, все интегральные кривые, выходящие из начала координат, будут описывать вокруг него расширяющиеся спирали. Однако раскручивающиеся около начала координат спирали не могут простирается неопределенно далеко, так как для больших значений y затухание в колебательной системе, описываемой уравнением (10.27), становится положительным.

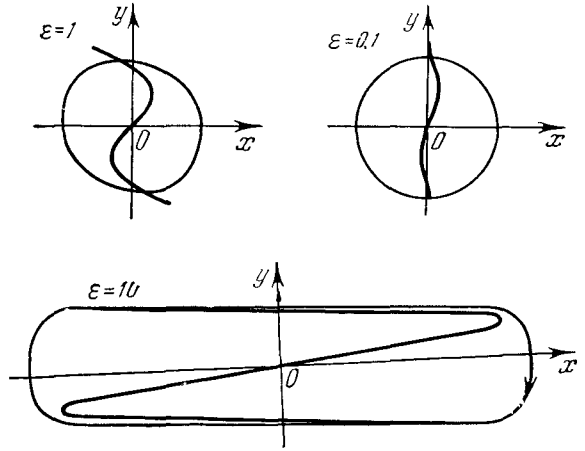


Рис. 67.

При расширении каждой спирали ее последовательные витки все более и более сближаются друг с другом и все спирали асимптотически навиваются изнутри на замкнутую кривую — предельный цикл.

На этот предельный цикл будут навиваться как спирали, близкие к началу координат, так и спирали, удаленные от начала. Замкнутая

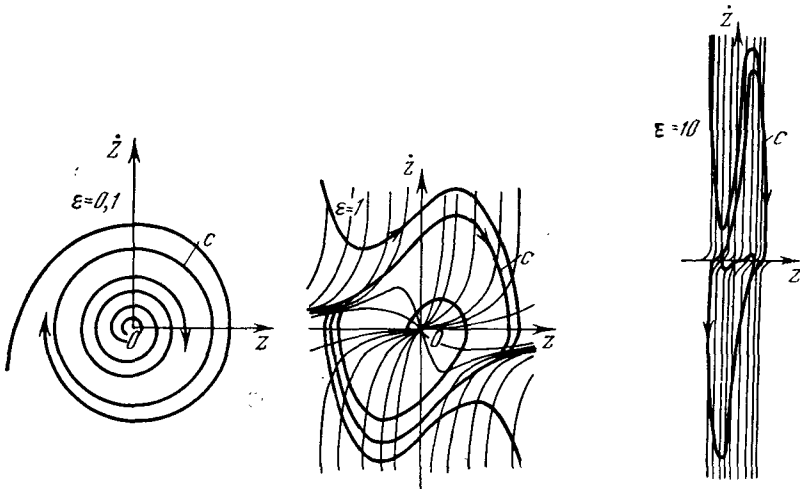


Рис. 68.

интегральная кривая — предельный цикл, к которой стремятся все интегральные кривые уравнения (10.29), соответствует периодическому решению уравнения (10.27).

Заметим, что замкнутый цикл содержит внутри одну особую точку с индексом $+1$, причем для $\varepsilon=0,1$ и $\varepsilon=1,0$ эта точка является неустойчивым фокусом, для $\varepsilon=10$ мы имеем неустойчивый узел.

Исходя из рис. 67, можно судить о том, как изменяется характер движения в системе при изменении параметра ε . При любых ε в системе происходят автоколебания, но размах и форма этих автоколебаний и характер их установления различны. На рис. 68 для сопоставления приве-

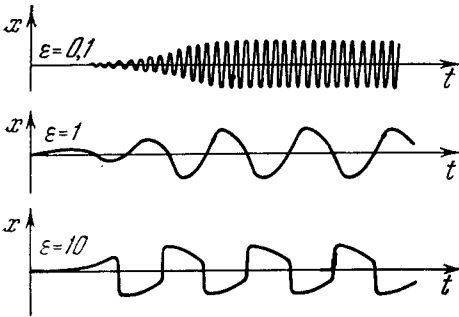


Рис. 69.

дены нами результаты численного интегрирования непосредственно уравнения (10.29) соответственно при тех же значениях параметра ε , а также кривые, характеризующие непосредственно изменение x со временем (рис. 69).

В заключение заметим, что Ренсуки-Усуи*), комбинируя метод Льенара (подробно разработанный автором для случая симметричной характеристики) и метод Кирштейна (чрезвычайно затруднительный для практических применений), разработал стандартный графический метод решения нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих процессы в самовозбуждающихся системах. Разработанный им метод может быть применен для рассмотрения колебательных процессов в сложных контурах, а также в связанных контурах.

Однако на этом методе мы здесь не будем останавливаться, отсылая интересующихся к соответствующей специальной литературе.

§ 11. Релаксационные колебательные системы

До сих пор мы рассматривали уравнение Ван-дер-Поля в основном при малом ε и только в § 9 указали на те изменения, которые происходят в решении при возрастании ε .

Рассмотрим теперь уравнение Ван-дер-Поля при больших ε и, в частности, попытаемся найти асимптотическую форму решения при $\varepsilon \rightarrow \infty$.

Для исследования удобно взять уравнение Ван-дер-Поля в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon \left[\frac{dx}{dt} - \frac{1}{3} \left(\frac{dx}{dt} \right)^3 \right] + x = 0 \quad (11.1)$$

и добиться того, чтобы перед второй производной стоял малый параметр.

Полагая в уравнении (11.1)

$$\left. \begin{aligned} x &= \varepsilon \eta, \\ t &= \varepsilon t_1, \end{aligned} \right\} \quad (11.2)$$

получаем

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d^2\eta}{dt_1^2} - \left[\frac{d\eta}{dt_1} - \frac{1}{3} \left(\frac{d\eta}{dt_1} \right)^3 \right] + \eta = 0 \quad (11.3)$$

или

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d\dot{\eta}}{d\eta} = \frac{\dot{\eta} - \frac{1}{3} \dot{\eta}^3 - \eta}{\dot{\eta}}. \quad (11.4)$$

*) Р е н с у к и - У с у и, Нелинейная теория электрических генераторов, Report of Radio Research in Japan, vol. V, № 2, 1935.