

из которых находим условия устойчивости стационарных значений  $a$  и  $\vartheta$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \left( k + \frac{3\gamma a^2}{4} \right) + \frac{\gamma E^2}{36} + \frac{E}{6} \sin 2\vartheta - \frac{E}{3} \sin 2\vartheta < 0, \\ \left\{ \frac{1}{2} \left( k + \frac{3\gamma a^2}{4} \right) + \frac{\gamma E^2}{36} + \frac{E}{6} \sin 2\vartheta \right\} \left( -\frac{E}{3} \sin 2\vartheta \right) > 0. \end{aligned} \right\} \quad (15.76)$$

Эти условия после ряда преобразований можно представить в виде следующих известных неравенств:

$$k + \frac{1}{2} \gamma a^2 + \frac{\gamma E^2}{18} < 0, \quad (15.77)$$

$$\gamma \left[ k + \frac{\gamma a^2}{4} + \frac{\gamma E^2}{18} \right] > 0, \quad (15.78)$$

анализ которых совместно с зависимостью (15.72) дает возможность определить величину и границы областей устойчивости периодического решения с периодом  $2\pi^*$ ).

### § 16. Воздействие синусоидальной силы на нелинейную систему с характеристикой, составленной из прямолинейных отрезков

В качестве второго частного случая рассмотрим колебания в нелинейной системе с характеристикой, составленной из нескольких прямолинейных отрезков, находящейся под воздействием синусоидальной возмущающей силы.

Колебательные системы, для которых нелинейная восстанавливающая сила имеет характеристику, состоящую из отрезков прямых (рис. 84, 85, 86, 87), широко распространены в технике.

Исследованию вынужденных колебаний в нелинейных системах такого типа посвящен ряд работ, например работы А. И. Лурье и А. И. Чекмарева\*\*), где приводится решение методом Галеркина; для некоторых начальных условий специального вида Ден-Гартогом\*\*\*) строится решение, которое можно рассматривать как точное, однако это решение чрезвычайно громоздко.

Для решения подобных задач нам представляется все же более удобным применение вышеизложенного асимптотического метода, который в первом приближении дает те же результаты, что и метод Галеркина, но одновременно с этим позволяет легко определить второе приближение, найти поправки к частоте во втором приближении, а также исследовать не только стационарный режим, но и проследить движение системы в период установления колебаний.

Итак, предположим, что колебания системы описываются уравнением вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + F(x) = \varepsilon f_1 \left( \frac{dx}{dt} \right) + \varepsilon E \sin \nu t, \quad (16.1)$$

\*) См. [29], т. II, стр. 36.

\*\*) А. И. Лурье и А. И. Чекмарев, Вынужденные колебания в нелинейной системе с характеристикой, составленной из двух прямолинейных отрезков, журнал Прикладная математика и механика, т. I, в. 3 (1938).

\*\*\*) J. P. Den Hartog and R. M. Heiles, Forced Vibration in Nonlinear Systems with Various Combinations of Linear Springs, Journ. of Appl. Mech., vol. 3, № 4, p. 126—130 (1936).

где функция  $F(x)$ , выражающая зависимость нелинейной восстанавливающей силы от смещения, является нечетной функцией  $x$  (случай сим-

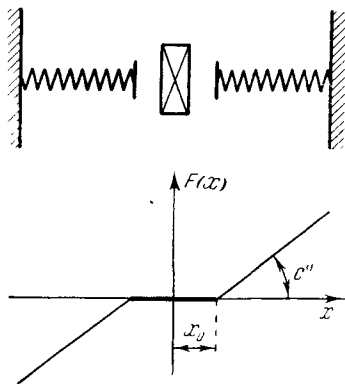


Рис. 84.

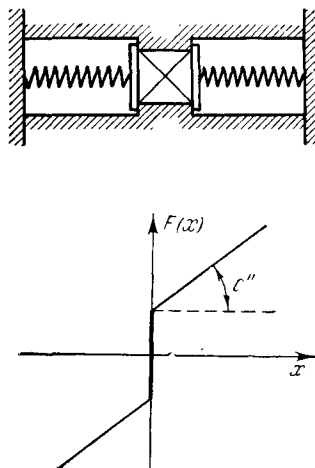


Рис. 85.

метричной нелинейной характеристики) и имеет вид, например, приведенный на рис. 84 — 87.

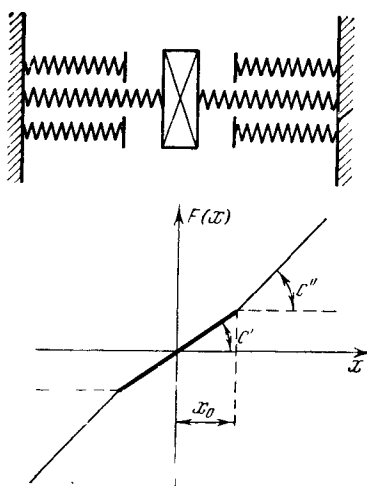


Рис. 86.

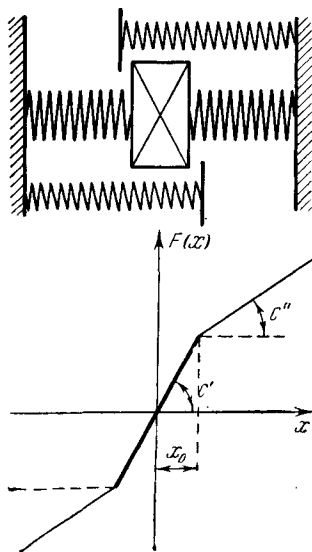


Рис. 87.

Заметим, что если характеристика нелинейной восстанавливающей силы несимметрична, то при помощи изложенного метода также не представляет затруднений построить решения.

Предположим, что  $F(x)$  можно записать в виде

$$F(x) = c''x + sf(x); \tag{16.2}$$

тогда вместо уравнения (16.1) можем рассматривать следующее:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + c''x = -\varepsilon f(x) + \varepsilon f_1\left(\frac{dx}{dt}\right) + \varepsilon E \sin vt, \quad (16.3)$$

и, следовательно, согласно (15.2) и (15.3) в первом приближении имеем решение

$$x = a \cos(vt + \vartheta), \quad (16.4)$$

где  $a$  и  $\vartheta$  должны быть определены из системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f_1(-a\omega \sin \psi) \sin \psi d\psi - \frac{\varepsilon E}{\omega + \nu} \cos \vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega - \nu + \frac{\varepsilon}{2\pi\omega a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi) \cos \psi d\psi + \frac{\varepsilon E}{a(\omega + \nu)} \sin \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (16.5)$$

Принимая во внимание, что

$$\omega^2 + \frac{\varepsilon}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi) \cos \psi d\psi = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \cos \psi) \cos \psi d\psi, \quad (16.6)$$

преобразуем (16.5) к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\delta_e(a) a - \frac{\varepsilon E}{\omega + \nu} \cos \vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_e(a) - \nu + \frac{\varepsilon E}{a(\omega + \nu)} \sin \vartheta, \end{aligned} \right\} \quad (16.7)$$

где, как и выше,

$$\delta_e(a) = \frac{\varepsilon}{2\pi\omega a} \int_0^{2\pi} f_1(-a\omega \sin \psi) \sin \psi d\psi, \quad (16.8)$$

$$\omega_e^2(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \cos \psi) \cos \psi d\psi. \quad (16.9)$$

Приравнявая в уравнениях (16.7) правые части нулю и исключая  $\vartheta$ , находим зависимость между  $a$  и  $\nu$  для стационарного режима:

$$a^2 [(\omega_e^2(a) - \nu^2)^2 + 4\nu^2 \delta_e^2(a)] = \varepsilon^2 E^2. \quad (16.10)$$

Если пренебречь трением, то вместо (16.10) [получаем следующую простую формулу:

$$a [\omega_e^2(a) - \nu^2] = \pm \varepsilon E, \quad (16.11)$$

при этом в правой части следует брать «+» для  $a > 0$  и «-» для  $a < 0$ .

Приведем еще соответствующие формулы для второго приближения.

Пренебрегая в уравнении (16.1) трением, имеем:

$$x = a \cos(vt + \vartheta) + \varepsilon u_1(a, vt, vt + \vartheta), \quad (16.12)$$

где

$$u_1(a, vt, vt + \vartheta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n(vt + \vartheta)}{\omega^2(1-n^2)} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi) \cos \psi d\psi, \quad (16.13)$$

а амплитуда стационарных колебаний определяется соотношением

$$a [\omega_0^2(a) - \nu^2] + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_n(a) [f_{n+1}^{(1)}(a) + f_{n-1}^{(1)}(a)]}{\omega^2(1-n^2)} = \pm \varepsilon E, \quad (16.14)$$

в котором введены обозначения:

$$\left. \begin{aligned} f_n(a) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \phi) \cos n\phi \, d\phi, \\ f_n^{(1)}(a) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f'_a(a \cos \phi) \cos n\phi \, d\phi. \end{aligned} \right\} \quad (16.15)$$

Перейдем к построению резонансных кривых. Для характеристики нелинейной восстанавливающей силы, приведенной на рис. 84—87, имеем:

$$F(x) = \begin{cases} c'x & \text{для } -x_0 \leq x \leq x_0, \\ c''x + (c' - c'')x_0 & \text{для } x_0 \leq x \leq \infty, \\ c''x - (c' - c'')x_0 & \text{для } -\infty \leq x \leq -x_0. \end{cases} \quad (16.16)$$

Положим  $a > 0$ ,  $a > x_0$  и обозначим через  $\phi_0$  наименьший корень уравнения

$$x_0 = a \cos \phi. \quad (16.17)$$

Тогда, как нетрудно видеть,

$$\varepsilon f(a \cos \phi) = \begin{cases} (c' - c'')a \cos \phi & \text{для } \phi_0 \leq \phi \leq \pi - \phi_0, \\ (c' - c'')a \cos \phi_0 & \text{для } 0 \leq \phi \leq \phi_0, \\ -(c' - c'')a \cos \phi_0 & \text{для } \pi - \phi_0 \leq \phi \leq \pi. \end{cases} \quad (16.18)$$

Разбивая промежуток интегрирования на три части, после элементарных вычислений находим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon f(a \cos \phi) \cos \phi \, d\phi &= \\ &= c''a + \frac{2}{\pi} (c' - c'') \left[ a \arcsin \frac{x_0}{a} + x_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x_0}{a}\right)^2} \right]. \end{aligned} \quad (16.19)$$

При  $a < 0$ ,  $|a| > x_0$  после аналогичных вычислений имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon f(a \cos \phi) \cos \phi \, d\phi &= \\ &= c''a - \frac{2}{\pi} (c' - c'') \left[ a \arcsin \frac{x_0}{a} + x_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x_0}{a}\right)^2} \right]. \end{aligned} \quad (16.20)$$

Таким образом, при отсутствии трения согласно (16.14) получаем следующую зависимость между амплитудой стационарных колебаний и частотой внешней силы:

$$a(c'' - \nu^2) + \frac{2}{\pi} (c' - c'') \left[ x_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x_0}{a}\right)^2} + a \arcsin \frac{x_0}{a} \right] = \pm \varepsilon E$$

или, обозначая  $\left| \frac{a}{x_0} \right| = A$ ,

$$A(c'' - \nu^2) + \frac{2}{\pi}(c' - c'') \left[ \sqrt{1 - \frac{1}{A^2}} + A \arcsin \frac{1}{A} \right] = \pm \frac{\varepsilon E}{x_0}. \quad (16.21)$$

При помощи зависимости (16.21) строим семейство резонансных кривых (рис. 88—91) (зависимость между  $\frac{a}{x_0}$  и  $\frac{\nu}{\omega_2}$ , где  $\omega_2 = \sqrt{c''}$ ) для различных значений  $\frac{E}{c''x_0}$ .

Резонансные кривые, приведенные на этих рисунках, практически совпадают (в пределах точности построения графиков) с резонансными кривыми, построенными по точным формулам Ден-Гартога и Гельса.

Для построения резонансных кривых во втором приближении необходимо определить выражение для суммы, входящей в формулу (16.14). Заметим, что подсчет этой суммы не вызывает затруднений, так как ее слагаемые с увеличением  $n$  быстро уменьшаются, и поэтому достаточно подсчитать только несколько первых слагаемых.

Принимая во внимание (16.18), находим для интегралов (16.15) следующие значения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon f(a \cos \phi) \cos n\phi \, d\phi &= \frac{(c' - c'')}{\pi_1} a \left\{ \frac{2x_0}{na} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \left( n \arcsin \frac{x_0}{a} \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n-1} \sin \left[ (n-1) \arcsin \frac{x_0}{a} \right] + \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{n+1} \sin \left[ (n+1) \arcsin \frac{x_0}{a} \right] \right\} \quad (16.22) \\ &(n = 3, 5, 7, 9, \dots), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon f'_a(a \cos \phi) \cos n\phi \, d\phi &= -\frac{2}{\pi}(c' - c'') \sin n \arccos \frac{x_0}{a} \\ &(n = 2, 4, 6, 8, \dots). \end{aligned}$$

Подставляя (16.22) в выражение (16.14) и ограничиваясь в сумме пятью слагаемыми, получаем:

$$\begin{aligned} a(\nu^2 - c'') - \frac{2}{\pi}(c' - c'') \left[ x_0 \sqrt{1 - \left( \frac{x_0}{a} \right)^2} + a \arcsin \frac{x_0}{a} \right] + \\ + \frac{1}{2\omega^2} \left\{ f_3(a) \left[ \frac{f_2^{(1)}(a) + f_4^{(1)}(a)}{8} \right] + f_5(a) \left[ \frac{f_4^{(1)}(a) + f_6^{(1)}(a)}{24} \right] \right\} \pm \varepsilon E = 0, \quad (16.23) \end{aligned}$$

где  $f_n(a)$  и  $f_n^{(1)}(a)$  ( $n = 2, 3, 4, 5, 6$ ) определяются выражениями:

$$\begin{aligned} f_3(a) &= -\frac{4(c' - c'')}{3\pi} \frac{x_0}{a} \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}} \left[ 1 + 2 \frac{x_0^2}{a^2} \right] a, \\ f_5(a) &= \frac{4(c' - c'')}{15\pi} \frac{x_0}{a} \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}} \left[ 3 - 11 \frac{x_0^2}{a^2} + 8 \frac{x_0^4}{a^4} \right] a, \\ f_2^{(1)}(a) + f_4^{(1)}(a) &= -\frac{8(c' - c'')}{\pi} \frac{x_0}{a} \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}} \left[ 1 - \frac{x_0^2}{a^2} \right], \\ f_4^{(1)}(a) + f_6^{(1)}(a) &= -\frac{4(c' - c'')}{\pi} \left[ \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{x_0^2}{a^2} \right) \left( 1 - 4 \frac{x_0^2}{a^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x_0}{a} \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}} \left( 1 - 2 \frac{x_0^2}{a^2} \right) \right]. \quad (16.24) \end{aligned}$$

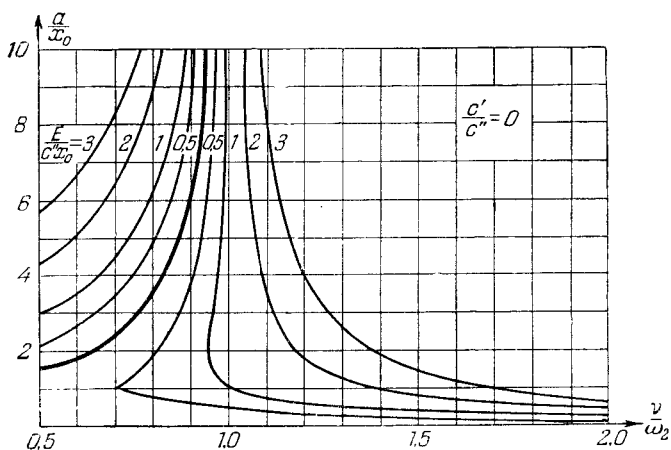


Рис. 88.

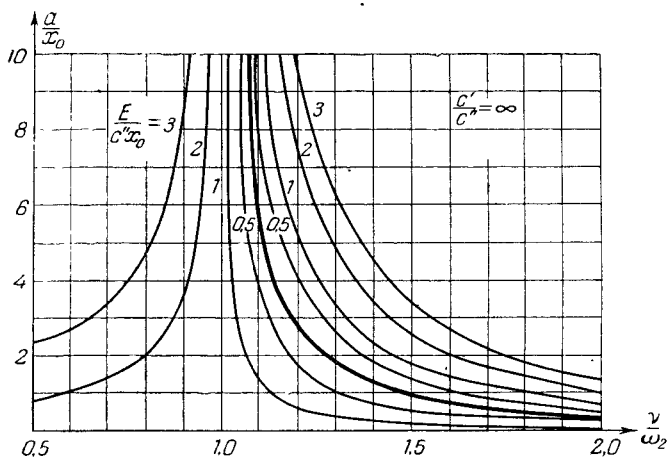


Рис. 89.

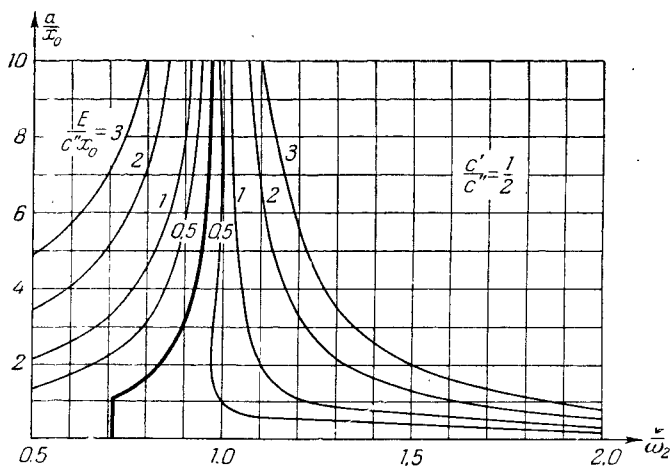


Рис. 90.

При помощи зависимости (16.23) строим резонансные кривые во втором приближении (см. рис. 92, 93, 94, на которых резонансные кривые, а также скелетные кривые во втором приближении начерчены пунктиром, причем следует заметить, что масштаб здесь значительно увеличен; сплошные линии — кривые в первом приближении).

На рис. 95—98 нами приведены семейства резонансных кривых, построенных с учетом трения согласно формуле (16.10). При построении этих кривых трение принималось пропорциональным скорости, а  $\frac{\delta}{c''} = 0,1$ .

Рассмотрим еще случай, когда характеристика нелинейной восстанавливающей силы имеет вид, приведенный на рис. 99. Для вычисления  $\omega_e(a)$  согласно формуле (16.9) имеем:

$$F(x) = \begin{cases} c''x & \text{для } -x_1 \leq x \leq x_1, \\ c''x + (c'' - c')(x_1 - x) & \text{» } x_1 \leq x \leq x_2, \\ c''x + (c'' - c')(x_1 - x) & \text{» } -x_2 \leq x \leq -x_1, \\ c''x - (c'' - c')(x_2 - x_1) & \text{» } x_2 \leq x \leq \infty, \\ c''x + (c'' - c')(x_2 - x_1) & \text{» } -\infty \leq x \leq -x_2. \end{cases} \quad (16.25)$$

Для определения интеграла, стоящего в правой части формулы (16.9), обозначаем через  $\psi_1$  и  $\psi_2$  наименьшие корни уравнений  $x_1 = a \cos \psi$ ,  $x_2 = a \cos \psi$ . Тогда можем написать:

$$F(a \cos \psi) = \begin{cases} c''a \cos \psi, & \psi_1 \leq \psi \leq \pi - \psi_1, \\ c''a \cos \psi + (c'' - c')(a \cos \psi_1 - a \cos \psi), & \psi_2 \leq \psi \leq \psi_1, \\ c''a \cos \psi + (c'' - c')(a \cos \psi_1 - a \cos \psi), & \pi - \psi_1 \leq \psi \leq \pi - \psi_2, \\ c''a \cos \psi - (c'' - c')(a \cos \psi_2 - a \cos \psi_1), & 0 \leq \psi \leq \psi_2, \\ c''a \cos \psi + (c'' - c')(a \cos \psi_2 - a \cos \psi_1), & \pi - \psi_2 \leq \psi \leq \pi. \end{cases} \quad (16.26)$$

После этого, разбивая промежуток интегрирования на пять частей, получим для  $\omega_e^2(a)$  следующее выражение:

$$\omega_e^2(a) = \omega^2 + \frac{2(c'' - c')}{\pi} \left\{ \arccos \frac{x_2}{a} - \arccos \frac{x_1}{a} + \right. \\ \left. + \frac{x_1}{a} \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2}} - \frac{x_2}{a} \sqrt{1 - \frac{x_2^2}{a^2}} \right\}. \quad (16.27)$$

Полагая для упрощения, что трение пропорционально первой степени скорости  $\varepsilon f_1 \left( \frac{dx}{dt} \right) = -2\delta \frac{dx}{dt}$ , имеем:

$$\delta_e(a) = \delta.$$

Для построения графика зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты внешней возмущающей силы получаем следующую

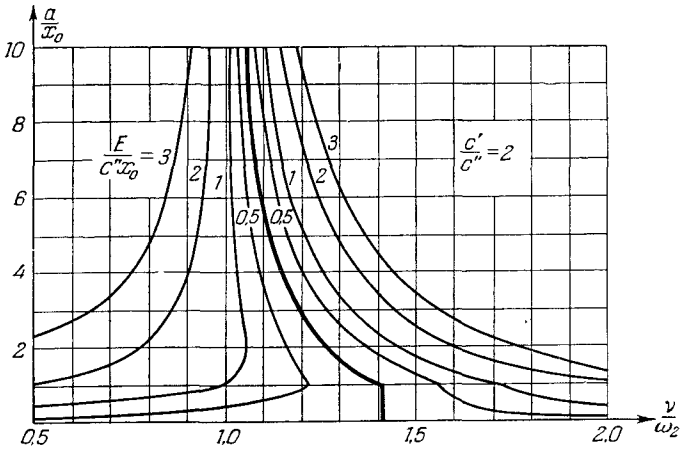


Рис. 91.

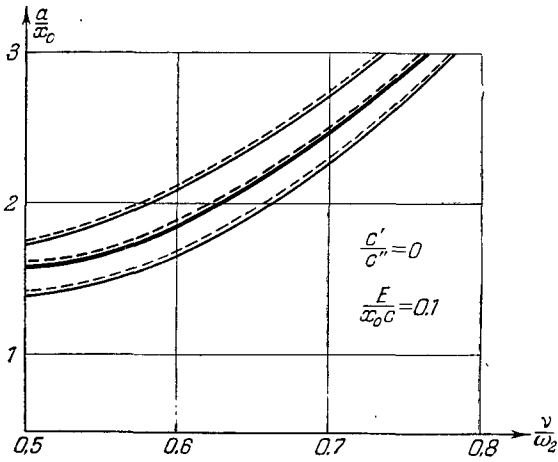


Рис. 92.

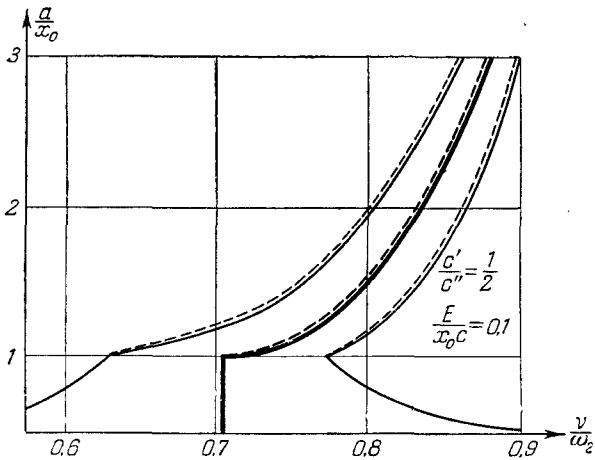


Рис. 93.



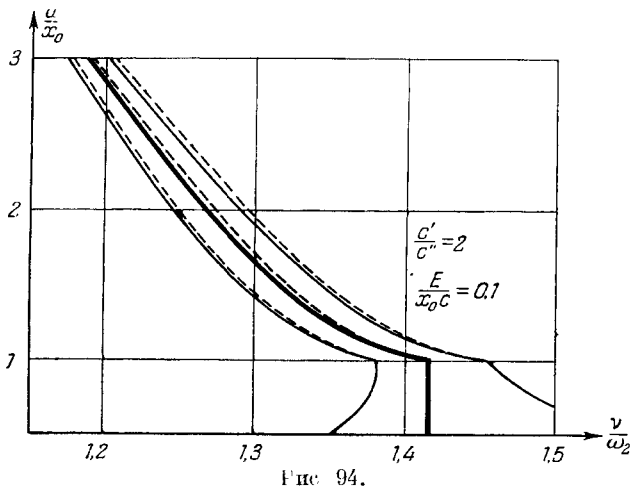


Рис. 94.

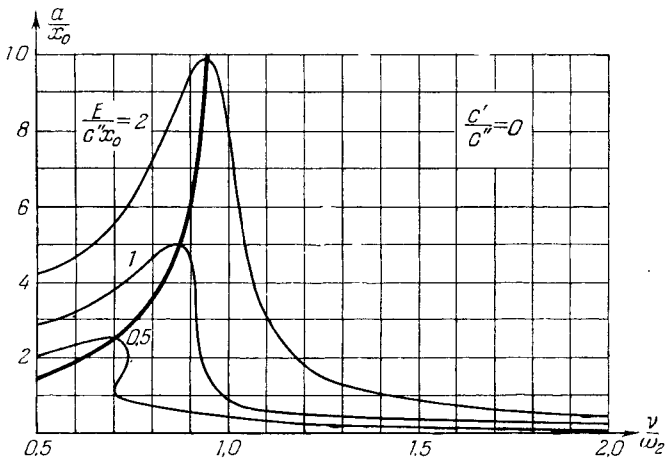


Рис. 95.

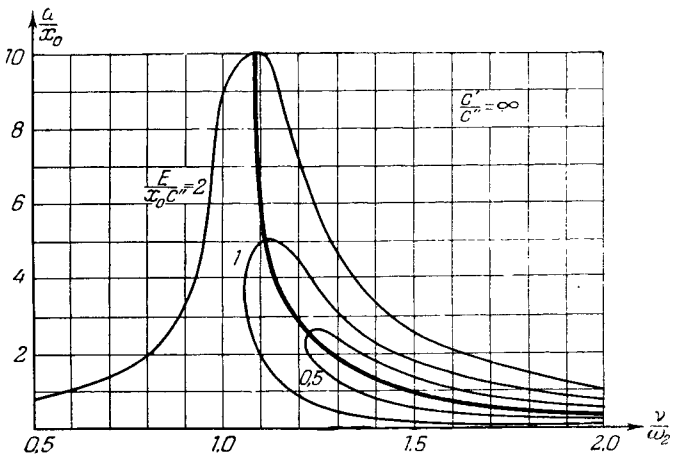


Рис. 96.

зависимость:

$$\nu^2 = \omega_e^2(a) \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^2 E^2}{a^2} - 4\dot{\omega}^2 \omega^2}, \quad (16.28)$$

при помощи которой строим график, определяя значение  $\nu$  в зависимости от значений  $a$ . Согласно соотношению

$$\nu = \omega_e(a) \quad (16.29)$$

строим кривую зависимости собственной частоты от амплитуды. На

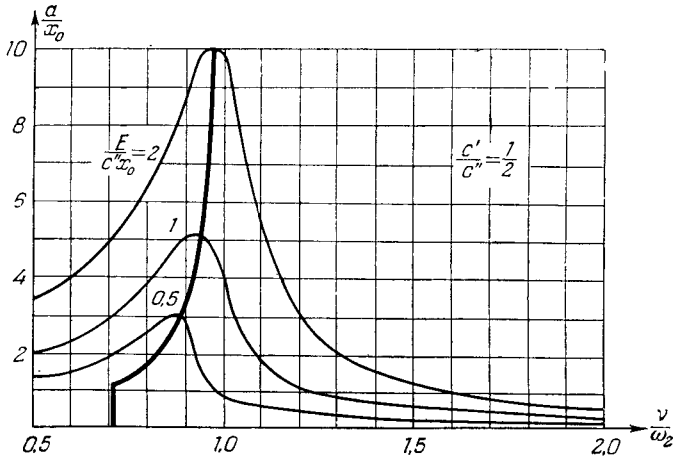


Рис. 97.

рис. 100 нами приведено семейство кривых, характеризующих зависимость амплитуды от частоты внешней силы при различных амплитудах внешней

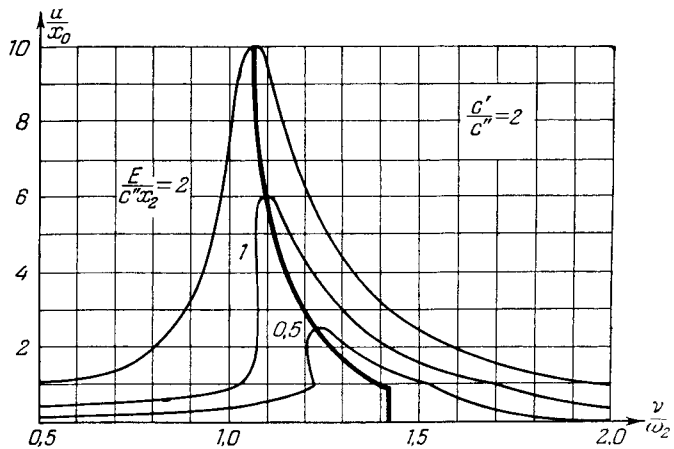


Рис. 98.

силы (семейство резонансных кривых). При помощи критериев, приведенных на стр. 189, нетрудно определить устойчивые и неустойчивые зоны этих резонансных кривых, а также точки «срыва» и «скачка» амплитуды. На рис. 101 нами приведена одна из резонансных кривых, причем участки

этой кривой, начерченные жирной линией, соответствуют устойчивым амплитудам, а начерченные тонкой линией соответствуют неустойчивым амплитудам.

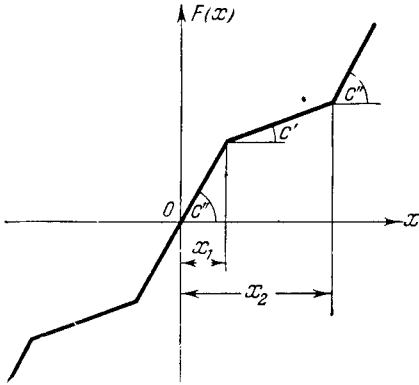


Рис. 99.

Так, согласно резонансной кривой, приведенной на рис. 101, при бесконечно медленном изменении частоты внешней силы (т. е. при стационарном режиме), начиная от малых значений, амплитуда вынужденных колебаний нарастает сначала по кривой  $MA$ , из точки  $A$  значение амплитуды скачком переходит в точку  $B$  и далее изменяется по кривой  $BC$ . В точке  $C$  происходит срыв амплитуды — амплитуда скачком переходит в точку  $D$  и при дальнейшем увеличении частоты изменяется по кривой  $DN$ .

Если теперь начать уменьшать частоту приложенной силы, то амплитуда вынужденных колебаний будет изменяться по кривой  $NDE$ . Из точки  $E$  амплитуда скачком перейдет в точку  $F$  и дальше будет изменяться по

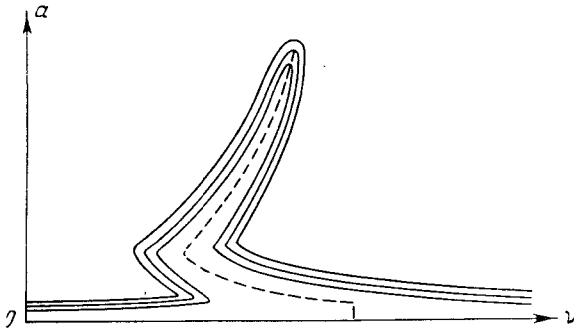


Рис. 100.

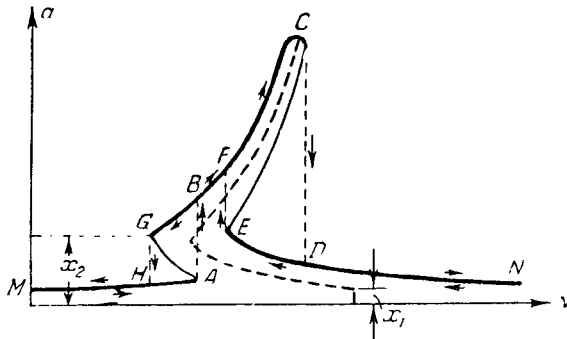


Рис. 101.

кривой  $FBG$ . Дойдя до точки  $G$ , амплитуда скачком перейдет в точку  $H$ , после чего будет изменяться по кривой  $HM$ . Таким образом, мы здесь также наблюдаем характерные для нелинейной колебательной системы гистерезисные явления, аналогичные рассмотренным нами на стр. 191.

Приведенные примеры показывают большую гибкость и широкий диапазон применения изложенного метода. Получаемые формулы даже для сложной характеристики нелинейной восстанавливающей силы достаточно просты. В случае, если характеристика составлена из двух отрезков прямых, получим совсем простую формулу (заметим, что в первом приближении для стационарного режима получаем результат, совпадающий с результатом Лурье и Чекмарева). Если характеристика нелинейной восстанавливающей силы состоит из нескольких прямолинейных отрезков, то наши формулы претерпевают совершенно незначительное изменение, в то время как метод Ден-Гартога настолько усложняется, что становится практически неприменимым.

### § 17. Параметрический резонанс

В настоящем параграфе остановимся на рассмотрении некоторых колебательных систем, изучение которых сводится к интегрированию дифференциальных уравнений с переменными (зависящими от времени) коэффициентами. Наибольший интерес представляет случай периодических коэффициентов. Как известно, кроме проблем небесной механики, ряд чисто технических задач приводится к рассмотрению дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами \*).

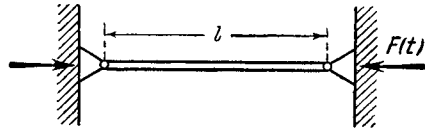


Рис. 102.

Одной из типичных задач, сводящихся к рассмотрению указанных уравнений, является задача о поперечных колебаниях стержня, находящегося под воздействием продольных периодических сил.

Допустим, что на стержень, длиной  $l$ , закрепленный шарнирно по концам, с площадью поперечного сечения  $A$ , с жесткостью  $EI$  и плотностью  $\gamma$ , действует периодическая продольная сила

$$F = F(t) \quad (17.1)$$

(см. рис. 102).

Тогда дифференциальное уравнение поперечных колебаний стержня может быть представлено в следующем виде:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + \frac{\gamma A}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + F(t) \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = 0, \quad (17.2)$$

где  $g$  — ускорение силы тяжести.

В случае шарнирно закрепленных концов граничные условия для дифференциального уравнения (17.2) будут:

$$\left. \begin{aligned} y \Big|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \Big|_{z=0} = 0, \\ y \Big|_{z=l} = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \Big|_{z=l} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (17.3)$$

Очевидно, что уравнение (17.2) вместе с граничными условиями (17.3) путем подстановки

$$y = x \sin \pi \frac{z}{l} \quad (17.4)$$

\* См., например, работы В. Н. Челомея [46, 47].