

Этот факт, очевидно, имеет место и в самом общем случае. Исследуя общие уравнения первого приближения (14.39), можно показать, что при увеличении расстройки $\left| \omega - \frac{\nu}{2} \right|$ «резонансное» первое приближение непрерывно переходит в «нерезонансное».

§ 15. Воздействие синусоидальной силы на нелинейный вибратор

В качестве частного случая колебательной системы, описываемой уравнением (13.1), рассмотрим нелинейный вибратор, находящийся под воздействием гармонической силы. Колебания такой системы, как указывалось выше, описываются следующим дифференциальным уравнением:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = \varepsilon f \left(x, \frac{dx}{dt} \right) + \varepsilon E \sin \nu t^* \quad (15.1)$$

Анализируя во введении это уравнение, мы пришли к заключению, что в первом приближении может быть обнаружен только основной резонанс.

Итак, пользуясь ранее выведенными формулами, построим приближенные решения уравнения (15.1) в случае основного резонанса ($p = 1, q = 1$). Согласно (14.39) и (14.40) в первом приближении имеем:

$$x = a \cos(\nu t + \vartheta), \quad (15.2)$$

где a и ϑ должны быть определены из системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega m} \int_0^{2\pi} f_0(a, \phi) \sin \phi d\phi - \frac{\varepsilon E}{m(\omega + \nu)} \cos \vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega - \nu - \frac{\varepsilon}{2\pi\omega am} \int_0^{2\pi} f_0(a, \phi) \cos \phi d\phi + \frac{\varepsilon E}{ma(\omega + \nu)} \sin \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (15.3)$$

Во втором приближении полагаем

$$x = a \cos \phi + \varepsilon u_1(a, \phi), \quad (15.4)$$

где $u_1(a, \phi)$ определяется как вынужденное колебание, возбуждаемое в системе высшими гармониками внешней силы в режиме синусоидальных колебаний:

$$\begin{aligned} u_1(a, \phi) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m \neq 1} \frac{e^{im\phi}}{\omega^2(1-m^2)} f_m^{(0)}(a), \\ f_m^{(0)}(a) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \phi) e^{-im\phi} d\phi, \end{aligned}$$

*) В данном случае предполагается, что амплитуда внешней гармонической силы мала. Если, исходя из физических соображений, такого вывода сделать нельзя, то имеем уравнение

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = \varepsilon f \left(x, \frac{dx}{dt} \right) + E \sin \nu t,$$

которое заменой $x = y + \frac{E}{k - \nu^2 m} \sin \nu t$ приводится к уравнению типа (13.1).

a и ϑ должны быть определены из системы уравнений второго приближения, для построения которой воспользуемся формулами (14.34) и (14.35).

Сначала находим согласно (14.31) и (14.32) главную гармонику функции $\varepsilon^2 f_1(a, \psi)$:

$$\begin{aligned} \text{главная гармоника } \{ \varepsilon^2 f_1(a, \psi) \} = \\ = \frac{\varepsilon^2 \cos \psi}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}_1(a, \psi) \cos \psi d\psi + \frac{\varepsilon^2 \sin \psi}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}_1(a, \psi) \sin \psi d\psi, \end{aligned}$$

где обозначено:

$$\begin{aligned} \bar{f}_1(a, \psi) = f'_x(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) u_1(a, \psi) + \\ + f'_{x'}(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \left[A_1 \cos \psi - aB_1 \sin \psi + \frac{\partial u_1}{\partial \vartheta}(\omega - \nu) \right]. \end{aligned}$$

Далее, согласно (14.35) для определения $A_2(a, \vartheta)$ и $B_2(a, \vartheta)$ составляем систему

$$\begin{aligned} m \left[(\omega - \nu) \frac{\partial A_2}{\partial \vartheta} - 2a\omega B_2 \right] = \\ = -m \left[\frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} B_1 - aB_1^2 \right] + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}_1(a, \psi) \cos \psi d\psi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m \left[(\omega - \nu) a \frac{\partial B_2}{\partial \vartheta} + 2\omega A_2 \right] = \\ = -m \left[a \frac{\partial B_1}{\partial a} A_1 + a \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta} B_1 + 2A_1 B_1 \right] - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}_1(a, \psi) \sin \psi d\psi. \end{aligned}$$

После этого, зная $A_1(a, \vartheta)$, $A_2(a, \vartheta)$, $B_1(a, \vartheta)$, $B_2(a, \vartheta)$, не представляет труда составить уравнения, определяющие a и ϑ , во втором приближении.

Остановимся подробнее на исследовании первого приближения.

Как и в случае нелинейной системы, находящейся под воздействием возмущения, не зависящего явно от времени, положим для сокращения (см. (7.4))

$$\left. \begin{aligned} \lambda_e(a) &= \frac{\varepsilon}{\pi a \omega} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi) \sin \psi d\psi, \\ k_e(a) &= k - \frac{\varepsilon}{\pi a} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi) \cos \psi d\psi \end{aligned} \right\} \quad (15.5)$$

и заметим, что введенные параметры $\lambda_e(a)$, $k_e(a)$ являются соответственно эквивалентным коэффициентом затухания и полным эквивалентным коэффициентом упругости для рассматриваемой колебательной системы в «свободном» состоянии при отсутствии внешнего возбуждения, т. е. для системы, описываемой уравнением вида

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = \varepsilon f \left(x, \frac{dx}{dt} \right). \quad (15.6)$$

После этого уравнения (15.3) можно записать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\delta_e(a) a - \frac{\varepsilon E}{m(\omega + \nu)} \cos \vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_e(a) - \nu + \frac{\varepsilon E}{ma(\omega + \nu)} \sin \vartheta, \end{aligned} \right\} \quad (15.7)$$

где $\delta_e(a) = \frac{\lambda_e(a)}{2m}$, $\omega_e(a) = \sqrt{\frac{k_e(a)}{m}}$ являются соответственно эквивалентным декрементом затухания и эквивалентной частотой нелинейных собственных колебаний, описываемых уравнением (15.6).

Рассмотрим стационарные режимы колебаний. Для получения в первом приближении стационарных значений амплитуды a и фазы ϑ необходимо приравнять нулю правые части уравнений (15.7), после чего получим соотношения:

$$\left. \begin{aligned} -\delta_e(a) a - \frac{\varepsilon E}{m(\omega + \nu)} \cos \vartheta &= 0, \\ \omega_e(a) - \nu + \frac{\varepsilon E}{ma(\omega + \nu)} \sin \vartheta &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (15.8)$$

или с точностью до величин второго порядка малости следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} 2m\nu a\delta_e(a) &= -\varepsilon E \cos \vartheta, \\ ma[\omega_e^2(a) - \nu^2] &= -\varepsilon E \sin \vartheta, \end{aligned} \right\} \quad (15.9)$$

откуда, исключая фазу ϑ , находим зависимость между амплитудой стационарных колебаний и частотой внешней силы:

$$m^2 a^2 [(\omega_e^2(a) - \nu^2)^2 + 4\nu^2 \delta_e^2(a)] = \varepsilon^2 E^2. \quad (15.10)$$

Полученные нами уравнения (15.9) и (15.10) совпадают с уравнениями, которые в классической линейной теории используются для определения амплитуды и фазы вынужденного колебания

$$x = a \cos(\nu t + \vartheta) \quad (15.11)$$

в системе с массой m , коэффициентом упругости $k_e(a)$ и коэффициентом затухания $\lambda_e(a)$ (и соответственно с частотой $\omega_e(a) = \sqrt{\frac{k_e(a)}{m}}$ и декрементом $\delta_e(a) = \frac{\lambda_e(a)}{2m}$), находящейся под воздействием внешней синусоидальной силы $\varepsilon E \sin \nu t$.

Поэтому можем сформулировать следующее правило. Пусть дана некоторая нелинейная система, находящаяся под воздействием внешней синусоидальной силы с частотой, близкой к собственной частоте системы. Требуется найти значения амплитуды и фазы стационарного синхронного колебания (15.2).

Для этого, линеаризируя данную колебательную систему в свободном состоянии (т. е. не принимая во внимание внешней силы $\varepsilon E \sin \nu t$), определяем функции амплитуды — эквивалентный декремент и эквивалентную частоту собственных колебаний.

Подставив найденные значения в классические соотношения линейной теории колебаний (15.9) и (15.10), получим уравнение для определения искомых величин амплитуды и фазы.

Настоящее правило сформулировано для частного случая колебательной системы, описываемой дифференциальным уравнением (15.1), однако оно может быть распространено и на более общие случаи колебательных систем.

Выведем условия устойчивости для рассматриваемых синхронных стационарных колебаний.

Для резонансного случая уравнения первого приближения (15.7) с точностью до величин второго порядка малости могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} 2\nu \frac{da}{dt} &= -2\nu a \delta_{el}(a) - \frac{\varepsilon E}{m} \cos \vartheta, \\ 2\nu a \frac{d\vartheta}{dt} &= [\omega_e^2(a) - \nu^2] a + \frac{\varepsilon E}{m} \sin \vartheta, \end{aligned} \quad (15.12)$$

а уравнения стационарных синхронных режимов — в виде

$$\left. \begin{aligned} R(a, \vartheta) &= 0, \\ \Phi(a, \vartheta) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (15.13)$$

где через $R(a, \vartheta)$ и $\Phi(a, \vartheta)$ обозначены соответственно правые части уравнений (15.12).

Пусть a и ϑ — какие-либо решения уравнений (15.13). Для исследования вопроса об их устойчивости воспользуемся выведенными ранее условиями (см. (14.46), (14.47)). Применительно к нашему случаю они будут иметь следующий вид:

$$aR'_a(a, \vartheta) + \Phi'_\vartheta(a, \vartheta) < 0, \quad (15.14)$$

$$R'_a(a, \vartheta) \Phi'_\vartheta(a, \vartheta) - R'_\vartheta(a, \vartheta) \Phi'_a(a, \vartheta) > 0. \quad (15.15)$$

Раскроем смысл этих неравенств.

Из (15.14) имеем:

$$aR'_a(a, \vartheta) + \Phi'_\vartheta(a, \vartheta) = -2\nu a \delta_e(a) - 2\nu a^2 \frac{d\delta_e(a)}{da} + \frac{\varepsilon E}{m} \cos \vartheta,$$

откуда, принимая во внимание первое уравнение системы (15.12), находим:

$$aR'_a(a, \vartheta) + \Phi'_\vartheta(a, \vartheta) = -2\nu a \frac{d(a\delta_e(a))}{da} - 2\nu a \delta_e(a) = -2\nu \frac{d(a^2\delta_e(a))}{da}. \quad (15.16)$$

Имея в виду введенные обозначения (15.15), можем написать:

$$2\nu a^2 \delta_e(a) = \frac{a^2 \lambda_e(a)}{m} \nu = \frac{2\nu}{m\omega^2} W(a), \quad (15.17)$$

где

$$W(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon f(a \cos(\omega t + \vartheta), -a\omega \sin(\omega t + \vartheta)) a\omega \sin(\omega t + \vartheta) d(\omega t + \vartheta) \quad (15.18)$$

представляет среднюю мощность, рассеянную силой $\varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ при колебаниях

$$x = a \cos(\omega t + \vartheta).$$

При обычных законах трения $W(a)$ возрастает вместе с амплитудой, так что

$$W'(a) > 0.$$

Таким образом, если ограничиться рассмотрением систем с обычным законом трения, то условие (15.14) согласно выражениям (15.16) и (15.17) будет всегда выполняться.

Рассмотрим теперь условие (15.15). Для этого исследуем зависимость a и ϑ — решений уравнений (15.13) — от частоты ν .

Дифференцируя (15.13) по ν , получим:

$$\left. \begin{aligned} R'_a \frac{da}{d\nu} + R'_\vartheta \frac{d\vartheta}{d\nu} &= -R'_\nu, \\ \Phi'_a \frac{da}{d\nu} + \Phi'_\vartheta \frac{d\vartheta}{d\nu} &= -\Phi'_\nu, \end{aligned} \right\} \quad (15.19)$$

откуда находим:

$$(R'_a \Phi'_\vartheta - \Phi'_a R'_\vartheta) \frac{da}{d\nu} = \Phi'_\nu R'_\vartheta - R'_\nu \Phi'_\vartheta. \quad (15.20)$$

С другой стороны, из (15.13) имеем

$$\left. \begin{aligned} R'_\vartheta &= \frac{\varepsilon E}{m} \sin \vartheta, \quad R'_\nu = -2\delta_e(a) a, \\ \Phi'_\vartheta &= \frac{\varepsilon E}{m} \cos \vartheta, \quad \Phi'_\nu = -2\nu a, \end{aligned} \right\} \quad (15.21)$$

в связи с чем правую часть (15.20) можем записать следующим образом:

$$\Phi'_\nu R'_\vartheta - R'_\nu \Phi'_\vartheta = 2a\varepsilon \left(-\nu \frac{E}{m} \sin \vartheta + \delta_e(a) \frac{E}{m} \cos \vartheta \right),$$

или, учитывая уравнения (15.9), в виде

$$\Phi'_\nu R'_\vartheta - R'_\nu \Phi'_\vartheta = 2\nu a^2 [(\omega_e^2(a) - \nu^2) - 2\delta_e^2(a)]. \quad (15.22)$$

Таким образом, из (15.20) и (15.22) вытекает, что

$$(R'_a \Phi'_\vartheta - \Phi'_a R'_\vartheta) \frac{da}{d\nu} = 2\nu a^2 [(\omega_e^2(a) - \nu^2) - 2\delta_e^2(a)].$$

После этого очевидно, что условие устойчивости (15.15) может быть представлено в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{d\nu} &> 0, \text{ если } \omega_e^2(a) > \nu^2 + 2\delta_e^2(a), \\ \frac{da}{d\nu} &< 0, \text{ если } \omega_e^2(a) < \nu^2 + 2\delta_e^2(a), \end{aligned} \right\} \quad (15.23)$$

или с точностью до величин первого порядка малости ($\delta_e^2(a)$ — величина второго порядка малости):

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{d\nu} &> 0, \text{ если } \omega_e(a) > \nu, \\ \frac{da}{d\nu} &< 0, \text{ если } \omega_e(a) < \nu, \end{aligned} \right\} \quad (15.24)$$

Полученные условия устойчивости (15.24) очень удобны при графическом представлении зависимости амплитуды от частоты.

В самом деле, воспользовавшись уравнением (15.10), построим кривую (рис. 79)

$$a = F(\nu) \quad (15.25)$$

(резонансную кривую), а также построим кривую

$$a = F_0(\nu), \quad (15.26)$$

определяемую уравнением точного резонанса

$$\omega_e(a) = \nu$$

(так называемую скелетную кривую).

Тогда на ветви кривой (15.25), лежащей левее кривой (15.26), устойчивыми (т. е. соответствующими устойчивым амплитудам) будут те участки, на которых a возрастает вместе с ν ; на ветви, лежащей правее кривой (15.26), устойчивыми будут те участки, на которых a убывает с возрастанием ν .

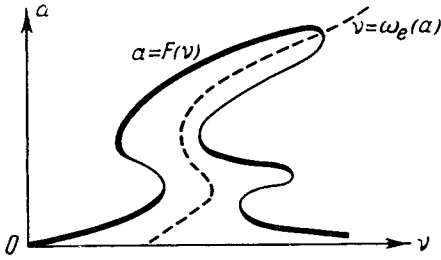


Рис. 79.

Графическое построение делает наглядной зависимость устойчивой стационарной амплитуды от частоты возбуждающей силы и, в частности, позволяет определить точки срыва и скачка, обуславливающие гистерезисные явления, характерные только для нелинейных систем.

В качестве конкретного примера рассмотрим нелинейный вибратор с жесткой характеристикой нелинейной восстанавливающей силы ($F = cx + dx^3$), находящийся под воздействием внешней синусоидальной силы. Пусть колебания вибратора описываются уравнением вида

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx + dx^3 = E \sin \nu t, \quad (15.27)$$

где x — координата, определяющая положение системы, t — время, m — масса системы, b — коэффициент сопротивления, $F = cx + dx^3$ — нелинейная восстанавливающая упругая сила, E и ν — соответственно амплитуда и частота внешней синусоидальной силы.

Введем для упрощения безразмерные x_1 и t_1 по формулам:

$$x_1 = \sqrt{\frac{c}{d}} x, \quad t_1 = \sqrt{\frac{c}{m}} t.$$

Тогда уравнение (15.27) можно представить в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \delta \frac{dx}{dt} + x + x^3 = E_1 \sin \nu t, \quad (15.28)$$

где $\delta = \frac{b}{\sqrt{mc}}$, $E_1 = \frac{E}{c} \sqrt{\frac{a}{c}}$ и для упрощения опущены индексы при x и t .

Допустим теперь, что в исследуемой системе трение, а также амплитуда внешней силы являются малыми и, кроме того, характеристика нелинейной восстанавливающей силы достаточно близка к линейной.

Тогда, сопоставляя уравнение (15.28) с (15.1), имеем:

$$\varepsilon f \left(x, \frac{dx}{dt} \right) = -\delta \frac{dx}{dt} - x^3, \quad \varepsilon E = E_1, \quad (15.29)$$

после чего, воспользовавшись формулами (15.2), (15.5) и (15.7), получим в первом приближении решение уравнения (15.18) для случая основного резонанса в виде

$$x = a \cos(\nu t + \vartheta), \quad (15.30)$$

где a и ϑ должны быть определены из системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\delta a}{2} - \frac{E_1}{1+\nu} \cos \vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= 1 - \nu + \frac{3a^2}{8} + \frac{E_1}{a(1+\nu)} \sin \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (15.31)$$

Перейдем сразу к рассмотрению стационарного режима синхронных колебаний. При таком режиме в первом приближении согласно (15.30) величина x будет изменяться по косинусоиде с частотой внешнего возбуждения и с постоянными амплитудой и фазой, определяемыми с точностью до величин второго порядка малости системой уравнений

$$\left. \begin{aligned} -\delta a - E_1 \cos \vartheta &= 0, \\ a \left[\left(1 + \frac{3a^2}{8} \right)^2 - \nu^2 \right] + E_1 \sin \vartheta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15.32)$$

Согласно (15.5) для уравнения (15.28) имеем:

$$\delta_e(a) = \delta, \quad \omega_e(a) = 1 + \frac{3a^2}{8}. \quad (15.33)$$

Исключая из соотношений (15.32) фазу ϑ (или непосредственно подставляя значения $\delta_e(a)$ и $\omega_e(a)$ (15.33) в (15.10)), находим следующую зависимость между амплитудой стационарных колебаний и частотой внешней силы:

$$a^2 \left\{ \left[\left(1 + \frac{3a^2}{8} \right)^2 - \nu^2 \right]^2 + \delta^2 \right\} = E_1^2 \quad (15.34)$$

из которой находим:

$$\nu = \sqrt{\omega_e^2(a) \pm \sqrt{\frac{E_1^2}{a^2} - \delta^2}}. \quad (15.35)$$

При помощи этой зависимости строим резонансную кривую (рис. 80), а также скелетную кривую, определяемую уравнением

$$1 + \frac{3a^2}{8} = \nu \quad (15.36)$$

(рис. 80, пунктирная линия).

При помощи полученной диаграммы согласно приведенному на стр. 190 правилу легко установить зоны устойчивых и неустойчивых амплитуд.

Так, устойчивым амплитудам будут соответствовать участки резонансной кривой MAV и DCN . Точки B и D будут являться точками срыва и скачка амплитуды.

Диаграмма, приведенная на рис. 80, позволяет полностью проанализировать характер колебаний в исследуемой системе при изменении частоты внешней силы. Так, при увеличении частоты внешней силы, начиная от малых значений, амплитуда вынужденных колебаний нарастает сначала по кривой MAV . В точке B происходит срыв амплитуды — значение амплитуды скачком переходит в точку C и при дальнейшем увеличении частота изменяется по кривой CN . Если теперь начать уменьшать частоту, то амплитуда вынужденных колебаний

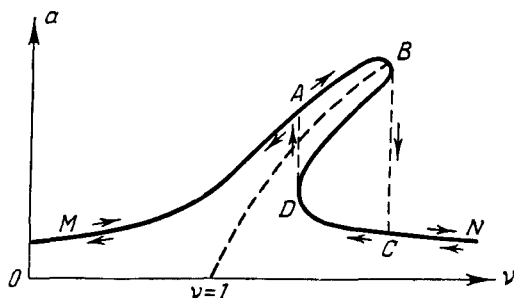


Рис. 80.

будет изменяться по кривой NCD . Дойдя до точки D , значение амплитуды перейдет в точку A и дальше будет изменяться по верхней ветви резонансной кривой AM .

Заметим, что, говоря об изменении частоты внешней силы, мы подразумеваем очень медленное ее изменение, такое, что практически в каждый момент систему можно рассматривать как стационарную. Ниже этот вопрос будет более подробно рассмотрен в связи с явлением прохождения через резонанс.

Приведем теперь решение уравнения (15.28), соответствующее второму приближению. Согласно формулам (15.4) и (14.42) во втором приближении имеем:

$$x = a \cos(\nu t + \vartheta) + \frac{a^3}{32} \cos 3(\nu t + \vartheta), \quad (15.37)$$

где a и ϑ должны быть определены из системы уравнений второго приближения:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\delta a}{2} + \frac{3a^3\delta}{16} - E_1 \left[\frac{1}{1+\nu} - \frac{3a^2(7-\nu)}{8(3-\nu)(1+\nu)^2} \right] \cos \vartheta - \frac{E_1\delta}{2(1+\nu)^2} \sin \vartheta, \quad (15.38)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{dt} = 1 - \nu + \frac{3a^2}{8} - \frac{\delta^2}{8} - \frac{15a^4}{256} + \\ + \frac{E_1}{a} \left[\frac{1}{1+\nu} - \frac{3a^2(5-3\nu)}{8(3-\nu)(1+\nu)^2} \right] \sin \vartheta - \frac{E_1\delta}{2a(1+\nu)^2} \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Как следует из выражения (15.37), во втором приближении появляются высшие гармоники, и колебание уже не будет являться чисто синусоидальным.

Приравняв правые части уравнений (15.38) нулю и исключая угол ϑ , получаем зависимость между амплитудой колебания a и частотой внешней силы ν во втором приближении. При помощи этого соотношения строим резонансную кривую во втором приближении (рис. 81, пунктирная линия).

Как указывалось выше, в колебательной системе, описываемой уравнением (15.1), в первом приближении возможно обнаружить только один резонанс, а именно главный резонанс ($p=1$, $q=1$). Демультпликационные резонансы замет-

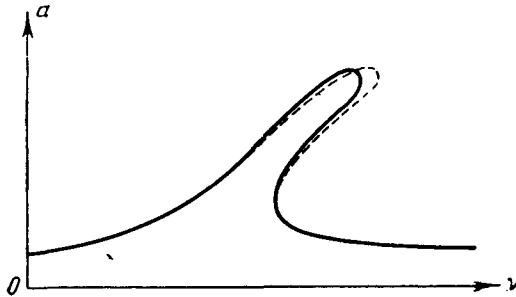


Рис. 81.

ны только при рассмотрении высших приближений.

Для того чтобы проиллюстрировать это, построим первое и второе приближение для колебательной системы, описываемой уравнением (15.28) в случае $p=1$, $q=3$.

Согласно формулам (14.38), (14.39) в первом приближении имеем:

$$x = a \cos\left(\frac{1}{3}\nu t + \vartheta\right), \quad (15.39)$$

где a и ϑ должны быть определены из уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\delta a}{2}, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= 1 - \frac{1}{3}v + \frac{3a^2}{8}. \end{aligned} \right\} \quad (15.40)$$

Правые части уравнений (15.40) зависят только от a и характеризуют систему в нерезонансном случае. Интегрируя эти уравнения, получаем для x выражение

$$x = a_0 e^{-\frac{\delta}{2}t} \cos \left[t - \frac{3a_0^2}{8\delta} e^{-\delta t} + \vartheta_0 \right], \quad (15.41)$$

a_0 и ϑ_0 — произвольные постоянные. Таким образом, в первом приближении колебания системы описываются затухающей по экспоненциальному закону косинусоидой и частота колебаний зависит от амплитуды.

Никакого эффекта резонанса в первом приближении не будет; а ввиду того, что амплитуда внешнего синусоидального возбуждения порядка ϵ , то в первом приближении не имеют места даже вынужденные колебания с частотой возбуждения (вынужденные колебания будут заметны при рассмотрении улучшенного первого приближения).

Подсчитаем теперь второе приближение. Воспользовавшись формулами (14.40) и (14.41), находим для x следующее выражение:

$$x = a \cos\left(\frac{1}{3}vt + \vartheta\right) + \frac{a^3}{32} \cos 3\left(\frac{1}{3}vt + \vartheta\right) - \frac{E_1}{8} \sin vt, \quad (15.42)$$

в котором a и ϑ — решения уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\delta a}{2} + \frac{3}{16} \delta a^3 - \frac{3a^2 E_1}{32 \left(1 + \frac{v}{3}\right)} \cos 3\vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= 1 - \frac{v}{3} + \frac{3a^2}{8} - \frac{\delta^2}{8} - \frac{15a^4}{256} + \frac{3a E_1}{32 \left(1 + \frac{v}{3}\right)} \sin 3\vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (15.43)$$

Выражения (15.42) и (15.43) свидетельствуют о влиянии внешнего возбуждения на колебательную систему, которое мы обнаруживаем при рассмотрении второго приближения. Так, согласно (15.42) в выражении для x , кроме обертонов собственной частоты, появились также и гармоники с частотой внешней силы. При помощи уравнений (15.43) мы можем обнаружить резонансные зоны и построить резонансные кривые.

Приравнивая правые части уравнений (15.43) нулю, получаем с точностью до величин третьего порядка малости следующие зависимости, определяющие стационарные значения амплитуды a и фазы колебаний ϑ :

$$\left. \begin{aligned} -\delta_e(a) a - \frac{3a^2 E_1}{32} \cos 3\vartheta &= 0, \\ \omega_e^2(a) - \frac{v^2}{9} + \frac{3a E_1}{32} \sin 3\vartheta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15.44)$$

Здесь введены обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \delta_e(a) &= \delta - \frac{3}{8} \delta a^2, \\ \omega_e^2(a) &= 1 + \frac{3a^2}{4} - \frac{\delta^2}{4} - \frac{15a^4}{128}. \end{aligned} \right\} \quad (15.45)$$

Исключая из зависимостей (15.44) фазу ϑ , находим соотношение между амплитудой и частотой возмущающей силы:

$$\left[\omega_e^2(a) - \frac{\nu^2}{9} \right]^2 + \delta_e^2(a) = \frac{9a^2 E_1^2}{1026}, \quad (15.46)$$

или

$$\nu = 3 \sqrt{\omega_e^2(a) \pm \sqrt{\frac{9a^2 E_1^2}{1026} - \delta_e^2(a)}}, \quad (15.47)$$

при помощи которого можно построить резонансную кривую.

Приведем теперь пример, для которого уже в первом приближении можно обнаружить дробный резонанс.

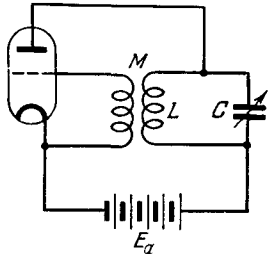


Рис. 82.

Рассмотрим линейный колебательный контур с регенерацией при помощи электронной лампы (рис. 82).

Как известно, на этом примере Мандельштамом и Папалекси [29] было изучено явление резонанса n -го рода, причем решение получаемого уравнения находилось для установившегося режима методом Пуанкаре, а для исследования процесса установления колебаний применялся метод Ван-дер-Поля.

Для указанной колебательной системы дифференциальное уравнение, описывающее движение, имеет вид

$$CL \frac{d^2 i}{d\tau^2} + CR \frac{di}{d\tau} + i = i_a + C \frac{d\mathcal{E}}{d\tau}, \quad (15.48)$$

где

$$i_a = f_0(V_s) \quad (15.49)$$

есть уравнение характеристики лампы, зависящее от управляющего напряжения.

После ряда преобразований уравнение (15.48) может быть сведено к виду *)

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) + E \sin nt, \quad (15.50)$$

где обозначено:

$$\left. \begin{aligned} f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) &= F'(x) \frac{dx}{dt} + \frac{\xi}{1+\xi} x, \\ F(x) &= \frac{1}{1+\xi} f_1(x) - 2\vartheta x, \end{aligned} \right\} \quad (15.51)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dI}{d\tau} &= x, \quad -\frac{nM_r E_0}{L_0 V_0} = E, \quad t = \frac{\tau}{\tau_0}, \\ 2\vartheta &= \frac{nR}{\omega L}, \quad \xi = \frac{\omega^2 - n^2 \omega_0^2}{n^2 \omega_0^2}, \\ I_a &= \frac{i_a}{I_0} = \frac{f_0(V_s)}{I_0} = f_1\left(\frac{dI}{d\tau}\right). \end{aligned} \right\} \quad (15.52)$$

*) См. [29], т. II, стр. 21.

Остановимся на исследовании резонансного случая. Для того чтобы можно было применить для построения приближенного решения формулы § 14, необходимо в уравнении (15.50) сделать замену переменных:

$$x = y + \frac{E}{1-n^2} \sin nt, \quad (15.53)$$

после чего получаем следующее уравнение:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \varepsilon f \left[y + \frac{E}{1-n^2} \sin nt, \frac{dy}{dt} + \frac{En}{1-n^2} \cos nt \right]. \quad (15.54)$$

Допустим, что регенерация в контуре осуществляется при помощи электронной лампы с характеристикой:

$$i_a = a + bx + cx^2 - dx^3, \quad (15.55)$$

где $V_0 = 12e$, $I_0 = 142$ ма, a, b, c, d — постоянные. Тогда для правой части (15.50) получаем выражение

$$f \left(x, \frac{dx}{dt} \right) = (k + 2x + \gamma x^2) \frac{dx}{dt} + \frac{\xi}{0,016} x, \quad (15.56)$$

в котором приняты обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{0,016}{1+\xi}, \quad k = k_0 + 2\bar{\vartheta} \frac{\xi}{\beta}, \quad \beta = 0,016, \\ \bar{\vartheta} &= 0,013, \quad \gamma = -2, \quad k_0 = -0,05 \\ (a &= 0,95, \quad b = 3,35, \quad c = 2,25, \quad d = 1,5). \end{aligned} \right\} \quad (15.57)$$

Подставляя значение $f \left(x, \frac{dx}{dt} \right)$ (15.56) в уравнение (15.54), находим для правой части рассматриваемого уравнения следующее выражение:

$$\begin{aligned} f \left[y + \frac{E}{1-n^2} \sin nt, \frac{dy}{dt} + \frac{En}{1-n^2} \cos nt \right] &= \\ &= \left[k + 2y + \frac{2E}{1-n^2} \sin nt + \gamma \left(y^2 + \frac{2yE}{1-n^2} \sin nt + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{E^2}{(1-n^2)^2} \sin^2 nt \right) \right] \left(\frac{dy}{dt} + \frac{En}{1-n^2} \cos nt \right) + \\ &\quad + \frac{\xi}{0,016} \left(y + \frac{E}{1-n^2} \sin nt \right). \end{aligned} \quad (15.58)$$

Построим теперь решение уравнения (15.54) в первом приближении для случая $n=2$, т. е. для случая, когда в колебательной системе может возникнуть резонанс деления на два.

Воспользовавшись формулами (14.39) и (14.25) и полагая $p=1$, $q=2$, после ряда выкладок получаем:

$$y = a \cos(t + \vartheta), \quad (15.59)$$

где a и ϑ должны быть определены из системы уравнений первого приближения

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon \left\{ \frac{1}{2} a \left(k + \frac{\gamma a^2}{4} \right) + \frac{\gamma E^2 a}{36} + \frac{aE}{6} \sin 2\vartheta \right\}, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \varepsilon \left\{ -\frac{\xi}{2\beta} + \frac{E}{6} \cos 2\vartheta \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (15.60)$$

Система уравнений первого приближения (15.60) дает возможность исследовать как стационарный режим, так и процесс установления колебаний при резонансе второго рода.

Для исследования процесса установления колебаний необходимо проинтегрировать систему (15.60) и найти a и ϑ как функции времени. В данном случае интегрирование системы (15.60) может быть произведено до конца. Для этого сделаем в уравнениях (15.60) замену переменных согласно формулам:

$$u = a \cos \vartheta, \quad v = a \sin \vartheta. \quad (15.61)$$

После ряда выкладок вместо уравнений (15.60) получаем для новых переменных u и v следующую систему:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \varepsilon \left\{ \frac{1}{2} u \left[k + \frac{\gamma}{4} (u^2 + v^2) \right] + \frac{\gamma E^2}{36} u + \frac{E}{6} v + \frac{\xi}{2\beta} v \right\}, \\ \frac{dv}{dt} &= \varepsilon \left\{ \frac{1}{2} v \left[k + \frac{\gamma}{4} (u^2 + v^2) \right] + \frac{\gamma E^2}{36} v + \frac{E}{6} u - \frac{\xi}{2\beta} u \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (15.62)$$

Система (15.62), как это показано в работе [29], может быть приведена к уравнению типа Бернулли.

Действительно, умножая уравнения (15.62) соответственно на v и u и вычитая из первого второе, находим:

$$v \frac{du}{dt} - u \frac{dv}{dt} = v^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{\varepsilon}{2} \left[-(u^2 - v^2) \frac{E}{3} - (u^2 + v^2) \frac{\xi}{\beta} \right]. \quad (15.63)$$

Умножая первое уравнение системы (15.62) на u и складывая полученный результат со вторым уравнением, умноженным на v , получим:

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon a \left[k + \frac{\gamma}{4} \left(a + \frac{2E^2}{9} \right) \right] + \frac{2\varepsilon uv}{3} E. \quad (15.64)$$

Обозначая

$$\frac{u}{v} = \chi, \quad (15.65)$$

можем вместо (15.63) и (15.64) написать следующую систему:

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{\varepsilon}{2} \left[\left(-\frac{E}{3} - \frac{\xi}{\beta} \right) \chi^2 - \left(-\frac{E}{3} + \frac{\xi}{\beta} \right) \right], \quad (15.66)$$

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon a \left[k + \frac{\gamma}{4} \left(a + \frac{2E^2}{9} \right) \right] - \frac{2\varepsilon E a}{3} \frac{\chi}{1 + \chi^2}. \quad (15.67)$$

Уравнение (15.66) легко интегрируется.

После того как мы определим из него $\chi(t)$, (15.67) может быть приведено к виду

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon\gamma}{4} a^2 + \varphi(t) a, \quad (15.68)$$

где $\varphi(t)$ — известная функция времени.

Подстановкой $W = \frac{1}{a}$ (15.68) приводится к линейному уравнению

$$\frac{dW}{dt} = -\varphi(t) W - \frac{\varepsilon\gamma}{4}. \quad (15.69)$$

В результате получаем следующую известную формулу, выражающую закон изменения амплитуды колебания со временем:

$$a = \frac{e^{\int_0^t \varphi(t) dt}}{C_1 - \frac{\varepsilon \gamma}{4} \int_0^t e^{\int_0^t \varphi(t) dt} dt}, \quad (15.70)$$

где C_1 — постоянная интегрирования.

Перейдем теперь к определению установившихся колебаний, совершающихся с постоянной амплитудой и фазой.

Приравняв правые части системы (15.60) нулю, получаем соотношения:

$$\left. \begin{aligned} k + \frac{\gamma a^2}{4} + \frac{\gamma E^2}{18} + \frac{E}{3} \sin 2\vartheta &= 0, \\ -\frac{\xi}{\beta} + \frac{E}{3} \cos 2\vartheta &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (15.71)$$

определяющие стационарные значения амплитуды и фазы колебаний. Исключая из (15.71) фазу ϑ , находим известную зависимость

$$a^2 = -\frac{2E^2}{9} - \frac{4}{\gamma} \left[k \pm \sqrt{\frac{E^2}{9} - \frac{\xi^2}{\beta^2}} \right], \quad (15.72)$$

при помощи которой можно построить резонансные кривые, характеризующие зависимость амплитуды a от расстройки ξ (рис. 83). Стационарные значения фазы ϑ находим с помощью формулы

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = -\frac{k + \frac{\gamma a^2}{4} + \frac{\gamma E^2}{18}}{\frac{\xi}{\beta}}, \quad (15.73)$$

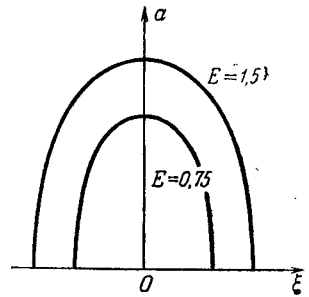


Рис. 83.

где a определяется из (15.72).

Для определения устойчивых значений стационарной амплитуды поступаем согласно общим правилам.

Находим сначала величины:

$$\left. \begin{aligned} A'_a(a, \vartheta) &= \frac{1}{2} \left(k + \frac{3\gamma a^2}{4} \right) + \frac{\gamma E^2}{36} + \frac{E}{6} \sin 2\vartheta, \\ A'_\vartheta(a, \vartheta) &= \frac{Ea}{3} \cos 2\vartheta, \\ B'_a(a, \vartheta) &= 0, \\ B'_\vartheta(a, \vartheta) &= -\frac{E}{3} \sin 2\vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (15.74)$$

После этого составляем уравнения в вариациях:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\delta a}{dt} &= \varepsilon \left\{ \frac{1}{2} \left(k + \frac{3\gamma a^2}{4} \right) + \frac{\gamma E^2}{36} + \frac{E}{6} \sin 2\vartheta \right\} \delta a + \\ &\quad + \frac{Ea}{3} \cos 2\vartheta \delta \vartheta, \\ \frac{d\delta \vartheta}{dt} &= -\frac{E}{3} \sin 2\vartheta \delta \vartheta, \end{aligned} \right\} \quad (15.75)$$

из которых находим условия устойчивости стационарных значений a и ϑ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \left(k + \frac{3\gamma a^2}{4} \right) + \frac{\gamma E^2}{36} + \frac{E}{6} \sin 2\vartheta - \frac{E}{3} \sin 2\vartheta < 0, \\ \left\{ \frac{1}{2} \left(k + \frac{3\gamma a^2}{4} \right) + \frac{\gamma E^2}{36} + \frac{E}{6} \sin 2\vartheta \right\} \left(-\frac{E}{3} \sin 2\vartheta \right) > 0. \end{aligned} \right\} \quad (15.76)$$

Эти условия после ряда преобразований можно представить в виде следующих известных неравенств:

$$k + \frac{1}{2} \gamma a^2 + \frac{\gamma E^2}{18} < 0, \quad (15.77)$$

$$\gamma \left[k + \frac{\gamma a^2}{4} + \frac{\gamma E^2}{18} \right] > 0, \quad (15.78)$$

анализ которых совместно с зависимостью (15.72) дает возможность определить величину и границы областей устойчивости периодического решения с периодом $2\pi^*$).

§ 16. Воздействие синусоидальной силы на нелинейную систему с характеристикой, составленной из прямолинейных отрезков

В качестве второго частного случая рассмотрим колебания в нелинейной системе с характеристикой, составленной из нескольких прямолинейных отрезков, находящейся под воздействием синусоидальной возмущающей силы.

Колебательные системы, для которых нелинейная восстанавливающая сила имеет характеристику, состоящую из отрезков прямых (рис. 84, 85, 86, 87), широко распространены в технике.

Исследованию вынужденных колебаний в нелинейных системах такого типа посвящен ряд работ, например работы А. И. Лурье и А. И. Чекмарева**), где приводится решение методом Галеркина; для некоторых начальных условий специального вида Ден-Гартогом***) строится решение, которое можно рассматривать как точное, однако это решение чрезвычайно громоздко.

Для решения подобных задач нам представляется все же более удобным применение вышеизложенного асимптотического метода, который в первом приближении дает те же результаты, что и метод Галеркина, но одновременно с этим позволяет легко определить второе приближение, найти поправки к частоте во втором приближении, а также исследовать не только стационарный режим, но и проследить движение системы в период установления колебаний.

Итак, предположим, что колебания системы описываются уравнением вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + F(x) = \varepsilon f_1 \left(\frac{dx}{dt} \right) + \varepsilon E \sin \nu t, \quad (16.1)$$

*) См. [29], т. II, стр. 36.

**) А. И. Лурье и А. И. Чекмарев, Вынужденные колебания в нелинейной системе с характеристикой, составленной из двух прямолинейных отрезков, журнал Прикладная математика и механика, т. I, в. 3 (1938).

***) J. P. Den Hartog and R. M. Heiles, Forced Vibration in Nonlinear Systems with Various Combinations of Linear Springs, Journ. of Appl. Mech., vol. 3, № 4, p. 126—130 (1936).