

§ 14. «Резонансные» случаи

Перейдем к рассмотрению резонансных случаев. Предположим, что

$$\omega \approx \frac{p}{q} \nu,$$

где p и q — некоторые взаимно простые числа.

Тогда в зависимости от характера стоящей перед нами задачи может возникнуть два различных подхода к ее решению: 1) при исследовании резонанса достаточно ограничиться рассмотрением только самой резонансной области; 2) кроме изучения резонансной области, необходимо также изучить подходы к этой области из нерезонансной зоны.

Начнем рассмотрение с первого случая, как более простого. Ввиду того, что в этом случае предполагается рассматривать значения $\frac{p}{q} \nu$, достаточно близкие к ω , естественно положить

$$\omega^2 = \left(\frac{p}{q} \nu \right)^2 + \varepsilon \Delta, \quad (14.1)$$

где $\varepsilon \Delta$ представляет собой расстройку между квадратом собственной и внешней частоты.

Тогда исходное уравнение (13.1) запишется в виде

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \left(\frac{p}{q} \nu \right)^2 x = \varepsilon \left\{ f \left(\nu t, x, \frac{dx}{dt} \right) - \Delta x \right\}. \quad (14.2)$$

Таким образом, расстройку $\varepsilon \Delta$ ввиду малости относим к возмущающей силе, после чего решение уравнения (14.2), как и в нерезонансном случае, можем искать в виде

$$x = a \cos \psi + \varepsilon u_1(a, \nu t, \psi) + \varepsilon^2 u_2(a, \nu t, \psi) + \dots, \quad (14.3)$$

где $u_1(a, \nu t, \psi)$, $u_2(a, \nu t, \psi)$, ... — периодические функции с периодом 2π по обоим угловым переменным νt и ψ , а a и ψ — некоторые функции времени, которые мы должны определить из соответствующих дифференциальных уравнений.

Для составления этих уравнений удобно ввести в рассмотрение, кроме угловой переменной ψ , представляющей собой полную фазу колебания, еще разность фаз

$$\vartheta = \psi - \frac{p}{q} \nu t.$$

Как уже ранее указывалось, из простых физических соображений следует, что в резонансных случаях разность фаз между собственным колебанием и внешним воздействием может оказывать существенное влияние на изменение амплитуды и частоты колебания. Поэтому в отличие от ранее рассматривавшихся случаев мы будем представлять $\frac{da}{dt}$ и $\frac{d\psi}{dt}$ как функции не только a , но также и ϑ , иначе говоря, мы будем определять a и ψ как решения дифференциальных уравнений вида

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a, \vartheta) + \varepsilon^2 A_2(a, \vartheta) + \dots, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{p}{q} \nu + \varepsilon B_1(a, \vartheta) + \varepsilon^2 B_2(a, \vartheta) + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (14.4)$$

где $A_1(a, \vartheta)$, $A_2(a, \vartheta)$, ..., $B_1(a, \vartheta)$, $B_2(a, \vartheta)$, ... — периодические функции угловой переменной ϑ с периодом 2π .

Поскольку в правые части выражений для $\frac{da}{dt}$ и $\frac{d\vartheta}{dt}$ входит не полная фаза ψ , а фазовый угол ϑ , целесообразно исключить ψ из выражения (14.3) и уравнений (14.4).

Тогда, полагая $\psi = \frac{p}{q} \nu t + \vartheta$, получим вместо (14.3) следующее выражение:

$$x = a \cos \left(\frac{p}{q} \nu t + \vartheta \right) + \varepsilon u_1 \left(a, \vartheta, \frac{\nu}{q} t \right) + \varepsilon^2 u_2 \left(a, \vartheta, \frac{\nu}{q} t \right) + \dots, \quad (14.5)$$

в котором функции времени a и ϑ должны удовлетворять уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a, \vartheta) + \varepsilon^2 A_2(a, \vartheta) + \dots, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \varepsilon B_1(a, \vartheta) + \varepsilon^2 B_2(a, \vartheta) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (14.6)$$

Таким образом, нам нужно определить функции

$$\begin{aligned} A_1(a, \vartheta), A_2(a, \vartheta), \dots, B_1(a, \vartheta), B_2(a, \vartheta), \dots, u_1 \left(a, \vartheta, \frac{\nu}{q} t \right), \\ u_2 \left(a, \vartheta, \frac{\nu}{q} t \right), \dots \end{aligned}$$

так, чтобы выражение (14.5), в котором вместо a и ϑ подставлены решения уравнений (14.6), удовлетворяло основному рассматриваемому уравнению (14.2).

Дифференцируя (14.5), находим:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \left\{ \cos \psi + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial a} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial a} + \dots \right\} \frac{da}{dt} + \\ &+ \left\{ -a \sin \psi + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial \vartheta} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial \vartheta} + \dots \right\} \frac{d\vartheta}{dt} + \\ &+ \left\{ -a \frac{p}{q} \nu \sin \psi + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial t} + \dots \right\}, \quad (14.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \left\{ \cos \psi + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial a} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial a} + \dots \right\} \frac{d^2a}{dt^2} + \left\{ \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial a^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial a^2} + \dots \right\} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 + \\ &+ 2 \left\{ -\sin \psi + \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \vartheta} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial a \partial \vartheta} + \dots \right\} \frac{da}{dt} \frac{d\vartheta}{dt} + \\ &+ 2 \left\{ -\frac{p}{q} \nu \sin \psi + \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial a \partial t} + \dots \right\} \frac{da}{dt} + \\ &+ \left\{ -a \sin \psi + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial \vartheta} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial \vartheta} + \dots \right\} \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \\ &+ \left\{ -a \cos \psi + \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial \vartheta^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \vartheta^2} + \dots \right\} \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 + \\ &+ 2 \left\{ -a \frac{p}{q} \nu \cos \psi + \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial \vartheta \partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \vartheta \partial t} + \dots \right\} \frac{d\vartheta}{dt} + \\ &+ \left\{ -a \left(\frac{p}{q} \nu \right)^2 \cos \psi + \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \dots \right\}. \quad (14.8) \end{aligned}$$

Далее, на основании (14.6) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 a}{dt^2} &= \varepsilon^2 \left\{ \frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} B_1 \right\} + \varepsilon^3 \dots, \\ \left(\frac{da}{dt} \right)^2 &= \varepsilon^2 A_1^2 + \varepsilon^3 \dots, \quad \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 = \varepsilon^2 B_1^2 + \varepsilon^3 \dots, \\ \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} &= \varepsilon^2 \left\{ \frac{\partial B_1}{\partial a} A_1 + \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta} B_1 \right\} + \varepsilon^3 \dots, \\ \frac{da}{dt} \frac{d\vartheta}{dt} &= \varepsilon^2 A_1 B_1 + \varepsilon^3 \dots \end{aligned} \right\} \quad (14.9)$$

Подставляя (14.5) и (14.8) в левую часть уравнения (14.2), учитывая при этом (14.6), (14.9) и располагая результаты по степеням параметра ε , получим:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + \left(\frac{p}{q} \nu \right)^2 x &= \varepsilon \left\{ -2 \frac{p}{q} \nu \sin \phi A_1 - 2a \frac{p}{q} \nu \cos \phi B_1 + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left(\frac{p}{q} \nu \right)^2 u_1 \right\} + \varepsilon^2 \left\{ \left[\frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} B_1 - a B_1^2 - \right. \right. \\ &- \left. \left. 2a \frac{p}{q} \nu B_2 \right] \cos \phi + \left[-2A_1 B_1 - 2 \frac{p}{q} \nu A_2 - \right. \right. \\ &- \left. \left. a \frac{\partial B_1}{\partial a} A_1 - a \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta} B_1 \right] \sin \phi + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial t} A_1 + \right. \\ &+ \left. 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \vartheta \partial t} B_1 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \left(\frac{p}{q} \nu \right)^2 u_2 \right\} + \varepsilon^3 \dots \quad (14.10) \end{aligned}$$

Раскладывая правую часть уравнения (14.2) по степеням малого параметра, находим:

$$\begin{aligned} \varepsilon \left\{ f \left(\nu t, x, \frac{dx}{dt} \right) - \Delta x \right\} &= \varepsilon \left\{ -\Delta a \cos \phi + \right. \\ &+ \left. f \left(\nu t, a \cos \phi, -a \frac{p}{q} \nu \sin \phi \right) \right\} + \\ &+ \varepsilon^2 \left\{ f'_x \left(\nu t, a \cos \phi, -a \frac{p}{q} \nu \sin \phi \right) u_1 + \right. \\ &+ \left. f'_{x'} \left(\nu t, a \cos \phi, -a \frac{p}{q} \nu \sin \phi \right) \left(A_1 \cos \phi - a B_1 \sin \phi + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) - \Delta u_1 \right\} + \varepsilon^3 \dots \quad (14.11) \end{aligned}$$

Приравнявая в правых частях (14.10) и (14.11) коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим для определения искомых функций следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left(\frac{p}{q} \nu \right)^2 u_1 &= f_0(a, \nu t, \phi) + 2 \frac{p}{q} \nu A_1 \sin \phi + \\ &+ 2a \frac{p}{q} \nu B_1 \cos \phi - \Delta a \cos \phi, \quad (14.12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \left(\frac{p}{q} \nu \right)^2 u_2 &= f_1(a, \nu t, \phi) + \left[2 \frac{p}{q} \nu A_2 + a \frac{\partial B_1}{\partial a} A_1 + a \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta} B_1 + \right. \\ &+ \left. 2A_1 B_1 \right] \sin \phi + \left[2a \frac{p}{q} \nu B_2 - \frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 - \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} B_1 + a B_1^2 \right] \cos \phi, \quad (14.13) \end{aligned}$$

где введены обозначения:

$$f_0 \left(a, \nu t, \psi \right) = f \left(\nu t, a \cos \psi, -a \frac{p}{q} \nu \sin \psi \right), \quad (14.14)$$

$$\begin{aligned} f_1(a, \nu t, \psi) = & f'_x \left(\nu t, a \cos \psi, -a \frac{p}{q} \nu \sin \psi \right) u_1 + \\ & + f'_{x'} \left(\nu t, a \cos \psi, -a \frac{p}{q} \nu \sin \psi \right) \left(A_1 \cos \psi - a B_1 \sin \psi + \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) - \\ & - \Delta u_1 - 2A_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial t} - 2B_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi \partial t}. \end{aligned} \quad (14.15)$$

Как и в ранее изложенных случаях, $f_b(a, \nu t, \psi)$ являются периодическими функциями с периодом 2π по обоим угловым переменным $\nu t, \psi$ [$A_i(a, \vartheta)$ и $B_i(a, \vartheta)$ — периодические функции по отношению к ϑ с периодом 2π].

Найдем из уравнения (14.12) $u_1 \left(a, \nu t, \frac{p}{q} \nu t + \vartheta \right)$, $A_1(a, \vartheta)$ и $B_1(a, \vartheta)$, соблюдая условие отсутствия в выражении для $u_1 \left(a, \nu t, \frac{p}{q} \nu t + \vartheta \right)$ членов, знаменатели которых могут обратиться в нуль.

Представляя функции $u_1 \left(a, \nu t, \frac{p}{q} \nu t + \vartheta \right)$ и $f_0 \left(a, \nu t, \frac{p}{q} \nu t + \vartheta \right)$ в виде конечных сумм Фурье, имеем:

$$u_1 \left(a, \nu t, \frac{p}{q} \nu t + \vartheta \right) = \sum_n \sum_m u_{nm}^{(1)}(a) e^{i \left\{ n \nu t + m \left(\frac{p}{q} \nu t + \vartheta \right) \right\}}, \quad (14.16)$$

$$f_0 \left(a, \nu t, \frac{p}{q} \nu t + \vartheta \right) = \sum_n \sum_m f_{nm}^{(0)}(a) e^{i \left\{ n \nu t + m \left(\frac{p}{q} \nu t + \vartheta \right) \right\}}, \quad (14.17)$$

где

$$f_{nm}^{(0)}(a) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \theta, \psi) e^{-i \{ n\theta + m\psi \}} d\theta d\psi,$$

причем следует заметить, что фактически в случае, если правая часть уравнения (13.1) $\varepsilon f \left(\nu t, x, \frac{dx}{dt} \right)$ является полиномом по отношению к $x, \frac{dx}{dt}$ и содержит конечное число гармоник по переменной νt , то разложения (14.17) могут быть найдены при помощи элементарных тригонометрических преобразований.

Подставим правые части выражений (14.16) и (14.17) в уравнение (14.12). В результате получим:

$$\begin{aligned} \sum_n \sum_m \left\{ \left(\frac{p}{q} \nu \right)^2 - \left(n \nu + m \frac{p}{q} \nu \right)^2 \right\} e^{i \left\{ n \nu t + m \left(\frac{p}{q} \nu t + \vartheta \right) \right\}} u_{nm}^{(1)}(a) = \\ = \sum_n \sum_m f_{nm}^{(0)}(a) e^{i \left\{ n \nu t + m \left(\frac{p}{q} \nu t + \vartheta \right) \right\}} + 2 \frac{p}{q} \nu A_1 \sin \left(\frac{p}{q} \nu t + \vartheta \right) + \\ + 2a \frac{p}{q} \nu B_1 \cos \left(\frac{p}{q} \nu t + \vartheta \right) - \Delta a \cos \left(\frac{p}{q} \nu t + \vartheta \right), \end{aligned} \quad (14.18)$$

откуда, приравнявая коэффициенты при одинаковых гармониках, находим:

$$u_{nm}^{(1)}(a) = \frac{f_{nm}^{(0)}(a)}{\left(\frac{p}{q}v\right)^2 - \left(nv + m\frac{p}{q}v\right)^2} \quad (14.19)$$

для всех n, m , удовлетворяющих условию

$$\left(\frac{p}{q}v\right)^2 - \left(nv + m\frac{p}{q}v\right)^2 \neq 0$$

или эквивалентному условию

$$nq + (m \pm 1)p \neq 0;$$

получаем так же соотношение для определения $A_1(a, \vartheta)$ и $B_1(a, \vartheta)$:

$$\begin{aligned} 2\frac{p}{q}vA_1 \sin\left(\frac{p}{q}vt + \vartheta\right) + \left(2a\frac{p}{q}vB_1 - \Delta a\right) \cos\left(\frac{p}{q}vt + \vartheta\right) + \\ + \sum_{[nq+(m\pm 1)p=0]} \sum_{\substack{n \\ m}} e^{i\{nvt+m\left(\frac{p}{q}vt+\vartheta\right)\}} f_{nm}^{(0)}(a) = 0. \end{aligned} \quad (14.20)$$

Подставляя значение $u_{nm}^{(1)}(a)$ (14.19) в правую часть формулы (14.16), находим:

$$u_1\left(a, vt, \frac{p}{q}vt + \vartheta\right) = \sum_{[nq+(m\pm 1)p \neq 0]} \sum_{\substack{n \\ m}} \frac{f_{nm}^{(0)}(a) e^{i\{nvt+m\left(\frac{p}{q}vt+\vartheta\right)\}}}{\left(\frac{p}{q}v\right)^2 - \left(nv + m\frac{p}{q}v\right)^2}. \quad (14.21)$$

Обратимся теперь к уравнению (14.20). Суммирование в нем, как указано, идет по всем целым n, m (положительным, отрицательным и нулевым), для которых

$$nq + (m \pm 1)p = 0. \quad (14.22)$$

Поэтому в данной сумме имеются комплексные экспоненты вида

$$\begin{aligned} e^{i\left\{(n+m\frac{p}{q})vt+m\vartheta\right\}} &= e^{i\left\{(nq+mp)\frac{v}{q}t+m\vartheta\right\}} = \\ &= e^{i\left\{\mp\frac{p}{q}vt+m\vartheta\right\}} = e^{i\left\{\mp\left(\frac{p}{q}vt+\vartheta\right)+(m\pm 1)\vartheta\right\}} = \\ &= \left\{\cos\left(\frac{p}{q}vt + \vartheta\right) \mp i\sin\left(\frac{p}{q}vt + \vartheta\right)\right\} e^{i(m\pm 1)\vartheta}. \end{aligned}$$

Заметим, кроме того, что в силу (14.22) $m \pm 1$ делится на q , так что мы можем записать этот сомножитель в виде $q\sigma$ ($-\infty < \sigma < \infty$).

Приравнявая коэффициенты при $\cos\left(\frac{p}{q}vt + \vartheta\right)$ и $\sin\left(\frac{p}{q}vt + \vartheta\right)$ в (14.20), имеем:

$$\left. \begin{aligned} A_1(a, \vartheta) &= \frac{q}{4\pi^2 v p} \sum_{\sigma} e^{iq\sigma\vartheta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \theta, \psi) e^{-iq\sigma\vartheta'} \sin\psi \, d\theta \, d\psi, \\ B_1(a, \vartheta) &= \frac{\Delta}{2} \frac{q}{pv} - \\ &- \frac{q}{4\pi^2 a pv} \sum_{\sigma} e^{iq\sigma\vartheta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \theta, \psi) e^{-iq\sigma\vartheta'} \cos\psi \, d\theta \, d\psi \\ &\quad \left(\vartheta' = \psi - \frac{p}{q}\theta\right). \end{aligned} \right\} \quad (14.23)$$

В формулах (14.23) суммирование производится для всех значений σ , как положительных, так и отрицательных, для которых интегралы, стоящие под знаком суммы, отличны от нуля. Эти интегралы будут отличны от нуля для тех значений σ , для которых суммарный показатель соответствующей экспоненты (полученной после разложения в ряд Фурье подынтегрального выражения) равен нулю. Таким образом, если правая часть уравнения (13.1) является полиномом относительно x , $\frac{dx}{dt}$, $\cos \nu t$ и $\sin \nu t$, то σ будет принимать конечное число целых значений.

Итак, в первом приближении для резонансного случая решение уравнения (13.1) будет:

$$x = a \cos \left(\frac{p}{q} \nu t + \vartheta \right),$$

где a и ϑ должны быть определены из системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon q}{4\pi^2 \nu p} \sum_{\sigma} e^{iq\sigma\vartheta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \theta, \phi) e^{-iq\sigma\vartheta'} \sin \phi \, d\theta \, d\phi, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \frac{\varepsilon \Delta q}{2p\nu} - \frac{\varepsilon q}{4\pi^2 a \nu p} \sum_{\sigma} e^{iq\sigma\vartheta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \theta, \phi) e^{-iq\sigma\vartheta'} \cos \phi \, d\theta \, d\phi. \end{aligned} \right\} (14.24)$$

Так как в резонансном случае предполагается, что расстройка $\varepsilon \Delta$ является величиной первого порядка малости, можем с той же степенью точности систему уравнений (14.24) представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon q}{4\pi^2 \nu p} \sum_{\sigma} e^{iq\sigma\vartheta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \theta, \phi) e^{-iq\sigma\vartheta'} \sin \phi \, d\theta \, d\phi, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega - \frac{p}{q} \nu - \frac{\varepsilon q}{4\pi^2 a \nu p} \sum_{\sigma} e^{iq\sigma\vartheta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \theta, \phi) e^{-iq\sigma\vartheta'} \cos \phi \, d\theta \, d\phi. \end{aligned} \right\} (14.25)$$

Зная выражения для $u_1 \left(a, \nu t, \frac{p}{q} \nu t + \vartheta \right)$, $A_1(a, \vartheta)$ и $B_1(a, \vartheta)$, можно в соответствии с (14.15) найти явное выражение для $f_1 \left(a, \nu t, \frac{p}{q} \nu t + \vartheta \right)$, после чего из уравнения (14.13) получим выражения для $A_2(a, \vartheta)$ и $B_2(a, \vartheta)$, необходимые для построения второго приближения:

$$\left. \begin{aligned} A_2(a, \vartheta) &= -\frac{q}{2\nu p} \left[a \frac{\partial B_1}{\partial a} A_1 + a \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta} B_1 + 2A_1 B_1 \right] - \\ &\quad - \frac{q}{4\pi^2 \nu p} \sum_{\sigma} e^{iq\sigma\vartheta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(a, \theta, \phi) e^{-iq\sigma\vartheta'} \sin \phi \, d\theta \, d\phi, \\ B_2(a, \vartheta) &= \frac{q}{2a\nu p} \left[\frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} B_1 - a B_1^2 \right] - \\ &\quad - \frac{q}{4\pi^2 a \nu p} \sum_{\sigma} e^{iq\sigma\vartheta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(a, \theta, \phi) e^{-iq\sigma\vartheta'} \cos \phi \, d\theta \, d\phi. \end{aligned} \right\} (14.26)$$

Перейдем теперь к рассмотрению самого общего случая.

Пусть требуется исследовать поведение системы как вблизи резонанса, так и для подходов к резонансной области из нерезонансной зоны. Для этого необходимо построить такие приближенные решения, которые

давали бы возможность изучить поведение системы для достаточно большого интервала частот и из которых как частные случаи можно было бы получить выведенные выше формулы как для резонансного случая, так и для нерезонансного.

Здесь мы уже не можем считать, что расстройка мала, и поэтому приближенное решение должны искать непосредственно для уравнения (13.1); кроме того, в выражения для мгновенной амплитуды и частоты надо ввести зависимость от угла сдвига фаз.

Таким образом, решение, как и выше, ищем в виде ряда

$$x = a \cos \left(\frac{p}{q} \nu t + \vartheta \right) + \varepsilon u_1(a, \nu t, \varphi) + \varepsilon^2 u_2(a, \nu t, \varphi) + \dots, \quad (14.27)$$

где a и ϑ должны быть определены из следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a, \vartheta) + \varepsilon^2 A_2(a, \vartheta) + \dots, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega - \frac{p}{q} \nu + \varepsilon B_1(a, \vartheta) + \varepsilon^2 B_2(a, \vartheta) + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (14.28)$$

причем разность $\omega - \frac{p}{q} \nu$ не обязательно мала.

Здесь, как и всегда, $u_1(a, \nu t, \varphi)$, $u_2(a, \nu t, \varphi)$ обладают периодом 2π по отношению к обоим угловым переменным φ и νt , а $A_i(a, \vartheta)$ и $B_i(a, \vartheta)$ ($i=1, 2, \dots$) периодические, с периодом 2π , по отношению к угловой переменной ϑ .

Для определения всех этих функций мы могли бы применить неоднократно использованный прием непосредственного дифференцирования разложений (14.27) и подстановки результата в основное уравнение с последующим приравнованием коэффициентов при одинаковых степенях. Вместо этого воспользуемся здесь рассуждениями, аналогичными тем, которые были применены при изложении метода гармонического баланса.

Для получения первого приближения рассмотрим главную гармонику

$$x = a \cos \varphi, \quad \varphi = \frac{p}{q} \nu t + \vartheta. \quad (14.29)$$

На основании принципа гармонического баланса при подстановке (14.29) в уравнение (13.1) с учетом системы уравнений (14.28) главные гармоники в левой и правой частях уравнения (13.1) должны быть равны.

Для получения второго приближения мы, естественно, при определении главной гармоники в левой части уравнения (13.1) должны учесть члены при ε^2 , а в выражении для $f\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right)$ должны учесть члены с $\varepsilon u_1(a, \nu t, \varphi)$.

Таким образом, во втором приближении для главной гармоники левой части уравнения (13.1) сразу получаем:

$$\begin{aligned} \text{главная гармоника } \left\{ \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x \right\} &= \left\{ \varepsilon \left[\left(\omega - \frac{p}{q} \nu \right) \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} - 2\omega a B_1 \right] + \right. \\ &+ \varepsilon^2 \left[\left(\omega - \nu \frac{p}{q} \right) \frac{\partial A_2}{\partial \vartheta} - 2a\omega B_2 + \frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} B_1 - B_1^2 a \right] \left. \right\} \cos \varphi - \\ &- \left\{ \varepsilon \left[\left(\omega - \frac{p}{q} \nu \right) a \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta} + 2\omega A_1 \right] + \varepsilon^2 \left[\left(\omega - \frac{p}{q} \nu \right) a \frac{\partial B_2}{\partial \vartheta} + 2\omega A_2 + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{\partial B_1}{\partial a} A_1 + \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta} B_1 + 2A_1 B_1 \right] \right\} \sin \varphi. \quad (14.30) \end{aligned}$$

Подставляя в правую часть уравнения (13.1) $x = a \cos \psi + \varepsilon u_1(a, \nu t, \psi)$, получаем с точностью до величин второго порядка малости для главной гармоники следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 \text{главная гармоника } \left\{ \varepsilon f \left(\nu t, x, \frac{dx}{dt} \right) \right\} = & \\
 = \varepsilon \sum_{\substack{n, m \\ [nq + (m \pm 1)p = 0]}} f_{nm}^{(0)}(a) e^{i \left\{ n \nu t + m \left(\frac{p}{q} \nu t + \psi \right) \right\}} + & \\
 + \varepsilon^2 \sum_{\substack{n, m \\ [nq + (m \pm 1)p = 0]}} f_{nm}^{(1)}(a) e^{i \left\{ n \nu t + m \left(\frac{p}{q} \nu t + \psi \right) \right\}} = & \\
 = \varepsilon \left\{ \cos \psi \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\sigma} e^{i\sigma q \vartheta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \theta, \psi) e^{-i\sigma q \vartheta'} \cos \psi d\theta d\psi + \right. & \\
 + \sin \psi \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\sigma} e^{i\sigma q \vartheta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \theta, \psi) e^{-i\sigma q \vartheta'} \sin \psi d\theta d\psi \left. \right\} + & \\
 + \varepsilon^2 \left\{ \cos \psi \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\sigma} e^{i\sigma q \vartheta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(a, \theta, \psi) e^{-i\sigma q \vartheta'} \cos \psi d\theta d\psi + \right. & \\
 + \sin \psi \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\sigma} e^{i\sigma q \vartheta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(a, \theta, \psi) e^{-i\sigma q \vartheta'} \sin \psi d\theta d\psi \left. \right\}, \quad (14.31)
 \end{aligned}$$

где введены обозначения:

$$f_0(a, \theta, \psi) = f(\theta, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi), \quad (14.32)$$

$$\begin{aligned}
 f_1(a, \theta, \psi) = f'_x(\theta, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) u_1 + f'_x(\theta, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \times & \\
 \times \left[A_1 \cos \psi - a B_1 \sin \psi + \frac{\partial u_1}{\partial \vartheta} \left(\omega - \frac{p}{q} \nu \right) \right] - \frac{\partial u_1}{\partial a} \left(\omega - \frac{p}{q} \nu \right) \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} - & \\
 - \frac{\partial u_1}{\partial \vartheta} \left(\omega - \frac{p}{q} \nu \right) \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta} - 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \vartheta^2} B_1 \left(\omega - \frac{p}{q} \nu \right) - 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial t} A_1 - & \\
 - 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \vartheta \partial t} B_1 - 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \vartheta} \left(\omega - \frac{p}{q} \nu \right) A_1. \quad (14.33)
 \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых гармониках в выражениях (14.30) и (14.31), получаем в первом приближении:

$$\left. \begin{aligned}
 \left(\omega - \frac{p}{q} \nu \right) \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} - 2a\omega B_1 = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\sigma} e^{i\sigma q \vartheta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \theta, \psi) e^{-i\sigma q \vartheta'} \cos \psi d\theta d\psi, \\
 \left(\omega - \frac{p}{q} \nu \right) a \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta} + 2\omega A_1 = -\frac{1}{2\pi^2} \sum_{\sigma} e^{i\sigma q \vartheta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \theta, \psi) e^{-i\sigma q \vartheta'} \sin \psi d\theta d\psi;
 \end{aligned} \right\} \quad (14.34)$$

во втором приближении:

$$\begin{aligned} \left(\omega - \frac{p}{q} \nu\right) \frac{\partial A_2}{\partial \vartheta} - 2a\omega B_2 = & - \left\{ \frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} B_1 - aB_1^2 \right\} + \\ & + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\sigma} e^{iq\sigma\vartheta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(a, \theta, \psi) e^{-iq\sigma\vartheta'} \cos \psi \, d\theta \, d\psi, \\ \left(\omega - \frac{p}{q} \nu\right) a \frac{\partial B_2}{\partial \vartheta} + 2\omega A_2 = & - \left\{ a \frac{\partial B_1}{\partial a} A_1 + a \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta} B_1 + \right. \\ & \left. + 2A_1 B_1 \right\} - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\sigma} e^{iq\sigma\vartheta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(a, \theta, \psi) e^{-iq\sigma\vartheta'} \sin \psi \, d\theta \, d\psi. \quad (14.35) \end{aligned}$$

Выражение для $\varepsilon u_1(a, \nu t, \psi)$ определяем как вынужденные колебания, возбуждаемые в x действием высших гармоник внешней силы $\varepsilon f\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right)$ в режиме гармонических колебаний ($x = a \cos \psi$, $\frac{dx}{dt} = -a\omega \sin \psi$):

$$\varepsilon u_1(a, \nu t, \psi) = \sum_{\substack{n, m \\ [nq + (m \pm 1)p \neq 0]}} \frac{e^{i(n\nu t + m\varphi)}}{\omega^2 - (n\nu + m\omega)^2} f_{nm}^{(0)}(a), \quad (14.36)$$

где

$$f_{nm}^{(0)}(a) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \theta, \psi) e^{-i(n\theta + m\psi)} \, d\theta \, d\psi. \quad (14.37)$$

Заметим, что в предыдущих случаях, «резонансном» и «нерезонансном», мы могли бы первое и второе приближения построить также, применяя изложенный метод гармонического баланса.

Скажем еще несколько слов по поводу определения $A_i(a, \vartheta)$ $B_i(a, \vartheta)$ ($i = 1, 2$) из систем уравнений (14.34) и (14.35).

Правые части этих уравнений периодические по ϑ и представляют собой суммы типа $\sum k_n(a) e^{in\vartheta}$, поэтому и решение для $A_i(a, \vartheta)$, $B_i(a, \vartheta)$ ($i = 1, 2$) мы должны искать в виде аналогичных сумм. В результате все выкладки при определении $A_i(a, \theta)$, $B_i(a, \vartheta)$ ($i = 1, 2$) сводятся к чисто тригонометрическим операциям.

Нетрудно заметить, что из выведенных нами формул для исследования как резонансной области, так и подходов к ней можно получить все ранее найденные формулы. Так, полагая в уравнениях (14.34) $\omega - \frac{p}{q} \nu = \varepsilon \Delta$, находим с точностью до величины первого порядка малости выражения для $A_1(a, \vartheta)$ и $B_1(a, \vartheta)$ (14.23), полученные в случае резонанса.

Резюмируя, приведем схему построения решения уравнения (13.1) в первом и во втором приближениях для самого общего случая. В качестве первого приближения принимаем:

$$x = a \cos\left(\frac{p}{q} \nu t + \vartheta\right), \quad (14.38)$$

где a и ϑ должны быть определены из уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a, \vartheta), \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega - \frac{p}{q} \nu + \varepsilon B_1(a, \vartheta), \end{aligned} \right\} \quad (14.39)$$

в которых $A_1(a, \vartheta)$ и $B_1(a, \vartheta)$ — частные, периодические решения системы (14.34). Во втором приближении полагаем:

$$x = a \cos\left(\frac{p}{q} \nu t + \vartheta\right) + \varepsilon u_1\left(a, \nu t, \frac{p}{q} \nu t + \vartheta\right), \quad (14.40)$$

где a и ϑ определяются уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a, \vartheta) + \varepsilon^2 A_2(a, \vartheta), \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega - \frac{p}{q} \nu + \varepsilon B_1(a, \vartheta) + \varepsilon^2 B_2(a, \vartheta), \end{aligned} \right\} \quad (14.41)$$

в которых $A_1(a, \vartheta)$, $B_1(a, \vartheta)$, $A_2(a, \vartheta)$, $B_2(a, \vartheta)$ должны быть найдены из систем (14.34) и (14.35), а $u_1\left(a, \nu t, \frac{p}{q} \nu t + \vartheta\right)$ по формуле (14.36).

Заметим еще раз, что уравнения второго приближения (14.41) с учетом выражений для $A_2(a, \vartheta)$ и $B_2(a, \vartheta)$ (14.35) кажутся достаточно сложными только потому, что они записаны в самом общем виде. Для конкретных примеров даже во втором приближении мы получаем сравнительно простые уравнения, определяющие амплитуду и фазу колебания (см., например, уравнения (13.56) и (15.38)).

Остановимся на рассмотрении первого приближения.

В отличие от нерезонансного случая здесь в уравнениях первого приближения (14.39) переменные не разделены, и мы имеем систему двух взаимно связанных уравнений для определения двух неизвестных a и ϑ .

Заметим сначала, что для достаточно больших p и q ввиду сделанного ранее предположения о полиномиальном характере функций $f_n\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ первое приближение в резонансном случае не отличается от нерезонансного случая. Действительно, для достаточно больших p и q в суммах, стоящих в правых частях уравнений (14.39), останутся только члены, соответствующие $\sigma = 0$, которые совпадают с выражениями (13.35), полученными в нерезонансном случае.

Таким образом, эффект резонанса сказывается, вообще говоря, при небольших значениях чисел p и q .

Возвратимся к рассмотрению уравнений первого приближения (14.39).

Так как правые части этих уравнений зависят от a и от ϑ , то проинтегрировать их в замкнутом виде в общем случае не удастся. Качественный характер решений может быть, однако, исследован и в общем случае с помощью теории Пуанкаре, потому что здесь мы имеем дело с двумя уравнениями первого порядка.

Согласно основным результатам этой теории (см. гл. III) можно утверждать, что всякое решение*) уравнений (14.39) приближается

*) Следует иметь в виду, что для всякого решения величина a должна оставаться конечной. С физической точки зрения это ограничение всегда выполняется, так как амплитуда колебаний не может неограниченно возрастать.

с возрастанием времени или к постоянным решениям

$$a = a_i, \vartheta = \vartheta_i \quad (i = 1, 2, \dots),$$

определяемым из уравнений

$$A_1(a, \vartheta) = 0, \quad \omega - \frac{p}{q} \nu + \varepsilon B_1(a, \vartheta) = 0, \quad (14.42)$$

или к периодическим.

Таким образом, получаем два основных типа стационарных колебаний: колебания, соответствующие постоянному решению или, как говорят, «точке равновесия» уравнений (14.39), и колебания, соответствующие периодическому решению.

В первом случае колебания в первом приближении совершаются с частотой, точно равной $\frac{p}{q} \nu$ и находящейся, следовательно, в простом рациональном соотношении с частотой возбуждения. Поэтому такой режим колебаний называется синхронным.

В высших приближениях (см., например, формулу (14.21)) в выражении для $u_1\left(a, \nu t, \frac{p}{q} \nu t + \vartheta\right)$, кроме основной частоты $\frac{p\nu}{q}$, присутствуют, вообще говоря, и другие обертоны разделенной частоты $\frac{\nu}{q}$.

В случае, если в системе существует постоянное решение типа $a = 0$, соответствующее отсутствию собственных колебаний, выражение для $u_1\left(a, \nu t, \frac{p}{q} \nu t + \vartheta\right)$ (14.21) будет то же самое, что и в нерезонансном случае (13.34), и представляет собой гетеропериодический режим колебаний.

Исследуем вопрос устойчивости стационарного синхронного режима. Для определения устойчивости постоянных решений a_0 и ϑ_0 , определяемых уравнениями (14.42), необходимо образовать соответствующие им уравнения в вариациях.

На основании (14.39) уравнения в вариациях можем записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\delta a}{dt} &= \varepsilon A'_{1a}(a_0, \vartheta_0) \delta a + \varepsilon A'_{1\vartheta}(a_0, \vartheta_0) \delta \vartheta, \\ \frac{d\delta \vartheta}{dt} &= \varepsilon B'_{1a}(a_0, \vartheta_0) \delta a + \varepsilon B'_{1\vartheta}(a_0, \vartheta_0) \delta \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (14.43)$$

Характеристическое уравнение для системы (14.43) будет:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon A'_{1a} - \lambda & \varepsilon A'_{1\vartheta} \\ \varepsilon B'_{1a} & \varepsilon B'_{1\vartheta} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (14.44)$$

или

$$\lambda^2 - (\varepsilon A'_{1a} + \varepsilon B'_{1\vartheta}) \lambda + \varepsilon^2 (A'_{1a} B'_{1\vartheta} - B'_{1a} A'_{1\vartheta}) = 0. \quad (14.45)$$

Из (14.45) получаем следующие условия устойчивости для рассматриваемых синхронных стационарных колебаний:

$$A'_{1a}(a_0, \vartheta_0) + B'_{1\vartheta}(a_0, \vartheta_0) < 0, \quad (14.46)$$

$$A'_{1a}(a_0, \vartheta_0) B'_{1\vartheta}(a_0, \vartheta_0) - A'_{1\vartheta}(a_0, \vartheta_0) B'_{1a}(a_0, \vartheta_0) > 0. \quad (14.47)$$

Во втором случае, соответствующем периодическому решению уравнений (14.39), в первом приближении колебание будет совершаться

с двумя основными частотами — с частотой ω или $\frac{p}{q}\nu + \Delta\omega$ и частотой биений $\Delta\omega$, где $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$ (T — период данного периодического решения). Эти колебания называются асинхронными.

В качестве примера, иллюстрирующего характер синхронного и асинхронного режимов, рассмотрим ламповый генератор, находящийся под воздействием внешней периодической силы с частотой ν .

В случае, если генератор составлен по схеме, приведенной на рис. 78, дифференциальное уравнение, описывающее колебательный процесс, будет:

$$\frac{d^2 e}{dt^2} + \omega^2 e = -\omega^2 \left[\frac{L}{R} \frac{de}{dt} - (M - DL) \frac{di_a}{dt} \right], \quad (14.48)$$

где L — самоиндукция, M — коэффициент взаимной индукции, R — сопротивление, D — проницаемость лампы, $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ — собственная частота линейного контура, C — емкость, $i_a = f(E_0 + F \cos \nu t + e)$ — характеристика лампы (i_a — анодный ток), $E = E_0 + F \cos \nu t + e$ — полное управляющее напряжение, E_0 — постоянная слагающая полного управляющего напряжения, $F \cos \nu t$ — слагающая нелинейного управляющего напряжения, вызываемая внешним возбуждением, e — слагающая управляющего напряжения, происходящая от колебаний в контуре.

Рассмотрим случай, когда $f(E_0 + u)$, где $u = e + F \cos \nu t$, является кубическим полиномом:

$$f(E_0 + u) = f(E_0) + S_0 u + S_1 u^2 - S_2 u^3, \quad (14.49)$$

в котором $S_2 > 0$.

Предположим, что члены, стоящие в правой части уравнения (14.48), малы; тогда колебания будут близки к гармоническим, и мы можем построить приближенное решение уравнения (14.48), воспользовавшись приведенными выше формулами.

Будем рассматривать «резонансный» случай, когда $p = 1$, $q = 2$, т. е. $\omega \approx \frac{\nu}{2}$.

Уравнение (14.48) перепишем в форме

$$\frac{d^2 e}{dt^2} + \frac{\nu^2}{4} e = -\omega^2 \left[\frac{L}{R} \frac{de}{dt} - (M - DL) \frac{di_a}{dt} \right] - \left(\omega^2 - \frac{\nu^2}{4} \right) e. \quad (14.50)$$

Решение в первом приближении ищем в виде

$$e = a \cos \psi, \quad \psi = \frac{\nu}{2} t + \vartheta,$$

где a и ϑ должны быть определены из системы уравнений

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a, \vartheta), \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \varepsilon B_1(a, \vartheta),$$

для составления которой воспользуемся методом гармонического баланса.

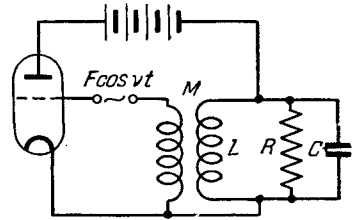


Рис. 78.

Подсчитаем главные гармоники в левой и правой частях уравнения (14.50); имеем (см., например, (14.10)):

$$\begin{aligned} \text{главная гармоника } \left\{ \frac{d^2 e}{dt^2} + \frac{\nu^2}{4} e \right\} &= \varepsilon A_1(a, \vartheta) \nu \sin \phi - \varepsilon B_1(a, \vartheta) a \nu \cos \phi; \\ \text{главная гармоника } \left\{ -\omega^2 \left[\frac{L}{R} \frac{de}{dt} - (M - DL) f_i (E_0 + F \cos \nu t + e) \right] - \right. \\ &\left. - \left(\omega^2 - \frac{\nu^2}{4} \right) e \right\} = - \left\{ \delta_0 \nu \left[-\frac{3S_2}{4S_{cr}} a^3 + \frac{S_0 - S_{cr} - \frac{3}{2} S_2 F^2}{S_{cr}} a \right] + \right. \\ &\left. + \frac{a \nu S_1 F \delta_0}{2S_{cr}} \cos 2\vartheta \right\} \sin \phi - \left\{ a \left(\omega^2 - \frac{\nu^2}{4} \right) - \frac{a \nu S_1 F \delta_0}{2S_{cr}} \sin 2\vartheta \right\} \cos \phi, \end{aligned}$$

где обозначено: $\delta_0 = \frac{1}{2RC}$, $S_{cr} = \frac{L}{R(M-DL)}$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках и учитывая, что $\omega + \frac{\nu}{2} \approx \nu$, получим для определения a и ϑ следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \delta_0 \left[-\frac{3S_2}{4S_{cr}} a^3 + \frac{S_0 - S_{cr} - \frac{3}{2} S_2 F^2}{S_{cr}} a \right] + \frac{aS_1 F \delta_0}{2S_{cr}} \cos 2\vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega - \frac{\nu}{2} - \frac{S_1 F \delta_0}{2S_{cr}} \sin 2\vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (14.51)$$

Ввиду того, что во второе уравнение системы (14.51) входит только одна неизвестная функция ϑ , оно может быть проинтегрировано с помощью квадратуры.

Однако, мы остановимся на другом вопросе.

Исследуем, при каких соотношениях между частотами ω и ν , а также коэффициентами полинома (14.49) в генераторе будут существовать стационарные колебания.

Допустим сначала, что

$$\left| \omega - \frac{\nu}{2} \right| < \left| \frac{\delta_0 S_1 F}{2S_{cr}} \right|. \quad (14.52)$$

Тогда, интегрируя второе уравнение системы (14.51), получим:

$$\vartheta(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \vartheta_0, \quad (14.53)$$

где

$$\vartheta_0 = \frac{1}{2} \arcsin 2 \frac{\omega - \frac{\nu}{2}}{\delta_0 S_1 F} S_{cr}. \quad (14.54)$$

Из первого уравнения системы (14.51) при выполнении (14.53) находим:

$$a(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} a_0, \quad (14.55)$$

где a_0 определяется из уравнения

$$\left(S_0 - S_{cr} - \frac{3}{2} S_2 F^2 + \frac{1}{2} S_1 F \cos 2\vartheta_0 \right) a_0 - \frac{3}{4} S_2 a_0^3 = 0. \quad (14.56)$$

Если

$$S_0 - S_{cr} - \frac{3}{2} S_2 F^2 + \frac{1}{2} S_1 F \cos 2\vartheta_0 < 0, \quad (14.57)$$

то, очевидно,

$$a_0 = 0.$$

Таким образом, при выполнении условий (14.52) и (14.57) в генераторе устанавливается гетеропериодический режим — единственный возможный в данном случае стационарный режим.

Пусть теперь

$$S_0 - S_{cr} - \frac{3}{2} S_2 F^2 + \frac{1}{2} S_1 F \cos 2\vartheta_0 > 0; \quad (14.58)$$

тогда решение $a_0 = 0$ неустойчиво и система будет самовозбуждающаяся.

Из уравнения (14.56) находим значение a_0 :

$$a_0 = \sqrt{\frac{4}{3S_0} \left[S_0 - S_{cr} - \frac{3}{2} S_2 F^2 + \frac{1}{2} S_1 F \cos 2\vartheta_0 \right]}. \quad (14.59)$$

Таким образом, при выполнении условий (14.52) и (14.58) в рассматриваемой колебательной системе устанавливается синхронный режим и в первом приближении

$$e = a_0 \cos \left(\frac{\nu}{2} t + \vartheta_0 \right), \quad (14.60)$$

где a_0 и ϑ_0 определяются выражениями (14.59) и (14.54), т. е. в генераторе устанавливаются стационарные колебания с постоянными амплитудой и фазой и с частотой, равной половине частоты возбуждения.

Согласно условию (14.52) расстройка резонанса $\left| \omega - \frac{\nu}{2} \right|$ не должна при этом превосходить некоторой величины. Иначе говоря, синхронный режим возможен при достаточно малых значениях расстройки.

Рассмотрим теперь случай, когда ω , оставаясь достаточно близкой к $\frac{\nu}{2}$, так что условия применимости уравнений (14.51) выполняются, удовлетворяет неравенству

$$\left| \omega - \frac{\nu}{2} \right| > \left| \frac{\delta_0 S_1 F}{2S_{cr}} \right|, \quad (14.61)$$

Тогда, проинтегрировав второе уравнение системы (14.62), можно представить ϑ в виде

$$\vartheta = \Delta\omega t + \Phi(\Delta\omega t + \theta), \quad (14.62)$$

где θ — произвольная постоянная, $\Phi(\theta)$ — периодическая функция θ с периодом 2π ,

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad T = \int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{\omega - \frac{\nu}{2} - \left| \frac{S_1 F \delta_0}{2S_{cr}} \right| \sin 2\vartheta}. \quad (14.63)$$

Подставляя значение ϑ (14.62) в первое уравнение системы (14.51), получаем для определения стационарных значений амплитуды уравнение первого порядка с периодическим коэффициентом.

Это уравнение допускает решение $a = 0$, соответствующее гетеропериодическому режиму. Вопрос об устойчивости решения $a = 0$ зависит от

знака выражения

$$S_0 - S_{cr} - \frac{3}{2} S_2 F^2 + \frac{1}{2} S_1 F \overline{\cos 2\vartheta}, \quad (14.64)$$

где $\overline{\cos 2\vartheta}$ обозначает усредненное значение $\cos 2\vartheta$ по периоду T :

$$\overline{\cos 2\vartheta} = \frac{1}{T} \int_0^T \cos 2\vartheta dt. \quad (14.65)$$

Благодаря (14.63) имеем $\overline{\cos 2\vartheta} = 0$, и поэтому выражение (14.64) принимает вид

$$S_0 - S_{cr} - \frac{3}{2} S_2 F^2. \quad (14.66)$$

Если выражение (14.66) отрицательно, то самовозбуждение отсутствует и гетеропериодический режим $a = 0$ устойчив; если же выражение (14.66) положительно, то в системе имеют место самовозбуждение и, следовательно, неустойчивость гетеропериодического режима.

Итак, при выполнении условия (14.61) и условия

$$S_0 - S_{cr} - \frac{3}{2} S_2 F^2 > 0 \quad (14.67)$$

можно показать, что

$$a(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} A(\Delta\omega t + \theta), \quad (14.68)$$

где $A(\Delta\omega t + \theta)$ — соответствующее периодическое решение с периодом $T = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$ первого уравнения системы (14.51) после подстановки в него значения ϑ из (14.62).

В частности, при достаточно больших значениях расстройки $\left| \omega - \frac{\nu}{2} \right|$ получаем приближенно:

$$A(\theta) \approx a_0, \quad (14.69)$$

где

$$a_0^2 = \frac{4}{3S_0} \left(S_0 - S_{cr} - \frac{3}{2} S_2 F^2 \right),$$

т. е. значение стационарной амплитуды в нерезонансном случае.

Итак, при выполнении условий (14.61) и (14.67) в генераторе устанавливается стационарный двухчастотный режим — асинхронные колебания. В первом приближении для стационарных колебаний получаем выражение

$$e = A(\Delta\omega t + \theta) \cos \left[\left(\frac{\nu}{2} + \Delta\omega \right) t + \theta + \Phi(\Delta\omega t + \theta) \right], \quad (14.70)$$

в котором $\frac{\nu}{2} + \Delta\omega$ — основная частота, а амплитуда $A(\Delta\omega t + \theta)$ и фаза $\theta + \Phi(\Delta\omega t + \theta)$ колеблются с частотой биений $\Delta\omega$.

Анализируя выражение (14.70), нетрудно заметить, что в этом случае при удалении от резонанса колебания приближаются к нерезонансным колебаниям вида

$$e = a \cos(\omega t + \theta).$$

Этот факт, очевидно, имеет место и в самом общем случае. Исследуя общие уравнения первого приближения (14.39), можно показать, что при увеличении расстройки $\left| \omega - \frac{\nu}{2} \right|$ «резонансное» первое приближение непрерывно переходит в «нерезонансное».

§ 15. Воздействие синусоидальной силы на нелинейный вибратор

В качестве частного случая колебательной системы, описываемой уравнением (13.1), рассмотрим нелинейный вибратор, находящийся под воздействием гармонической силы. Колебания такой системы, как указывалось выше, описываются следующим дифференциальным уравнением:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = \varepsilon f \left(x, \frac{dx}{dt} \right) + \varepsilon E \sin \nu t^* \quad (15.1)$$

Анализируя во введении это уравнение, мы пришли к заключению, что в первом приближении может быть обнаружен только основной резонанс.

Итак, пользуясь ранее выведенными формулами, построим приближенные решения уравнения (15.1) в случае основного резонанса ($p = 1, q = 1$). Согласно (14.39) и (14.40) в первом приближении имеем:

$$x = a \cos(\nu t + \vartheta), \quad (15.2)$$

где a и ϑ должны быть определены из системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega m} \int_0^{2\pi} f_0(a, \phi) \sin \phi d\phi - \frac{\varepsilon E}{m(\omega + \nu)} \cos \vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega - \nu - \frac{\varepsilon}{2\pi\omega am} \int_0^{2\pi} f_0(a, \phi) \cos \phi d\phi + \frac{\varepsilon E}{ma(\omega + \nu)} \sin \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (15.3)$$

Во втором приближении полагаем

$$x = a \cos \phi + \varepsilon u_1(a, \phi), \quad (15.4)$$

где $u_1(a, \phi)$ определяется как вынужденное колебание, возбуждаемое в системе высшими гармониками внешней силы в режиме синусоидальных колебаний:

$$\begin{aligned} u_1(a, \phi) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m \neq 1} \frac{e^{im\phi}}{\omega^2(1-m^2)} f_m^{(0)}(a), \\ f_m^{(0)}(a) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \phi) e^{-im\phi} d\phi, \end{aligned}$$

*) В данном случае предполагается, что амплитуда внешней гармонической силы мала. Если, исходя из физических соображений, такого вывода сделать нельзя, то имеем уравнение

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = \varepsilon f \left(x, \frac{dx}{dt} \right) + E \sin \nu t,$$

которое заменой $x = y + \frac{E}{k - \nu^2 m} \sin \nu t$ приводится к уравнению типа (13.1).