

Пусть параметры генератора подобраны так, что в интервале (i_0, i_1) значения функции

$$\Phi(i) = \frac{E_a - Ri - f(i)}{L}, \quad (11.15)$$

соответствующие нижней ветви $f(i)$, положительны, а для верхней ветви отрицательны. Тогда в нашей схеме возбуждается релаксационный колебательный процесс, при котором ток i будет изменяться в пределах от i_0 до i_1 . Дифференциальное уравнение, описывающее колебательный процесс, будет принадлежать к типу (11.12).

Как видно, в данном примере мы не довели дело до построения

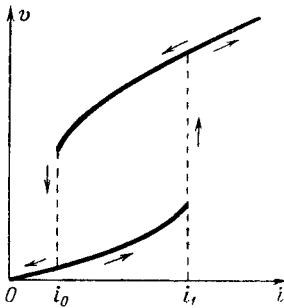


Рис. 75.

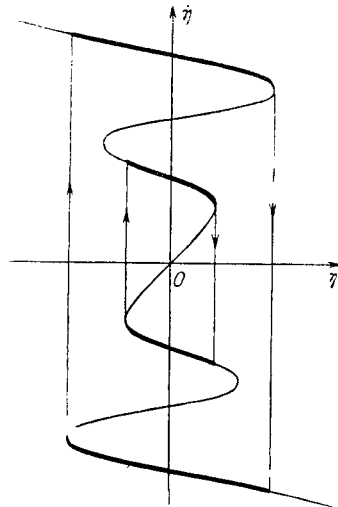


Рис. 76.

дифференциального уравнения второго порядка, а сразу приняли схему, которая привела к разрывному уравнению вида (11.12), в котором не принимается во внимание инерционный член.

До сих пор рассматривался случай наличия одного замкнутого цикла. Если кривая, характеризующая зависимость (11.12), будет иметь вид, изображенный на рис. 76, то получим два замкнутых цикла.

Заметим, что рассмотренные релаксационные колебательные процессы протекают без внешних периодических сил, и потому естественно уравнение (11.12) называть уравнением свободных релаксационных колебаний.

Изложенная здесь разрывная трактовка релаксационных колебательных процессов интуитивно убедительна.

Однако если мы хотим ее строго обосновать или вычислить соответствующие поправки для формы колебаний и их периода T , то необходимо обратиться к строгому методу асимптотического приближения, разработанному А. А. Дородницыным.

§ 12. Метод А. А. Дородницына для уравнения Ван-дер-Поля

В настоящем параграфе приведем метод, разработанный А. А. Дородницыным [15], при помощи которого можно построить интегральные кривые на фазовой плоскости в случае $\varepsilon \gg 1$.

Суть этого метода заключается во введении некоторых «связующих» областей и в построении для этих перекрещивающихся областей особых асимптотических разложений по степеням $\frac{1}{\varepsilon}$.

Для наглядности применения этого метода приведем согласно А. А. Дородницыну решение уравнения Ван-дер-Поля

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon(1-x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (12.1)$$

при больших значениях параметра ε *).

На фазовой плоскости (x, y) , где $y = \frac{dx}{dt}$, это уравнение преобразуется к следующему виду:

$$y \frac{dy}{dx} - \varepsilon(1-x^2)y + x = 0. \quad (12.2)$$

Как известно, предельный цикл для уравнения (12.2) имеет вид, приведенный на рис. 77.

При больших значениях параметра ε решение уравнения (12.2) в областях *I* и *III* стремится соответственно к решениям «укороченных» уравнений

$$y \frac{dy}{dx} - \varepsilon(1-x^2)y = 0, \quad (12.3)$$

$$-\varepsilon(1-x^2)y + x = 0. \quad (12.4)$$

Однако области *I* и *III*, в которых можно рассматривать вместо уравнения (12.2) соответственно уравнения (12.3) и (12.4), не соприкасаются между собой, и поэтому решения этих уравнений нельзя сопрячь, так как неизвестно, как выбрать постоянную интегрирования в уравнении (12.3), чтобы при аналитическом продолжении решения в область *III* это решение перешло в то, которое стремится к решению уравнения (12.4).

Для того чтобы можно было произвести такое сопряжение решений, вводят две «связующие» области *II* и *IV*, для которых строят асимптотические решения непосредственно уравнения (12.2), так как в этих областях мы не можем воспользоваться «укороченными» уравнениями. Области *I*, *II*, *III* и *IV* перекрываются между собой, и поэтому мы можем найти решение для всего цикла с точностью до величин любого порядка малости относительно $\frac{1}{\varepsilon}$.

Приступим к построению асимптотических решений уравнения (12.2) для введенных областей (см. рис. 77). При этом заметим, что ввиду симметрии можно рассматривать только одну часть каждой из введенных областей.

Построим сначала решение для области *I*. Для этого обозначим через a_1 и a_2 значения x , при которых $\frac{dx}{dt} = 0$ (для предельного цикла

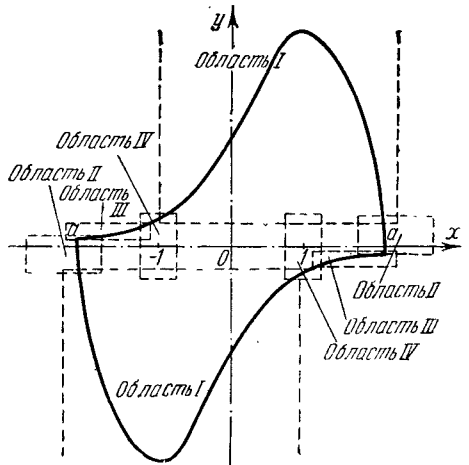


Рис. 77.

*) Заметим, что В. В. Казакевичем («О приближенном интегрировании уравнения Ван-дер-Поля», ДАН СССР, XLIX, 6, 1945) разработан интересный прием исследования уравнения (12.1).

$a_1 = a_2 = a$); тогда область I определится следующими неравенствами:

$$\left. \begin{aligned} -1 + \nu < x < a_1 - \nu, \quad y > 0, \quad \nu > 0; \\ -a_2 + \nu < x < 1 - \nu, \quad y < 0, \quad \nu > 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.5)$$

Как указывалось выше, решение достаточно искать только для первой части области (12.5). Решение ищем в виде ряда

$$y = \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{-2n} f_n(x). \quad (12.6)$$

Подставляя значение y (12.6) в уравнение (12.3) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем систему уравнений, из которой находим последовательно все $f_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Так, для первых двух функций имеем:

$$f_0(x) = c + x - \frac{1}{3}x^3, \quad (12.7)$$

$$f_1(x) = \frac{x_1}{x_1^2 - 1} \left[\ln \left(1 - \frac{x}{x_1} \right) - \frac{1}{2} \ln \frac{(2x + x_1)^2 + 3(x_1^2 - 4)}{4(x_1^2 - 3)} \right] + \\ + \frac{x_1^2 - 2}{x_1^2 - 1} \sqrt{\frac{3}{x_1^2 - 4}} \left[\operatorname{arctg} \frac{2x + x_1}{\sqrt{3(x_1^2 - 4)}} - \operatorname{arctg} \frac{x_1}{\sqrt{3(x_1^2 - 4)}} \right], \quad (12.8)$$

где через x_1 обозначен вещественный положительный корень уравнения $f_0(x) = 0$, причем предполагается, что $c > \frac{2}{3}$, что и имеет место для предельного цикла. Функции $f_n(x)$ имеют особенности в окрестности точки $x = x_1$, однако ряд (12.6) сохраняет асимптотический характер до значений x , удовлетворяющих условию

$$O(x_1 - x) > O\left(\frac{\ln \varepsilon}{\varepsilon^2}\right).$$

В частности, ряд (12.6) является асимптотическим рядом при $x = x_1 - O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$; при этом y будет порядка единицы.

Найдем теперь асимптотическое решение для области II , являющейся окрестностью точек $y = 0$, $x = a_1$; $y = 0$, $x = -a_2$. Для определенности будем рассматривать ту часть области II , для которой $y = 0$, $x = a_1$.

Введем новую переменную z по формуле $z = -\varepsilon y$ и будем искать x как функцию z . Уравнение (12.2) запишется следующим образом:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{z}{z(x^2 - 1) - x}. \quad (12.9)$$

Решение этого уравнения ищем в виде ряда

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(z) \varepsilon^{-2n}. \quad (12.10)$$

Подставляя значение x (12.10) в уравнение (12.9) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим систему уравнений для определения функций $\chi_n(z)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Для первых двух функций имеем:

$$\chi_1(z) = \frac{1}{a_1^2 - 1} \left[z + \frac{a_1}{a_1^2 - 1} \ln \left(1 - \frac{a_1^2 - 1}{a_1} z \right) \right], \quad (12.11)$$

$$\begin{aligned} \chi_2(z) = & \frac{a_1}{(a_1^2-1)^4} \left\{ (a_1^2-1) z \left(z + \frac{a_1^2+1}{a_1(a_1^2-1)} \right) + \right. \\ & + \left[\frac{a_1^2+1}{a_1^2-1} + 2a_1z - 2(a_1^2-1)z^2 \right] \frac{\ln \left[1 - \frac{z(a_1^2-1)}{a_1} \right]}{1 - z \frac{a_1^2-1}{a_1}} + \\ & \left. + \frac{3a_1^2+1}{2(a_1^2-1)} \ln^2 \left(1 - z \frac{a_1^2-1}{a_1} \right) \right\}. \quad (12.12) \end{aligned}$$

Эти функции имеют особенности при $z \rightarrow \frac{a_1}{a_1^2-1}$ и при $z \rightarrow -\infty$. Однако ряд (12.10) сохраняет асимптотический характер для всех z , удовлетворяющих условию

$$O\left(\frac{a_1}{a_1^2-1} - z\right) > O\left(\frac{\ln \varepsilon}{\varepsilon^2}\right),$$

а также в случае $z < 0$ для всех z , удовлетворяющих условию

$$O(z) < O(\varepsilon^2).$$

При этом асимптотическая сходимость ряда (12.10) имеет место при $z = -\varepsilon$, т. е. $y = 1$.

Так как ряды (12.6), (12.10) асимптотически сходятся при одинаковых значениях x , при которых $y = O(1)$, то можем их сопрячь. Для этого нужно определить постоянную a_1 по заданному значению постоянной c . Полагая в (12.6) и (12.10) $y = 1$, получаем следующие два уравнения с двумя неизвестными x^* и a_1 :

$$1 = \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x^*) \varepsilon^{-2n}, \quad x^* = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(-\varepsilon) \varepsilon^{-2n}. \quad (12.13)$$

Из первого уравнения находим x^* , после чего из второго уравнения находим a_1 , выраженное через c или через x_1 .

Перейдем теперь к определению решения для области III. Эта область определяется следующими интервалами:

$$\left. \begin{aligned} a_1 - \nu > x > 1 + \nu, \quad y < 0, \quad \nu > 0; \\ -a_2 + \nu < x < -1 - \nu, \quad y > 0, \quad \nu > 0, \end{aligned} \right\} \quad (12.14)$$

и имеет очень существенное значение для релаксационных колебаний. Когда x попадает в область (12.14), то колебания системы сразу же с большой степенью точности переходят к установившимся автоколебаниям.

Будем рассматривать ту часть области III, для которой $y < 0$.

Произведя ряд выкладок, легко показать, что решение уравнения (12.2) в этой области может быть получено в виде ряда

$$y = -\frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \varepsilon^{-2n}, \quad (12.15)$$

где $P_n(x)$ определяются, как и выше, из ряда рекуррентных уравнений и имеют вид

$$P_0(x) = \frac{x}{x^2-1}, \quad P_1(x) = -\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^4}, \dots \quad (12.16)$$

Ряд (12.15) сохраняет асимптотический характер при условии $O(x-1) > O(\varepsilon^{-2/3})$, причем при подходе к границе сходимости y (12.15) будет иметь порядок $\varepsilon^{-1/3}$.

Перейдем к определению решения в области *IV*. Эта область определяется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} 1 - \nu < x < 1 + \nu, \quad p < 0, \quad \nu > 0; \\ -1 - \nu < x < -1 + \nu, \quad p > 0, \quad \nu > 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.17)$$

Как показано выше, при подходе к границе области *III* y приближается к $O(\varepsilon^{-1/3})$. Поэтому естественно ввести замену переменных:

$$y = -\varepsilon^{-1/3}Q(u), \quad u = \varepsilon^{2/3}(x-1). \quad (12.18)$$

Тогда уравнение (12.2) примет следующий вид:

$$Q \frac{dQ}{du} - 2uQ + 1 = \varepsilon^{-2/3}(u^2Q - u). \quad (12.19)$$

Решение этого уравнения ищем опять в виде асимптотического ряда

$$Q(u) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(u) \varepsilon^{-2/3n}, \quad (12.20)$$

который подставляем в (12.19), и, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем ряд уравнений для последовательного определения функций $Q_n(u)$ ($n=0, 1, 2, \dots$). При этом начальные условия для $Q_n(u)$ должны определяться так, чтобы полученное решение было сопряжено с решением в области *III*.

После ряда выкладок находим:

$$Q_0(u) = u^2 + \alpha + \frac{1}{u} - \frac{\alpha}{3} - \frac{1}{u^3} - \frac{1}{4u^4} + \frac{\alpha}{5u^5} + \dots,$$

$$Q_1(u) = \frac{1}{A(u)} \left[C + \int_0^u A(u) \left(u^2 - \frac{u}{Q_0} \right) du \right],$$

$$A(u) = \exp \left(- \int_0^u \frac{du}{Q_0^2} \right), \quad (12.21)$$

где α — наименьший корень уравнения

$$J_{1/3} \left(\frac{2}{3} \tau^{3/2} \right) + J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} \tau^{3/2} \right) = 0.$$

Для сопряжения с решением y (12.15), определенным для области *III*, необходимо, чтобы величина $\varepsilon^{-2/3}Q_1(u)$ была ограниченной при $u = Q(\varepsilon^\nu)$.

Анализируя выражение для $Q_n(u)$, убеждаемся, что ряд (12.20) сохраняет асимптотический характер до значений u , ограниченных условием $Q(u) < Q(\varepsilon^{2/3})$, т. е. при значениях x , удовлетворяющих условию $O(x-1) < O(1)$, и, таким образом, области, в которых пригодны решения (12.20) и (12.15), перекрываются.

Теперь нам осталось сопрячь решения для областей *I* и *IV*. Для этого мы должны сопрячь решение (12.6) с решением (12.20), учитывая в последнем замену переменных (12.18).

Заметим, что так как $y > 0$ при $x = -1$, то постоянная c должна быть больше $2/3$.

Положим $c = \frac{2}{3} + \gamma$. Определим порядок γ ; так как $y(-1) = O(\varepsilon^{-1/3})$, то $\varepsilon\gamma$ тоже будет порядка $\varepsilon^{-1/3}$ и, следовательно, $\gamma = O(\varepsilon^{-4/3})$.

Нетрудно показать, что ряд (12.6) сохраняет асимптотический характер до значений x , удовлетворяющих условию $O(x-1) > O(\varepsilon^{-1/3})$, и, таким образом, области, в которых пригодны решения (12.20) и (12.6), перекрываются, причем асимптотическая сходимость этих разложений обеспечена для $x = -1 + \varepsilon^{-1/3}$.

Таким образом, постоянную интегрирования c можно определить, приравнявая при $x = -1 + \varepsilon^{-1/3}$ значения y , полученные из формул (12.20) и (12.6):

$$\varepsilon^{-1/3} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{-2/3n} Q_n(-\varepsilon^{-1/3}) = \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{-2n} f_n(-1 + \varepsilon^{-1/3}). \quad (12.22)$$

Определяя из этого соотношения γ с точностью до величин порядка $\varepsilon^{-8/3}$, получим:

$$\gamma \approx a\varepsilon^{-4/3} - \frac{4}{9} \frac{\ln \varepsilon}{\varepsilon} + \left(b_0 - 1 - \frac{2}{3} \ln \frac{3}{2} \right) \varepsilon^{-2} + O(\varepsilon^{-8/3}), \quad (12.23)$$

где $b_0 = b_0(a)$ — известная величина.

Определив постоянную $c = \frac{2}{3} + \gamma$, легко находим x_1 — корень уравнений $f_0(x_1) = 0$, после чего, воспользовавшись уравнениями (12.12), получаем амплитуду автоколебаний

$$a \approx 2 + \frac{a}{3} \varepsilon^{-4/3} - \frac{16 \ln \varepsilon}{27 \varepsilon^2} + \frac{1}{9} (3b_0 - 1 + 2 \ln 2 - 8 \ln 3) \varepsilon^{-2} + O(\varepsilon^{-8/3}). \quad (12.24)$$

Период автоколебаний может быть вычислен согласно формуле

$$T = 2 \int_{-a}^a \frac{dx}{y(x)}. \quad (12.25)$$

Для этого разбиваем весь промежуток интегрирования на пять частей соответственно различным областям:

1) от $-a$ до $-x_2$ — по области II, где x_2 — значение x , полученное по формуле (12.10) при значении

$$z = \frac{(1 - \varepsilon^{-4/3}) a}{a^2 - 1};$$

2) от $-x_2$ до $-(1 + \varepsilon^{-1/3})$ по области III;

3) от $-(1 + \varepsilon^{-1/3})$ до $-(1 - \varepsilon^{-1/3})$ по области IV;

4) от $-(1 - \varepsilon^{-1/3})$ до x^* по области I, где x^* определяется по формуле

$$\begin{aligned} x^* = x_1 - \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{x_1^2 - 1} - \frac{\ln \varepsilon}{\varepsilon^2} \frac{x_1}{(x_1^2 - 1)^2} - \\ - \frac{1}{\varepsilon^2} \left[\frac{x_1}{(x_1^2 - 1)^2} \ln x_1 (x_1^2 - 1) - \frac{g}{x_1^2 - 1} + \frac{x_1}{(x_1^2 - 1)^3} \right] - \\ - \frac{\ln \varepsilon}{\varepsilon^3} \frac{2x_1}{(x_1^2 - 1)^4} + O(\varepsilon^{-3}); \end{aligned} \quad (12.26)$$

5) от x^* до a по области II.

Тогда полный период T будет равен

$$T = 2 [T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5], \quad (12.27)$$

где T_i — часть интеграла (12.25), взятая соответственно для i -го промежутка интегрирования.

Произведя интегрирование для полного периода, получаем:

$$T \approx (3 - 2 \ln 2) \varepsilon + 3a\varepsilon^{-1/3} - \frac{22}{9} \frac{\ln \varepsilon}{\varepsilon} + \\ + \left(3 \ln 2 - \ln 3 - \frac{1}{6} + b_0 - 2d \right) \varepsilon^{-1} + O(\varepsilon^{-4/3}) \quad (12.28)$$

или, подставляя численные значения коэффициентов:

$$T \approx 1,613706\varepsilon + 7,01432\varepsilon^{-1/3} - \frac{22}{9} \frac{\ln \varepsilon}{\varepsilon} + 0,0087\varepsilon^{-1} + O(\varepsilon^{-4/3}). \quad (12.29)$$

При достаточно большом ε можно в этой формуле пренебречь всеми членами, за исключением первого, в результате чего получим асимптотическое выражение для периода, совпадающего с формулой (11.10), найденной в предыдущем параграфе.

Для асимптотических решений (12.6), (12.10), (12.15) и (12.20) можно без затруднений доказать методом последовательных приближений сходимость (асимптотическую) в соответствующих областях.

Уже из рассмотрения полученных здесь асимптотических формул становится ясным, что случай большого ε значительно сложнее, чем случай малого ε . При $\varepsilon \ll 1$ мы имели чисто степенные асимптотические формулы. Здесь же для $\varepsilon \gg 1$ в них входят дробные степени, логарифмические члены. В случае $\varepsilon \gg 1$ имеется большая чувствительность к конкретному виду уравнения, чем в случае $\varepsilon \ll 1$. Естественно поэтому, что при больших значениях нелинейности фактическое построение приближенных решений требует большей конкретизации изучаемых дифференциальных уравнений.

Заметим, что для исследования этой важной и трудной проблемы нахождения асимптотических приближений при наличии большого параметра (или малого параметра перед старшей производной) можно с успехом применять эффективные асимптотические методы, разработанные А. Н. Тихоновым [43] и его учениками.