ГЛАВА III

ВЛИЯНИЕ ВНЕШНИХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИЛ

§ 13. Асимптотические разложения в «нерезонансном» случае

Перейдем теперь к рассмотрению колебательных систем, находящихся под воздействием внешних периодических сил, зависящих явно от времени.

Будем рассматривать систему с одной степенью свободы, для которой дифференциальное уравнение движения можно представить в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(\nu t,\ x,\ \frac{dx}{dt}\right), \tag{13.1}$$

где ε — малый положительный параметр, $f\left(\nu t,\ x,\ \frac{dx}{dt}\right)$ — функция, периодическая по отношению к νt с периодом 2π, которая может быть представлена в виде

$$f\left(\nu t,\ x,\ \frac{dx}{dt}\right) = \sum_{n=-N}^{N} e^{in\nu t} f_n\left(x,\ \frac{dx}{dt}\right). \tag{13.2}$$

При этом будем предполагать, что коэффициенты $f_n\left(x,\ \frac{dx}{dt}\right)$ в конечной сумме (13.2) являются некоторыми полиномами по отношению к x и $\frac{dx}{dt}$.

Рассматриваемое уравнение (13.1) может быть, очевидно, интерпретировано как уравнение колебаний некоторой механической системы единичной массы с собственной частотой ω, находящейся под воздействием малого нелинейного возмущения $\varepsilon f\left(\nu t,\ x,\ \frac{dx}{dt}\right)$, явно зависящего от времени. С многочисленными примерами колебательных систем, описываемых уравнением такого вида, мы уже познакомились во введении.

Прежде чем переходить к изложению методов нахождения асимптотических решений для системы, описываемой уравнением (13.1), остановимся еще раз на анализе влияния периодического воздействия на систему, исходя из физических соображений.

При отсутствии возмущения, т. е. при $\varepsilon = 0$, получаем чисто гармонические колебания:

$$x = a\cos(\omega t + \varphi),$$

$$\frac{dx}{dt} = -a\omega \sin(\omega t + \varphi),$$

где a и φ — произвольные постоянные.

Очевидно, что если мы, применяя метод, изложенный в предыдущей главе, будем определять функции $u_1,\ u_2,\ \ldots$, то, ввиду зависимости внешнего воздействия от времени, в разложении функции $\varepsilon f\left(\nu t,\ x,\ \frac{dx}{dt}\right)$

$\left(\text{после подстановки в нее } x = a\cos(\omega t + \varphi),\ \frac{dx}{dt} = -a\omega\sin(\omega t + \varphi)\right)$ в ряд Фурье, благодаря ее периодичности по νt, появятся члены, содержащие $\sin(n\nu + m\omega)t$ и $\cos(n\nu + m\omega)t$, где n и m — целые числа. Таким образом, в правых частях дифференциальных уравнений, определяющих u_1, u_2, ..., появятся гармонические компоненты с комбинационными частотами вида $(n\nu + m\omega)$.

Совершенно ясно, что когда одна из таких комбинационных частот сделается близкой к собственной частоте системы, то соответствующая гармоника возмущающей силы может оказать значительное влияние на характер колебания, даже если в выражении приложенной возмущающей силы соответствующий коэффициент является малым (амплитуда соответствующей гармоники мала). Разумеется, чем меньше этот коэффициент, тем меньше должна быть расстройка между собственной и внешней частотой для того, чтобы это влияние было заметным. Таким образом, как это уже нами было установлено выше, в нелинейных колебательных системах резонансные явления имеют место не только при $\omega \approx \nu$, как в обычных линейных системах, но и в случае, если одна из комбинационных частот внешего воздействия близка к собственной частоте системы, т. е. если $n\nu + m\omega \approx \omega$.

Таким образом, в нелинейных системах резонанс может наступить при выполнении условия

$$\nu \approx \frac{p}{q}\omega, \tag{13.3}$$

где p и q — целые взаимно простые числа (обычно небольшие).

Введем следующую классификацию различных случаев резонанса:

1) $p = q = 1$, т. е. $\nu \approx \omega$; такой случай будем называть «главным» или обыкновенным резонансом;

2) $q = 1$, т. е. $\nu \approx p\omega$ или $\omega \approx \frac{\nu}{p}$; такой случай будем называть резонансом на обертоне собственной частоты, или демультипликационным резонансом (дробным, поскольку колебания здесь совершаются с частотой, равной дробной части внешней частоты), или параметрическим резонансом. Резонанс этого типа возможен и в линейных системах с периодическими коэффициентами;

3) $p = 1$, т. е. $\omega \approx q\nu$; такой случай будем называть резонансом на обертоне внешней частоты.

Здесь необходимо отметить следующее обстоятельство. Так как p и q могут принимать всевозможные целочисленные значения, то множество $\left\{\frac{p}{q}\right\}$ является плотным и, следовательно, отношение $\frac{p}{q}$ при соответствующем выборе чисел p и q может приблизиться к любому наперед заданному числу. Поэтому может создаться впечатление, что в нелинейной системе возможен резонанс при произвольных p и q. В действительности же это не так, потому что не все возможности, указанные формулой (13.3), осуществимы, иначе говоря, не при всяких p и q имеет место соответствующий резонанс. Практически разложение (13.2) имеет конечное число членов, и числа p и q вполне определяются характером исследуемой колебательной системы.

Выясним теперь, какие резонансы проявляются в первом приближении.

Как и обычно, будем предполагать, что колебания в первом приближении остаются по форме чисто гармоническими и на каждом отдельном цикле с достаточной точностью могут приближаться обыкновенной гармоникой; малая же возмущающая сила, какой бы сложной структуры она ни была, может влиять на ход колебаний, вызывая лишь медленное, но систематическое изменение амплитуды и фазы колебания (медленное по сравнению с естественной единицей времени — с периодом цикла).

По определению резонанса можем считать, что резонанс как раз и характеризуется тем фактом, что малая возмущающая сила может приводить к значительному, часто весьма большому изменению амплитуды колебаний. Это имеет место тогда, когда работа, совершаемая внешней силой за цикл колебания, не уничтожается, так как в противном случае внешняя сила вызывала бы лишь малые дрожания.

Выражение возмущающей силы $\varepsilon f\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right)$ в режиме гармонических колебаний $\left(\text{т. е. при } x = a\cos(\omega t + \varphi), \ \frac{dx}{dt} = -a\omega\sin(\omega t+\varphi)\right)$ содержит, как указывалось выше, различные гармоники с частотами $\pm n\nu \pm m\omega$.

Составим выражение виртуальной работы, которую совершала бы эта возмущающая сила в режиме гармонических колебаний на виртуальных перемещениях

$$\delta x_0 = \delta a \cos(\omega t + \varphi) - \delta\varphi a \sin(\omega t + \varphi), \tag{13.4}$$

соответствующих виртуальному приращению амплитуды и фазы колебания.

Для подсчета удобно выражение виртуальной работы в режиме гармонических колебаний

$$\varepsilon f\left(\nu t, x_0, \frac{dx_0}{dt}\right)\delta x_0 \tag{13.5}$$

представить с помощью ряда Фурье в виде суммы гармонических членов с частотами

$$\lambda_{nm} = n\nu + m\omega.$$

Но при усреднении этой суммы за достаточно большой промежуток времени в ней останутся заметными лишь те члены, у которых частоты λ_{nm} будут соответственно малыми.

Таким образом, в первом приближении проявляются только такие резонансы, для которых частоты в выражении виртуальной работы (13.5) достаточно близки к нулю. Разумеется, интенсивность резонанса будет тем слабее, чем меньше будет соответствующая амплитуда в выражении (13.5).

После этих предварительных замечаний перейдем к оформлению методов фактического построения приближенных решений.

Начнем рассмотрение колебательной системы, описываемой уравнением (13.1), сначала для нерезонансного случая, как наиболее простого, т. е. будем предполагать, что ни одна из комбинационных частот $(n\nu + m\omega)$, входящих в рассматриваемое приближение, не равна (и не близка) частоте ω:

$$n\nu + m\omega \neq \omega. \tag{13.6}$$

Здесь следует указать на известный в теории чисел факт. Если $\frac{\nu}{\omega}$ иррационально, то всегда можно подобрать такие целые n и m, что выражение

$$n\nu + (m-1)\omega$$

будет сколь угодно близким к нулю.

Поэтому, если в выражении рассматриваемого приближенного решения будут присутствовать гармоники со всеми линейными комбинациями $n\nu + m\omega$, то придется наложить условие, чтобы отношение $\frac{\nu}{\omega}$ аппроксимировалось рациональным числом не слишком быстро и не вызвало расходимости рассматриваемого выражения. (См. по этому поводу стр. 167.)

Приступая к построению приближенного решения дифференциального уравнения (13.1), будем исходить, как и в случае возмущения, не содержащего явно времени, из тех же самых интуитивных соображений.

При полном отсутствии возмущающих сил ($\varepsilon = 0$) колебания, очевидно, будут чисто гармонические $x = a\cos\psi$ с постоянной амплитудой и равномерно вращающимся фазовым углом $\frac{da}{dt} = 0$, $\frac{d\psi}{dt} = \omega$.

Влияние возмущающей силы выражается в том, что, во-первых, в колебаниях могут появиться как обертон, так и гармоники комбинационных частот различного порядка малости, и поэтому решение надо искать в виде

$$x = a\cos\psi + \varepsilon u_1(a, \psi, \nu t) + \varepsilon^2 u_2(a, \psi, \nu t) + \ldots, \tag{13.7}$$

где функции $u_1(a, \psi, \nu t)$, $u_2(a, \psi, \nu t)$, ... периодические по обеим угловым переменным ψ и νt с периодом 2π.

Во-вторых, и амплитуда, и скорость вращения фазы уже не могут быть постоянными, а должны определяться, как и в предыдущей главе, дифференциальными уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \ldots, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{13.8}$$

Правые части этих уравнений должны зависеть только от амплитуды, так как при отсутствии резонанса фаза собственных колебаний не связана с фазой внешних сил, и поэтому последняя не оказывает влияния ни на амплитуду колебания, ни на полную фазу колебания. Разумеется, в резонансном случае нам надо будет как в выражение для мгновенной частоты, так и в выражение для мгновенной амплитуды ввести зависимость от сдвига фаз.

Итак, задача построения приближенных решений уравнения (13.1) в нерезонансном случае сводится к задаче, аналогичной рассмотренной в первом параграфе: требуется найти функции

$$u_1(a, \psi, \nu t),\ u_2(a, \psi, \nu t),\ \ldots,\ A_1(a),\ A_2(a),\ \ldots,\ B_1(a),\ B_2(a),\ \ldots$$

таким образом, чтобы выражение (13.7), в которое вместо a и ψ будут подставлены функции времени, определенные уравнениями (13.8), оказалось решением нашего исходного уравнения (13.1).

Как и в первом параграфе, после решения этой задачи, т. е. после того, как будут найдены явные выражения для коэффициентов разложений, стоящих в правых частях (13.7), (13.8), вопрос об интегрировании уравнения (13.1) сводится к более простому вопросу интегрирования уравнений (13.8). Следует заметить, что в нерезонансном случае для определения a и ψ мы получаем уравнения с разделяющимися переменными; в резонансных случаях, как увидим ниже, в этих уравнениях переменные в общем случае уже не будут разделяться.

Прежде чем приступить к построению функций $u_1(a, \psi, \nu t)$, $u_2(a, \psi, \nu t)$, ..., $A_1(a)$, $A_2(a)$, ..., $B_1(a)$, $B_2(a)$, ..., необходимо для однозначности определения коэффициентов разложений (13.8) ввести, как и выше, некоторые дополнительные условия.

В качестве таких условий естественно принять условия отсутствия резонансных членов в функциях $u_1(a, \psi, \nu t)$, $u_2(a, \psi, \nu t)$, ..., т. е. членов, знаменатели которых могут обратиться в нуль.

Это условие равноценно требованию отсутствия в функциях $u_1(a, \psi, \nu t)$, $u_2(a, \psi, \nu t)$, ... первой гармоники аргумента ψ, а с физической точки зрения соответствует выбору в качестве величины a полной амплитуды основной гармоники колебания.

После этих предварительных замечаний перейдем к определению функций $u_1(a, \psi, \nu t)$, $u_2(a, \psi, \nu t)$, ..., $A_1(a)$, $A_2(a)$, ..., $B_1(a)$, $B_2(a)$, ..., учитывая вышеприведенное дополнительное условие.

Дифференцируя (13.7), имеем:

$$\frac{dx}{dt}=\left\{\cos\psi+\varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial a}+\varepsilon^2\frac{\partial u_2}{\partial a}+\ldots\right\}\frac{da}{dt}+\left\{-a\sin\psi+\varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial\psi}+\varepsilon^2\frac{\partial u_2}{\partial\psi}+\ldots\right\}\frac{d\psi}{dt}+\varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial t}+\varepsilon^2\frac{\partial u_2}{\partial t}+\ldots, \tag{13.9}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=\left\{\cos\psi+\varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial a}+\varepsilon^2\frac{\partial u_2}{\partial a}+\ldots\right\}\frac{d^2a}{dt^2}+\left\{-a\sin\psi+\varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial\psi}+\varepsilon^2\frac{\partial u_2}{\partial\psi}+\ldots\right\}\frac{d^2\psi}{dt^2}+\\&+\left\{\varepsilon\frac{\partial^2u_1}{\partial a^2}+\varepsilon^2\frac{\partial^2u_2}{\partial a^2}+\ldots\right\}\left(\frac{da}{dt}\right)^2+\left\{-a\cos\psi+\varepsilon\frac{\partial^2u_1}{\partial\psi^2}+\varepsilon^2\frac{\partial^2u_2}{\partial\psi^2}+\ldots\right\}\times\\&\times\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2+2\left\{\varepsilon\frac{\partial^2u_1}{\partial a\,\partial t}+\varepsilon^2\frac{\partial^2u_2}{\partial a\,\partial t}+\ldots\right\}\frac{da}{dt}+2\left\{\varepsilon\frac{\partial^2u_1}{\partial t\,\partial\psi}+\varepsilon^2\frac{\partial^2u_2}{\partial t\,\partial\psi}+\ldots\right\}\frac{d\psi}{dt}+\\&+2\left\{-\sin\psi+\varepsilon\frac{\partial^2u_1}{\partial a\,\partial\psi}+\varepsilon^2\frac{\partial^2u_2}{\partial a\,\partial\psi}+\ldots\right\}\frac{da}{dt}\frac{d\psi}{dt}+\varepsilon\frac{\partial^2u_1}{\partial t^2}+\varepsilon^2\frac{\partial^2u_2}{\partial t^2}+\ldots\end{aligned} \tag{13.10}$$

Заменив в (13.10) $\frac{da}{dt}$, $\frac{d^2a}{dt^2}$, $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d^2\psi}{dt^2}$ их выражениями по формулам (13.8) и формулам (1.10) первого параграфа, подставляем найденные значения $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, а также (13.7) в левую часть уравнения (13.1), после чего, располагая результат по степеням малого параметра ε, получим:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x&=\varepsilon\left\{\frac{\partial^2u_1}{\partial\psi^2}\omega^2+\frac{\partial^2u_1}{\partial t^2}+2\frac{\partial^2u_1}{\partial\psi\,\partial t}\omega+\omega^2u_1-2a\omega B_1\cos\psi-2\omega A_1\sin\psi\right\}+\\&+\varepsilon^2\left\{\frac{\partial^2u_2}{\partial\psi^2}\omega^2+\frac{\partial^2u_2}{\partial t^2}+2\frac{\partial^2u_2}{\partial\psi\,\partial t}\omega+\omega^2u_2-2a\omega B_2\cos\psi-2\omega A_2\sin\psi+\right.\\&+\left(A_1\frac{dA_1}{da}-aB_1^2\right)\cos\psi-\left(aA_1\frac{dB_1}{da}+2A_1B_1\right)\sin\psi+\\&\left.+2\omega A_1\frac{\partial^2u_1}{\partial a\,\partial\psi}+2\omega B_1\frac{\partial^2u_1}{\partial\psi^2}+2\frac{\partial^2u_1}{\partial a\,\partial t}A_1+2\frac{\partial^2u_1}{\partial\psi\,\partial t}B_1\right\}+\varepsilon^3\ldots\end{aligned} \tag{13.11}$$

Правую часть уравнения (13.1) согласно (13.7) и (13.9) можем представить в виде

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon f\left(\nu t,\ x,\ \frac{dx}{dt}\right) = \varepsilon f(\nu t,\ a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi) + \\ +\varepsilon^2 [f'_x(\nu t,\ a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi)\,u_1 + \\ +f'_{x'}(\nu t,\ a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi)\times \\ \times\left(A_1\cos\psi - aB_1\sin\psi + \frac{\partial u_1}{\partial\psi}\omega + \frac{\partial u_1}{\partial t}\right)\Big] + \varepsilon^3\ldots\end{aligned}\right\} \quad (13.12)$$

Для того чтобы искомое выражение (13.7) удовлетворяло исходному уравнению (13.1) с точностью до величин порядка малости ε^{m+1} (как и выше, будем ограничиваться нахождением m-го приближения), необходимо приравнять коэффициенты при одинаковых степенях ε в правых частях (13.11) и (13.12) до членов m-го порядка включительно.

В результате получим систему m уравнений для определения $u_1(a,\ \psi,\ \nu t)$, $u_2(a,\ \psi,\ \nu t)$, ..., $u_m(a,\ \psi,\ \nu t)$, а также $A_1(a)$, $A_2(a)$, ..., $A_m(a)$, $B_1(a)$, $B_2(a)$, ..., $B_m(a)$:

$$\omega^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2} + 2\omega\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi\,\partial t} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \omega^2 u_1 = \\ = f_0(a,\ \psi,\ \nu t) + 2a\omega B_1\cos\psi + 2\omega A_1\sin\psi, \quad (13.13)$$

$$\left.\begin{aligned}\omega^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial\psi^2} + 2\omega\frac{\partial^2 u_2}{\partial\psi\partial t} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \omega^2 u_2 = \\ = f_1(a,\ \psi,\ \nu t) + 2a\omega B_2\cos\psi + 2\omega A_2\sin\psi, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \omega^2\frac{\partial^2 u_m}{\partial\psi^2} + 2\omega\frac{\partial^2 u_m}{\partial\psi\,\partial t} + \frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} + \omega^2 u_m = \\ = f_{m-1}(a,\ \psi,\ \nu t) + 2a\omega B_m\cos\psi + 2\omega A_m\sin\psi,\end{aligned}\right\} \quad (13.14)$$

где для сокращения обозначено

$$f_0(a,\ \psi,\ \nu t) = f(\nu t,\ a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi),$$

$$f_1(a,\ \psi,\ \nu t) = f'_x(\nu t,\ a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi)\,u_1 + f'_{x'}(\nu t,\ a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi)\times \\ \times\left[A_1\cos\psi - aB_1\sin\psi + \frac{\partial u_1}{\partial\psi}\omega + \frac{\partial u_1}{\partial t}\right] + \left(aB_1^2 - \frac{dA_1}{da}A_1\right)\cos\psi + \\ + \left(\frac{dB_1}{da}A_1 a + 2A_1B_1\right)\sin\psi - 2\omega B_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2} - \\ -2\frac{\partial^2 u_1}{\partial a\,\partial t}A_1 - 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi\,\partial t}B_1 - 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial a\,\partial\psi}\omega A_1, \quad (13.15)$$

. . . .

. . . .

Очевидно, что функции $f_k(a,\ \psi,\ \nu t)$ являются периодическими функциями с периодом 2π по обоим аргументам ψ и νt и, кроме того, зависят от a. Явное выражение для этих функций известно, как только найдены значения $A_j(a)$, $B_j(a)$, $u_j(a,\ \psi,\ \nu t)$ $(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k)$.

Прежде чем переходить к определению интересующих нас функций, приведем краткие сведения из теории кратных рядов Фурье.

Если $f(x)$ — некоторая периодическая функция x с периодом 2π (в случае произвольного периода $2l$ мы всегда можем путем линейного преобразования над x прийти к периоду 2π), то, как известно, при определенных ограничениях она может быть представлена в виде ряда Фурье:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos nx+b_n\sin nx\}, \tag{13.16}$$

где

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi)\cos n\xi\,d\xi, \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi)\sin n\xi d\xi. \tag{13.17}$$

Во многих случаях удобнее пользоваться рядом Фурье в комплексной форме.

В этом случае $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \tag{13.18}$$

где

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi)\,e^{-in\xi}\,d\xi. \tag{13.19}$$

(Здесь индекс n принимает не только целые положительные, но и отрицательные значения.) При этом получаем следующую связь между коэффициентами Фурье (13.19) и (13.17):

$$c_n=\frac{a_n-ib_n}{2}, \quad c_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2}. \tag{13.20}$$

Возмем теперь функцию $f(x, y)$ периодическую, с периодом 2π, по обеим переменным x и y.

Рассматривая формально $f(x, y)$ как функцию от x, имеем:

$$f(x, y)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(y)\,e^{inx}, \tag{13.21}$$

где

$$c_n(y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi, y)\,e^{-in\xi}\,d\xi. \tag{13.22}$$

Функция $c_n(y)$ в свою очередь может быть разложена в ряд вида

$$c_n(y)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{nm}e^{imy}, \tag{13.23}$$

где

$$c_{nm} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_n(\eta)\, e^{-im\eta}\, d\eta =$$
$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi, \eta)\, e^{-i(n\xi+m\eta)}\, d\xi\, d\eta. \tag{13.24}$$

Подставив полученное выражение для $c_n(y)$ в формулу (13.21) имеем:

$$f(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{nm} e^{i(nx+my)}, \tag{13.25}$$

или сокращенно следующую формулу:

$$f(x, y) = \sum_{n,\, m=-\infty}^{\infty} c_{nm} e^{i(nx+my)}, \tag{13.26}$$

которая обобщает ряд Фурье на случай двух переменных.

Таким же образом, для периодической функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ от N независимых переменных периода 2π относительно каждой из переменных получим:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \sum_{n_1,\, n_2,\, \ldots,\, n_N=-\infty}^{\infty} c_{n_1 n_2 \ldots n_N} e^{i(n_1x_1+n_2x_2+\ldots+n_Nx_N)}, \tag{13.27}$$

где

$$c_{n_1n_2\ldots n_N} = \frac{1}{(2\pi)^N}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\ldots$$
$$\ldots\int_0^{2\pi} f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N)\, e^{-i(n_1\xi_1+n_2\xi_2+\ldots+n_N\xi_N)}\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_N. \tag{13.28}$$

Приведенная комплексно-экспоненциальная форма кратного ряда Фурье весьма удобна для расчетов. Следует, однако, подчеркнуть, что она совершенно эквивалентна обычной форме разложения по синусам и косинусам, так что условия сходимости будут те же самые.

Приступим теперь к определению $A_1(a)$, $B_1(a)$ и $u_1(a, \psi, \nu t)$ из уравнения (13.13). Для этого разложим $f_0(a, \psi, \nu t)$ в двойной ряд Фурье:

$$f_0(a, \psi, \nu t) = \sum_n\sum_m f_{nm}^{(0)}(a)\, e^{i(n\nu t+m\psi)}, \tag{13.29}$$

где

$$f_{nm}^{(0)}(a) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta, a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\, e^{-i(n\theta+m\psi)}\, d\theta\, d\psi.$$

Представим $u_1(a, \psi, \nu t)$ в виде ряда Фурье:

$$u_1(a, \psi, \nu t) = \sum_n\sum_m \bar{f}_{nm}(a)\, e^{i(n\nu t+m\psi)} \tag{13.30}$$

Подставляя в уравнение (13.13) значение $f_0(a, \psi, \nu t)$ (13.29) и $u_1(a, \psi, \nu t)$ (13.30), имеем:

$$\sum_n \sum_m \{\omega^2 - (n\nu + m\omega)^2\} \bar{f}_{nm}(a)\, e^{i(n\nu t + m\psi)} =$$
$$= 2a\omega B_1 \cos\psi + 2\omega A_1 \sin\psi + \sum_n \sum_m f_{nm}^{(0)}(a)\, e^{i(n\nu t + m\psi)}. \quad (13.31)$$

Из (13.31) необходимо определить $\bar{f}_{nm}(a)$, $A_1(a)$ и $B_1(a)$ так, чтобы $u_1(a, \psi, \nu t)$ не содержало резонансных членов. Последнее условие будет выполнено, если $A_1(a)$ и $B_1(a)$ определить из соотношения:

$$2a\omega B_1 \cos\psi + 2\omega A_1 \sin\psi = -\sum_{\substack{n\ m \\ [\omega^2-(n\nu+m\omega)^2=0]}} \sum f_{nm}^{(0)}(a)\, e^{i(n\nu t + m\psi)}. \quad (13.32)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках в выражении (13.31), получим

$$\bar{f}_{nm}(a) = \frac{f_{nm}^{(0)}(a)}{\omega^2 - (n\nu + m\omega)^2}$$

для всех n и m, удовлетворяющих неравенству

$$\omega^2 - (n\nu + m\omega)^2 \neq 0$$

или, ввиду того, что мы рассматриваем нерезонансный случай, неравенству

$$n^2 + (m^2 - 1)^2 \neq 0 \quad (\text{т. е. } n \neq 0,\ m \neq \pm 1).$$

Подставляя найденное значение $\bar{f}_{nm}(a)$ в (13.30) и делая для упрощения замену $\nu t = \theta$, получаем для $u_1(a, \psi, \nu t)$ следующее выражение:

$$u_1(a, \psi, \theta) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\substack{n\ m \\ [n^2+(m^2-1)^2\neq 0]}} \sum \frac{e^{i(n\theta + m\psi)}}{\omega^2 - (n\nu + m\omega)^2} \times$$
$$\times \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(a, \psi, \theta)\, e^{-i(n\theta + m\psi)}\, d\theta\, d\psi \quad (13.33)$$

или, переходя к тригонометрическим функциям:

$$u_1(a, \psi, \theta) = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\substack{n,\ m \\ [n^2+(m^2-1)^2\neq 0]}} \left\{ \frac{\cos(n\theta + m\psi)}{\omega^2 - (n\nu + m\omega)^2} \times \right.$$
$$\times \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(a, \psi, \theta) \cos(n\theta + m\psi)\, d\theta\, d\psi +$$
$$\left. + \frac{\sin(n\theta + m\psi)}{\omega^2 - (n\nu + m\omega)^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(a, \psi, \theta) \sin(n\theta + m\psi)\, d\theta\, d\psi \right\}. \quad (13.34)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках в (13.32), находим выражения для $A_1(a)$ и $B_1(a)$ *):

$$\left.\begin{aligned} A_1(a) &= -\frac{1}{4\pi^2\omega}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(a,\psi,\theta)\sin\psi\,d\theta\,d\psi,\\ B_1(a) &= -\frac{1}{4\pi^2\omega a}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(a,\psi,\theta)\cos\psi\,d\theta\,d\psi. \end{aligned}\right\} \tag{13.35}$$

После определения $u_1(a,\psi,\theta)$, $A_1(a)$ и $B_1(a)$ мы в соответствии с (13.15) имеем явное выражение для $f_1(a,\psi,\theta)$. Разлагая его в ряд Фурье и воспользовавшись уравнением (13.14), а также, учитывая условие отсутствия резонансных членов в выражении для $u_2(a,\psi,\theta)$, аналогично найдем $u_2(a,\psi,\theta)$, $A_2(a)$, $B_2(a)$, необходимые для построения второго приближения. После ряда выкладок имеем:

$$u_2(a,\psi,\theta)=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{n}\sum_{m}{}_{[n^2+(m^2-1)^2\neq 0]}\frac{e^{i(n\theta+m\psi)}}{\omega^2-(n\nu+m\omega)^2}\times$$
$$\times\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(a,\psi,\theta)\,e^{-i(n\theta+m\psi)}\,d\theta\,d\psi, \tag{13.36}$$

$$\left.\begin{aligned} A_2(a) &= -\frac{1}{2\omega}\left[\frac{dB_1}{da}aA_1+2A_1B_1\right]-\\ &-\frac{1}{4\pi^2\omega}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big\{f'_x(\theta,a\cos\psi,-a\omega\sin\psi)\,u_1+\\ &+f'_{x'}(\theta,a\cos\psi,-a\omega\sin\psi)\Big(A_1\cos\psi-\\ &-aB_1\sin\psi+\frac{\partial u_1}{\partial\psi}\omega+\frac{\partial u_1}{\partial\theta}\nu\Big)\Big\}\sin\psi\,d\theta\,d\psi,\\ B_2(a) &= \frac{1}{2a\omega}\left[\frac{dA_1}{da}A_1-aB_1^2\right]-\\ &-\frac{1}{4\pi^2\omega a}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big\{f'_x(\theta,a\cos\psi,-a\omega\sin\psi)\,u_1+\\ &+f'_{x'}(\theta,a\cos\psi,-a\omega\sin\psi)\Big(A_1\cos\psi-\\ &-aB_1\sin\psi+\frac{\partial u_1}{\partial\psi}\omega+\frac{\partial u_1}{\partial\theta}\nu\Big)\Big\}\cos\psi\,d\theta\,d\psi. \end{aligned}\right\} \tag{13.37}$$

Продолжая изложенный процесс последовательного определения интересующих нас выражений, можно построить решение уравнения (13.1) в любом приближении.

Заметим, что, исходя из рассуждений, аналогичных приведенным в главе I, здесь также не имеет смысла при построении n-го приближения удерживать в правой части ряда (13.7) член порядка малости ε^n.

*) Правая часть выражения (13.32), как легко заметить, содержит только первую гармонику угла ψ.

Заканчивая рассмотрение нерезонансного случая, заметим, что согласно формулам (13.35) в уравнения первого приближения войдет лишь свободный член $f_0\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ разложения (13.2) возмущающей силы $f\left(\theta, x, \frac{dx}{dt}\right)$.

На основании (13.2) имеем тождественно:

$$f_0\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f\left(\tau, x, \frac{dx}{dt}\right) d\tau. \qquad (13.38)$$

Поэтому для получения уравнений первого приближения мы можем усреднить возмущающую силу по явно содержащемуся в ней времени, после чего воспользоваться формулами первого параграфа (1.27).

Так как в рассматриваемом нерезонансном случае уравнения первого приближения (а также и высших приближений) имеют ту же форму, что и уравнения первого приближения для случая (1.1) (т. е. для случая, когда внешние возмущающие силы не зависят явно от времени), которые уже были нами подробно исследованы, то мы не будем останавливаться здесь на их изучении.

Остановимся только на рассмотрении выражения для x во втором приближении:

$$x = a\cos\psi + \varepsilon u_1(a, \psi, \theta), \qquad (13.39)$$

где $u_1(a, \psi, \theta)$ определяется формулой (13.33) или (13.34).

В нерезонансном случае согласно формулам (13.39) и (13.34) влияние внешнего периодического воздействия сказывается только во втором приближении. Так, например, из формулы (13.39) непосредственно следует, что только во втором приближении в решении могут появиться различные комбинационные гармоники, компоненты с частотами вынуждающей силы различной кратности и т. д. Амплитуды всех этих дополнительных гармоник будут порядка малости ε.

Рассмотрим еще формулу (13.39) в случае стационарных колебаний:

$$a = \text{const}, \quad \psi = \omega(a)t + \vartheta, \quad \vartheta = \text{const}. \qquad (13.40)$$

В этом случае колеблющаяся величина x состоит из собственного колебания с частотой $\omega(a)$ (представляемого членом $a\cos[\omega(a)t+\vartheta]$), вынужденных колебаний с частотами $n\nu$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) и комбинационных колебаний с частотами $n\nu \pm m\omega$ ($n, m = 1, 2, 3, \ldots$). При этом интенсивность комбинационного колебания с частотой $n\nu \pm m\omega$ усиливается по мере приближения к соответствующему резонансу, т. е. по мере уменьшения соответствующего делителя

$$\omega^2 - (n\nu \pm m\omega)^2.$$

В частном случае, когда собственные колебания отсутствуют, т. е. когда $a = 0$, формула (13.39) вырождается в следующую:

$$x = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta}{\omega^2 - n^2\nu^2}, \qquad (13.41)$$

где обозначено:

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_0(\theta,\ 0,\ 0)\cos n\theta\, d\theta,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_0(\theta,\ 0,\ 0)\sin n\theta\, d\theta.$$

Таким образом, при $a=0$ в колебательной системе имеются лишь одни вынужденные колебания с частотами внешнего возбуждения $n\nu$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$.

Поэтому в данном случае имеем дело с чисто вынужденными колебаниями. Режимы колебаний, соответствующие формуле (13.41), называются иногда гетеропериодическими, так как периоды всех гармоник колебания навязаны системе извне.

Если исследуемая колебательная система такова, что для не зависящей явно от времени слагающей $\varepsilon f_0\left(x,\ \frac{dx}{dt}\right)$ возмущающей функции $\varepsilon f\left(\theta,\ x,\ \frac{dx}{dt}\right)$ эквивалентный коэффициент затухания положителен:

$$\lambda_e^*(a) > 0, \tag{13.42}$$

где

$$\lambda_e^*(a) = \frac{1}{4\pi^2\omega}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta,\ a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi)\sin\psi\, d\theta\, d\psi =$$

$$= \frac{1}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi} f_0(a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi)\sin\psi\, d\psi,$$

то (см. § 7)

$$a(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

и поэтому при выполнении неравенства (13.42) всякое колебание приближается к гетеропериодическому, так что гетеропериодический режим будет единственно возможным стационарным режимом.

Полученное условие (13.42) затухания собственных колебаний, вообще говоря, зависит от амплитуды внешней периодической силы. При отсутствии внешнего возбуждения, т. е. в случае, когда правая часть уравнения (13.1) не зависит явно от времени, мы получаем обычное условие самовозбуждения

$$\lambda_e(a) < 0 \tag{13.43}$$

и соответственно условие затухания

$$\lambda_e(a) > 0, \tag{13.44}$$

где

$$\lambda_e(a) = \frac{1}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi} f(0,\ a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi)\sin\psi\, d\psi\ ^{*)}.$$

---

*) $f(0,\ a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi)$ обозначает возмущающую силу $f\left(\theta,\ x,\ \frac{dx}{dt}\right)$, в которой положено $x=a\cos\psi$, $\frac{dx}{dt}=-a\omega\sin\psi$, а амплитуды внешних периодических компонент равны нулю.

В зависимости от структуры нелинейной функции $f\left(\theta, x, \frac{dx}{dt}\right)$ может получиться, что одновременно выполняются условия (13.43) и (13.42). Тогда окажется, что система, являющаяся самовозбужденной при отсутствии внешнего периодического воздействия, теряет самовозбуждение при наличии внешнего периодического воздействия. В этом случае мы имеем дело с так называемым нерезонансным или асинхронным гашением.

Аналогично может представиться также и противоположный случай асинхронного возбуждения.

В начале предыдущего параграфа мы предположили, что правая часть исследуемого дифференциального уравнения (13.1) $f\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right)$ — периодическая функция по t с периодом $\frac{2\pi}{\nu}$ и, кроме того, может быть представлена в виде конечной суммы (13.2), в которой коэффициенты $f_n\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ являются некоторыми полиномами по отношению к x и $\frac{dx}{dt}$.

Если сделать более общее допущение, предположив, что функция $f\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right)$ может быть представлена в виде равномерно сходящегося ряда

$$f\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\nu t} f_n\left(x, \frac{dx}{dt}\right), \tag{13.45}$$

в котором $f_n\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ — некоторые произвольные регулярные функции x и $\frac{dx}{dt}$, то в выражение для $u_1(a, \psi, \theta)$, $u_2(a, \psi, \theta)$, ... вместо конечных двойных сумм войдут двойные бесконечные ряды типа

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(n\theta+m\psi)}}{\omega^2-(n\nu+m\omega)^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(a, \psi, \theta)\, e^{-i(n\theta+m\psi)} d\theta\, d\psi. \tag{13.46}$$

Благодаря присутствию делителей вида $\omega^2-(n\nu+m\omega)^2$ эти ряды, вообще говоря, будут расходящимися.

Как известно, в общем случае точки расходимости рядов такого вида на оси ν (т. е. значения ν, при котором ряд расходится) образуют всюду плотное множество.

Таким образом, каково бы ни было значение ν, всегда можно найти сколь угодно близкое к нему значение ν_0, для которого ряд (13.46) расходится.

С другой стороны, заметим, что для почти всякого значения отношения $\frac{\nu}{\omega}$ (т. е. за возможным исключением множества меры нуль) мы можем найти*) такие C и δ, что

$$\left|\frac{\nu}{\omega}-\frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{C}{(|p|+|q|)^{2+\delta}}$$

при любых целых p, q.

*) Действительно, фиксируем некоторое положительное δ и сколь угодно малое положительное η. Возьмем положительное C так, чтобы

$$2C \sum_{|n|+|m|\geqslant 1} \frac{1}{(|n|+|m|)^{2+\delta}} \leqslant \eta,$$

Но тогда

$$|n\nu+(m\pm 1)\omega|\geqslant\frac{C\omega}{n^{\delta+1}},$$

и по абсолютному значению каждый член ряда (13.46) будет соответственно меньше, чем

$$\frac{n^{\delta+1}}{C\omega}\left|\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(a,\,\psi,\,\theta)\,e^{-i(n\theta+m\psi)}\,d\theta\,d\psi\right|.$$

Поэтому данный ряд будет абсолютно сходящимся, если только $f_0(a,\,\psi,\,\theta)$ обладает по отношению к угловым переменным ψ, θ достаточным числом непрерывных частных производных.

Однако, чтобы не вдаваться в такие теоретико-числовые тонкости, целесообразно в практических приложениях не доводить дело до появления бесконечных сумм гармонических слагающих и отнести остаток ряда к высшим степеням ε.

Иначе говоря, удобнее исходить из уравнений вида

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=\varepsilon f_0\left(\nu t,\,x,\,\frac{dx}{dt}\right)+\varepsilon^2 f_1\left(\nu t,\,x,\,\frac{dx}{dt}\right)+\varepsilon^3\ldots, \tag{13.47}$$

в которых $f_0\left(\nu t,\,x,\,\frac{dx}{dt}\right)$, $f_1\left(\nu t,\,x,\,\frac{dx}{dt}\right)$, ... являются уже конечными суммами типа (13.2).

Распространение же изложенной методики построения приближенных решений применительно к уравнению (13.47) не представляет никаких затруднений.

Перейдем теперь к рассмотрению конкретного примера.

Рассмотрим обобщенное уравнение Ван-дер-Поля

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y-\varepsilon(1-y^2)\frac{dy}{dt}=E\sin\nu t, \tag{13.48}$$

где ε — некоторый малый положительный параметр.

Это уравнение, как указывалось выше, путем замены

$$y=x+U\sin\nu t, \tag{13.49}$$

где $U=\frac{E}{1-\nu^2}$ (мы рассматриваем нерезонансный случай, следовательно, ν не равно и не близко к единице), приводится к виду

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=\varepsilon\left[1-(x+U\sin\nu t)^2\right]\left(\frac{dx}{dt}+U\nu\cos\nu t\right). \tag{13.50}$$

и построим множество интервалов l_{nm} (для любых целых положительных и отрицательных n, m) с центром в точках $\frac{n}{m}$ и длинами $\frac{2C}{(|n|+|m|)^{2+\delta}}$.

С одной стороны, видно, что для любого числа x, не принадлежащего ни к одному из интервалов $l_{n,\,m}$, выполняется при любых целых n, m неравенство

$$\left|x-\frac{n}{m}\right|\geqslant\frac{C}{(|n|+|m|)^{2+\delta}}. \tag{α}$$

С другой стороны, множество x, которое принадлежит к одному из интервалов $l_{n,\,m}$, имеет меру, меньшую чем

$$\sum_{n,\,m}\operatorname{mes} l_{n,\,m}\leqslant\eta.$$

Таким образом, для всех x, за возможным исключением x, принадлежащих к множеству меры, меньшей η, выполняются неравенства (α).

Воспользовавшись формулами (13.35), получим решение уравнения (13.50) в первом приближении:

$$x = a\cos(t+\vartheta), \tag{13.51}$$

где $\vartheta = \mathrm{const}$, а a, очевидно, должно быть определено из уравнения

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon a}{2}\left(1 - \frac{a^2}{4} - \frac{U^2}{2}\right). \tag{13.52}$$

Уравнение первого приближения (13.52) показывает, что при

$$U^2 < 2 \tag{13.53}$$

система самовозбуждена, и существует устойчивый стационарный режим колебаний, соответствующий амплитуде

$$a^2 = 4 - 2U^2.$$

При

$$U^2 > 2 \tag{13.54}$$

амплитуда a с возрастанием t стремится к нулю и, следовательно, в системе происходит асинхронное гашение.

Найдем теперь решение уравнения (13.50) во втором приближении. Воспользовавшись формулами (13.39) и (13.37), имеем:

$$\begin{aligned} x = a\cos\psi &+ \frac{\varepsilon U\nu(4-U^2-2a^2)}{4(1-\nu^2)}\cos\theta + \frac{\varepsilon U^3\nu}{4(1-9\nu^2)}\cos 3\theta + \\ &+ \frac{\varepsilon U a^2(2+\nu)}{4(1+\nu)(3+\nu)}\cos(\theta+2\psi) + \frac{\varepsilon U a^2(2+\nu)}{4(1-\nu)(3-\nu)}\cos(\theta-2\psi) + \\ &+ \frac{\varepsilon U^2 a(2+\nu)}{16\nu(1+\nu)}\sin(2\theta+\psi) + \frac{\varepsilon U^2 a(1-2\nu)}{16\nu(1-\nu)}\sin(2\theta-\psi) - \frac{a^3}{32}\sin 3\psi, \end{aligned} \tag{13.55}$$

где a и ψ должны удовлетворять системе уравнений второго приближения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{\varepsilon a}{2}\left(1 - \frac{a^2}{4} - \frac{U^2}{2}\right), \\ \frac{d\psi}{dt} &= 1 - \varepsilon^2\left(\frac{1}{8} - \frac{a^2}{8} + \frac{7a^4}{256}\right) + \frac{\varepsilon^2 U^2(5\nu-1)}{8(1-\nu^2)} + \\ &+ \frac{\varepsilon^2 U^2 a^2(7\nu^4 - 40\nu^2 + 32\nu - 9)}{32(9-\nu^2)(1-\nu^2)} + \frac{\varepsilon^2 U^4(1+4\nu-8\nu^2)}{64(1-\nu^2)}. \end{aligned}\right\} \tag{13.56}$$

Как и следовало ожидать, во втором приближении у нас наряду с вынужденными колебаниями с частотами ν и 3ν, равными частотам внешней силы, появились компоненты с кратными частотами 3ω, а также с комбинационными частотами $\nu \pm 2\omega$, $2\nu \pm \omega$, что характерно только для нелинейных систем.

Далее, на основании ранее сказанного при выполнении условия (13.53) гетеропериодический режим колебаний является неустойчивым и поэтому физически невозможным. В случае выполнения условия (13.54) гетеропериодический режим будет единственным устойчивым стационарным режимом. С течением времени в системе установятся гетеропериодические колебания вида

$$x = \frac{\varepsilon U\nu(4-U^2)}{4(1-\nu^2)}\cos\theta + \frac{\varepsilon U^3\nu}{4(1-9\nu^2)}\cos 3\theta. \tag{13.57}$$