

Исходя из рис. 67, можно судить о том, как изменяется характер движения в системе при изменении параметра  $\varepsilon$ . При любых  $\varepsilon$  в системе происходят автоколебания, но размах и форма этих автоколебаний и характер их установления различны. На рис. 68 для сопоставления приве-

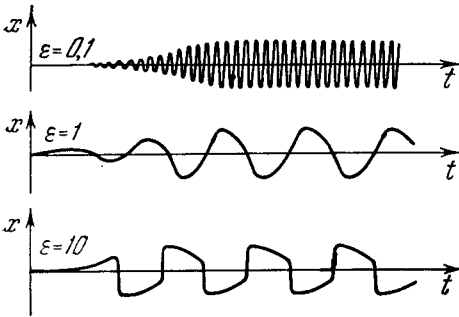


Рис. 69.

дены нами результаты численного интегрирования непосредственно уравнения (10.29) соответственно при тех же значениях параметра  $\varepsilon$ , а также кривые, характеризующие непосредственно изменение  $x$  со временем (рис. 69).

В заключение заметим, что Ренсуки-Усуи\*), комбинируя метод Льенара (подробно разработанный автором для случая симметричной характеристики) и метод Кирштейна (чрезвычайно затруднительный для практических применений), разработал стандартный графический метод решения нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих процессы в самовозбуждающихся системах. Разработанный им метод может быть применен для рассмотрения колебательных процессов в сложных контурах, а также в связанных контурах.

Однако на этом методе мы здесь не будем останавливаться, отсылая интересующихся к соответствующей специальной литературе.

## § 11. Релаксационные колебательные системы

До сих пор мы рассматривали уравнение Ван-дер-Поля в основном при малом  $\varepsilon$  и только в § 9 указали на те изменения, которые происходят в решении при возрастании  $\varepsilon$ .

Рассмотрим теперь уравнение Ван-дер-Поля при больших  $\varepsilon$  и, в частности, попытаемся найти асимптотическую форму решения при  $\varepsilon \rightarrow \infty$ .

Для исследования удобно взять уравнение Ван-дер-Поля в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon \left[ \frac{dx}{dt} - \frac{1}{3} \left( \frac{dx}{dt} \right)^3 \right] + x = 0 \quad (11.1)$$

и добиться того, чтобы перед второй производной стоял малый параметр.

Полагая в уравнении (11.1)

$$\left. \begin{aligned} x &= \varepsilon \eta, \\ t &= \varepsilon t_1, \end{aligned} \right\} \quad (11.2)$$

получаем

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d^2\eta}{dt_1^2} - \left[ \frac{d\eta}{dt_1} - \frac{1}{3} \left( \frac{d\eta}{dt_1} \right)^3 \right] + \eta = 0 \quad (11.3)$$

или

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d\dot{\eta}}{d\eta} = \frac{\dot{\eta} - \frac{1}{3} \dot{\eta}^3 - \eta}{\dot{\eta}}. \quad (11.4)$$

\*) Р е н с у к и - У с у и, Нелинейная теория электрических генераторов, Report of Radio Research in Japan, vol. V, № 2, 1935.

При  $\varepsilon \gg 1$  можем в уравнении (11.4) в первом приближении пренебречь слагаемым  $\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d\dot{\eta}}{d\eta}$ , после чего получим зависимость между  $\eta$  и  $\dot{\eta}$ :

$$\dot{\eta} - \frac{1}{3} \dot{\eta}^3 - \eta, \quad (11.5)$$

при помощи которой не представляет затруднений исследовать характер движения на фазовой плоскости.

Построим кривую (11.5) (рис. 70) и заметим, что согласно (11.4) на кривой (11.5) поле направлений горизонтально, так как  $\frac{d\dot{\eta}}{d\eta} = 0$  для всех  $\eta$  и  $\dot{\eta}$ , удовлетворяющих уравнению (11.5). В остальных же точках фазовой плоскости (за исключением точек, очень близких к кривой (11.5)) при  $\varepsilon \rightarrow \infty$  поле направлений стремится к вертикальному, так как

согласно (11.4)  $\frac{d\dot{\eta}}{d\eta} \rightarrow \infty$  при  $\varepsilon \rightarrow \infty$  для всех точек, не удовлетворяющих уравнению (11.5). Исходя из этого, видим, что при больших значениях  $\varepsilon$  интегральная кривая уравнения (11.4), выходящая из произвольной точки  $P$  (см. рис. 70), будет очень близка к вертикальной прямой почти до точки  $P_1$ , лежащей на кривой (11.5). Далее интегральная кривая пойдет вдоль кривой (11.5), оставаясь ниже ее, пока не достигнет окрестности точки  $P_2$ , после чего пойдет вертикально вверх до тех пор, пока вновь не достигнет кривой (11.5). Затем интегральная кривая будет следовать вдоль кривой (11.5), оставаясь над ней; достигнув точки  $P_4$ , интегральная кривая повернется вертикально вниз. В результате мы получаем предельный цикл, который при  $\varepsilon \rightarrow \infty$  будет иметь вид, изображенный на рис. 70.

Таковую картину мы получаем вследствие того, что участки  $P_3P_4$  и  $P_2P_5$  кривой (11.5) обладают свойством притяжения, причем чем больше  $\varepsilon$ , тем сильнее будет притяжение. Так как в любой точке поле направлений вертикально, а на кривой (11.5) горизонтально, то любая точка стремится к кривой (11.5), подойдя к ней, отходит, так как на кривой поле направлений горизонтально, после этого точка снова стремится приблизиться к кривой (11.5). Если  $\varepsilon$  достаточно велико, то указанных отклонений мы не заметим и практически получим картину, изображенную на рис. 70.

Асимптотическое значение для периода колебаний в рассматриваемом приближении находим, подсчитывая интеграл по предельному циклу. Для уравнения (11.4) имеем:

$$dt_1 = \frac{d\eta}{\dot{\eta}}, \quad (11.6)$$

откуда

$$T_1 = \oint \frac{d\eta}{\dot{\eta}}, \quad (11.7)$$

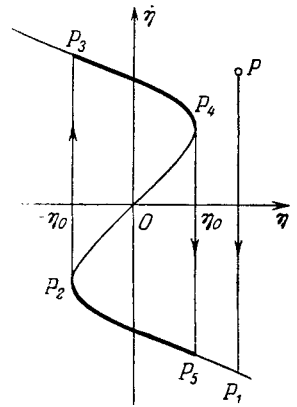


Рис. 70.

Так как на вертикальных участках цикла  $d\eta = 0$ , то вместо (11.7) можем написать:

$$T_1 = 2 \int_{\dot{\eta}_1}^{\dot{\eta}_2} \frac{d\left(\dot{\eta} - \frac{1}{3} \dot{\eta}^3\right)}{\dot{\eta}} = 2 \left( \ln \dot{\eta} - \frac{1}{2} \dot{\eta}^2 \right) \Big|_{\dot{\eta}_1}^{\dot{\eta}_2}. \quad (11.8)$$

Согласно (11.5) находим  $\dot{\eta}_1 = 1$ ,  $\dot{\eta}_2 = 2$  и, следовательно, для периода  $T_1$  при больших значениях  $\varepsilon$  получаем формулу

$$T_1 = 1,614 \quad (11.9)$$

или, переходя к старым переменным, следующую асимптотическую формулу:

$$T = 1,614 \varepsilon. \quad (11.10)$$

Итак, для случая  $\varepsilon \gg 1$  при асимптотической трактовке колебательный процесс будет протекать следующим образом: при возрастании  $\eta$ , начиная от значений  $-\eta_0$ , скорость  $\dot{\eta}$  будет положительна и изображающая точка на фазовой плоскости будет двигаться по кривой  $P_3P_4$  (см. рис. 70). Когда  $\eta$  достигнет максимального значения  $+\eta_0$ , изображающая точка скачком

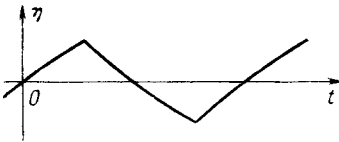


Рис. 71.

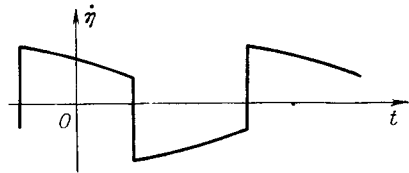


Рис. 72.

перейдет из положения  $P_4$  в  $P_5$ , что соответствует мгновенному изменению знака скорости  $\dot{\eta}$ . Далее, при уменьшении  $\eta$  скорость  $\dot{\eta}$  будет оставаться отрицательной и изображающая точка будет двигаться по кривой  $P_5P_2$ . В точке  $P_2$  опять произойдет изменение знака скорости, а изображающая точка на фазовой плоскости скачком перейдет в положение  $P_3$ .

Таким образом, в течение одного периода колебания скорость  $\dot{\eta}$  терпит разрыв дважды — в моменты достижения величиной  $\eta$  максимального и минимального значения. Разумеется, на самом деле скорость непрерывна, хотя и меняется весьма быстро, так как  $\varepsilon$  хотя и велико, но конечно, и, говоря о разрыве, мы допускаем определенное упрощение, соответствующее принятому нами асимптотическому приближению.

После того как нами получена зависимость скорости от смещения на фазовой плоскости и найден период колебания, не представляет затруднений построить кривые, представляющие  $\eta$  и  $\dot{\eta}$  как функции  $t$  (рис. 71 и 72).

Рассмотренные нами колебания называются релаксационными и имеют широкое распространение в природе.

Приведенная здесь идеализированная разрывная трактовка уравнения Ван-дер-Поля при больших  $\varepsilon$  может быть применена и в общем случае при исследовании нелинейных колебательных систем при  $\varepsilon \gg 1$ . При такой трактовке мы пренебрегаем в уравнении инерционным членом, в результате чего релаксационные колебания характеризуются дифференциальным уравнением первого порядка

$$F\left(\frac{dx}{dt}\right) + x = 0, \quad (11.11)$$

причем последнее удобно обратить относительно  $\frac{dx}{dt}$  и написать в виде

$$\frac{dx}{dt} = \Phi(x), \quad (11.12)$$

где  $\Phi(x)$  представляет определенную многозначную функцию типа, схематически изображенного на рис. 74.

Приведем еще пример конкретной релаксационной колебательной системы, описываемой уравнением типа (11.12).

Рассмотрим схему (рис. 73), представляющую последовательное соединение самоиндукции  $L$ , сопротивления  $R$  и нелинейного элемента с вольт-амперной характеристикой типа «S», замкнутое на источнике постоянного напряжения  $E_a$ . Здесь для элемента «S» вольтамперная характеристика

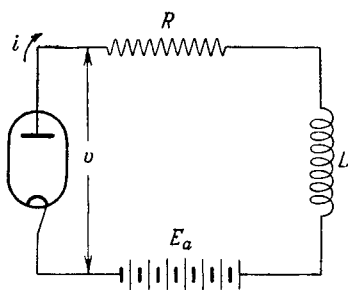


Рис. 73.

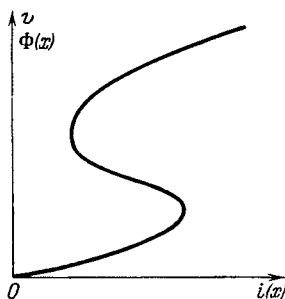


Рис. 74.

имеет форму, примерно изображенную на рис. 74. В качестве конкретной модели такого нелинейного элемента можно взять, например, электронную лампу в динаatronном режиме.

Составляя для рассматриваемой схемы баланс напряжений, приходим к дифференциальному уравнению вида

$$L \frac{di}{dt} + Ri + v = E_a. \quad (11.13)$$

Заметим теперь, что поскольку единственным резервуаром, способным запастись энергией колебаний, является в нашей системе самоиндукция, то запасенная в ней энергия будет равна  $\frac{1}{2} Li^2$ . Так как в течение колебательного процесса энергия должна изменяться непрерывно, то очевидно, что и величина тока  $i$  должна также изменяться непрерывно, плавно увеличиваясь и уменьшаясь.

С другой стороны, в соответствии с рис. 74 нетрудно убедиться, что при плавном увеличении и соответственно при плавном уменьшении тока  $i$  напряжение  $v$  будет изменяться, как указано на рис. 75. Обозначим зависимость между напряжением и током, представленную графически на этом рисунке (причем учитываем только отрезки сплошной линии), функциональным соотношением

$$v = f_1(i), \quad (11.14)$$

в котором  $f_1(i)$  имеет два значения для  $i$ , изменяющегося в интервале  $(i_0, i_1)$ .

Пусть параметры генератора подобраны так, что в интервале  $(i_0, i_1)$  значения функции

$$\Phi(i) = \frac{E_a - Ri - f(i)}{L}, \quad (11.15)$$

соответствующие нижней ветви  $f(i)$ , положительны, а для верхней ветви отрицательны. Тогда в нашей схеме возбуждается релаксационный колебательный процесс, при котором ток  $i$  будет изменяться в пределах от  $i_0$  до  $i_1$ . Дифференциальное уравнение, описывающее колебательный процесс, будет принадлежать к типу (11.12).

Как видно, в данном примере мы не довели дело до построения

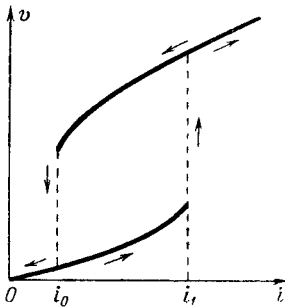


Рис. 75.

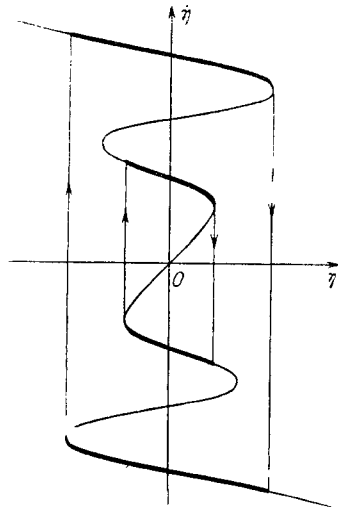


Рис. 76.

дифференциального уравнения второго порядка, а сразу приняли схему, которая привела к разрывному уравнению вида (11.12), в котором не принимается во внимание инерционный член.

До сих пор рассматривался случай наличия одного замкнутого цикла. Если кривая, характеризующая зависимость (11.12), будет иметь вид, изображенный на рис. 76, то получим два замкнутых цикла.

Заметим, что рассмотренные релаксационные колебательные процессы протекают без внешних периодических сил, и потому естественно уравнение (11.12) называть уравнением свободных релаксационных колебаний.

Изложенная здесь разрывная трактовка релаксационных колебательных процессов интуитивно убедительна.

Однако если мы хотим ее строго обосновать или вычислить соответствующие поправки для формы колебаний и их периода  $T$ , то необходимо обратиться к строгому методу асимптотического приближения, разработанному А. А. Дородницыным.

## § 12. Метод А. А. Дородницына для уравнения Ван-дер-Поля

В настоящем параграфе приведем метод, разработанный А. А. Дородницыным [15], при помощи которого можно построить интегральные кривые на фазовой плоскости в случае  $\varepsilon \gg 1$ .

Суть этого метода заключается во введении некоторых «связующих» областей и в построении для этих перекрещивающихся областей особых асимптотических разложений по степеням  $\frac{1}{\varepsilon}$ .