

Приведенные примеры показывают большую гибкость и широкий диапазон применения изложенного метода. Получаемые формулы даже для сложной характеристики нелинейной восстанавливающей силы достаточно просты. В случае, если характеристика составлена из двух отрезков прямых, получим совсем простую формулу (заметим, что в первом приближении для стационарного режима получаем результат, совпадающий с результатом Лурье и Чекмарева). Если характеристика нелинейной восстанавливающей силы состоит из нескольких прямолинейных отрезков, то наши формулы претерпевают совершенно незначительное изменение, в то время как метод Ден-Гартога настолько усложняется, что становится практически неприменимым.

§ 17. Параметрический резонанс

В настоящем параграфе остановимся на рассмотрении некоторых колебательных систем, изучение которых сводится к интегрированию дифференциальных уравнений с переменными (зависящими от времени) коэффициентами. Наибольший интерес представляет случай периодических коэффициентов. Как известно, кроме проблем небесной механики, ряд чисто технических задач приводится к рассмотрению дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами *).

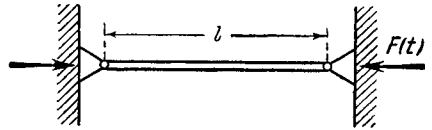


Рис. 102.

Одной из типичных задач, сводящихся к рассмотрению указанных уравнений, является задача о поперечных колебаниях стержня, находящегося под воздействием продольных периодических сил.

Допустим, что на стержень, длиной l , закрепленный шарнирно по концам, с площадью поперечного сечения A , с жесткостью EI и плотностью γ , действует периодическая продольная сила

$$F = F(t) \quad (17.1)$$

(см. рис. 102).

Тогда дифференциальное уравнение поперечных колебаний стержня может быть представлено в следующем виде:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + \frac{\gamma A}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + F(t) \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = 0, \quad (17.2)$$

где g — ускорение силы тяжести.

В случае шарнирно закрепленных концов граничные условия для дифференциального уравнения (17.2) будут:

$$\left. \begin{aligned} y \Big|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \Big|_{z=0} = 0, \\ y \Big|_{z=l} = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \Big|_{z=l} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (17.3)$$

Очевидно, что уравнение (17.2) вместе с граничными условиями (17.3) путем подстановки

$$y = x \sin \pi \frac{z}{l} \quad (17.4)$$

* См., например, работы В. Н. Челомея [46, 47].

может быть сведено к следующему:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 \left[1 - \frac{l^2}{\pi EI} F(t) \right] x = 0, \quad (17.5)$$

где введено обозначение

$$\omega^2 = \frac{g\pi^4 EI}{\gamma Al^4}. \quad (17.6)$$

Уравнение (17.5) является известным уравнением Хилла.

К уравнению (17.5) может быть приведена также задача о колебаниях математического маятника, ось вращения которого совершает заданное периодическое движение в вертикальном направлении, задача о колебаниях механической системы с периодически изменяющейся жесткостью, задачи амплитудной модуляции и многие другие.

В случае, если периодическая функция $F(t)$ имеет следующий вид:

$$F(t) = P_0 \cos \nu t, \quad (17.7)$$

то вместо (17.5) получаем уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 \left[1 - \frac{l^2 P_0}{\pi EI} \cos \nu t \right] x = 0, \quad (17.8)$$

которое называется уравнением Матье.

Как уравнение Матье, так и уравнение Хилла являются частными случаями дифференциального уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p(t) \frac{dx}{dt} + q(t) x = 0, \quad (17.9)$$

где $p(t)$ и $q(t)$ — периодические функции t с периодом Ω .

Уравнения типа (17.9) подробно исследовались рядом ученых, однако существующие теории (см., например, А. М. Ляпунов [27]) дают возможность производить только качественный анализ поведения решений уравнения (17.9) и не указывают способов построения приближенных решений или способов, позволяющих решить вопрос об устойчивости этих решений.

Для частного случая уравнения (17.9) — для уравнения Матье — построены решения (функции Матье), которым посвящена обширная литература.

Во многих случаях дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами могут быть сведены к рассмотренному в § 13 уравнению (13.1), и поэтому приближенные решения можно построить согласно изложенному методу.

Ниже мы построим приближенные решения, а также определим зоны устойчивости в первом и во втором приближении для простейшего случая уравнения с периодическими коэффициентами (17.9) — для уравнения Матье — и сопоставим полученные результаты с решениями, известными в литературе.

Итак, перейдем к построению приближенных решений для уравнения (17.8), которое можем записать в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 (1 - h \cos \nu t) x = 0, \quad (17.10)$$

где обозначено

$$h = \frac{P_0 l^2}{\pi EI} \ll 1.$$

Как уже указывалось, в первом приближении мы можем рассматривать для уравнения типа (17.10) лишь главный демумльтипликационный резонанс $p=1$, $q=2$. Предполагая, что $\omega \approx \frac{\nu}{2}$, построим приближенные решения, соответствующие резонансному случаю.

В первом приближении, воспользовавшись формулами (14.25), имеем:

$$x = a \cos\left(\frac{\nu}{2}t + \vartheta\right), \quad (17.11)$$

где a и ϑ должны быть определены из системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{ah\omega^2}{2\nu} \sin 2\vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega - \frac{\nu}{2} - \frac{h\omega^2}{2\nu} \cos 2\vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (17.12)$$

Чтобы решить полученную систему уравнений первого приближения, введем новые переменные u и v согласно формулам

$$u = a \cos \vartheta, \quad v = a \sin \vartheta. \quad (17.13)$$

Дифференцируя выражения (17.13) и принимая во внимание уравнения (17.12), имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{da}{dt} \cos \vartheta - \frac{d\vartheta}{dt} a \sin \vartheta = \left[-\frac{h\omega^2}{2\nu} - \left(\omega - \frac{\nu}{2}\right) \right] a \sin \vartheta, \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{da}{dt} \sin \vartheta + \frac{d\vartheta}{dt} a \cos \vartheta = \left[-\frac{h\omega^2}{2\nu} + \left(\omega - \frac{\nu}{2}\right) \right] a \cos \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (17.14)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \left[-\frac{h\omega^2}{2\nu} - \left(\omega - \frac{\nu}{2}\right) \right] v, \\ \frac{dv}{dt} &= \left[-\frac{h\omega^2}{2\nu} + \left(\omega - \frac{\nu}{2}\right) \right] u. \end{aligned} \right\} \quad (17.15)$$

Таким образом, уравнения первого приближения (17.12) мы привели к системе двух линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

Характер решений системы уравнений (17.15) и, следовательно, решений системы (17.12) зависит от корней характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} \lambda & \frac{h\omega^2}{2\nu} + \left(\omega - \frac{\nu}{2}\right) \\ \frac{h\omega^2}{2\nu} - \left(\omega - \frac{\nu}{2}\right) & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^2 - \frac{h^2\omega^4}{4\nu^2} + \left(\omega - \frac{\nu}{2}\right)^2 = 0. \quad (17.16)$$

Обозначим корни этого уравнения через

$$+\lambda, \quad -\lambda,$$

причем

$$\lambda = \sqrt{\frac{h^2\omega^4}{4\nu^2} - \left(\omega - \frac{\nu}{2}\right)^2}. \quad (17.17)$$

Тогда общее решение системы дифференциальных уравнений (17.15) может быть представлено в следующем виде:

$$u = C_1 e^{\lambda t} + C_2 e^{-\lambda t},$$

$$v = C_1 \frac{-h\omega^2 + \left(\omega - \frac{\nu}{2}\right)}{\lambda} e^{\lambda t} + C_2 \frac{h\omega^2 - \left(\omega - \frac{\nu}{2}\right)}{\lambda} e^{-\lambda t}, \quad (17.18)$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, которые определяются из начальных условий.

После этого определяем амплитуду a и фазу колебаний ϑ , входящие в правую часть формулы (17.11). Имеем:

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= u^2 + v^2, \\ \vartheta &= \arctg \frac{v}{u}. \end{aligned} \right\} \quad (17.19)$$

Согласно формулам (17.17), (17.18) и (17.19) очевидно, что при λ мнимом амплитуда a будет ограниченной функцией времени.

В случае, если λ действительное, амплитуда a будет возрастать по экспоненциальному закону. Этот случай соответствует наличию в системе основного демультипликационного резонанса.

Согласно равенству (17.17) условие вещественности λ будет следующим:

$$\frac{h\omega^2}{2\nu} > \left| \omega - \frac{\nu}{2} \right|, \quad (17.20)$$

или с точностью до величин первого порядка малости

$$\frac{h\omega}{4} > \left| \omega - \frac{\nu}{2} \right|,$$

так как $\nu = 2\omega + O(h)$.

Таким образом, если частота внешнего возбуждения находится в интервале

$$2\omega \left(1 - \frac{h}{4} \right) < \nu < 2\omega \left(1 + \frac{h}{4} \right), \quad (17.21)$$

то в системе возникает главный демультипликационный резонанс, при котором амплитуда колебаний возрастает по экспоненциальному закону. Ввиду того, что этот резонанс возникает в результате периодического изменения одного из параметров колебательной системы, его часто называют параметрическим резонансом.

Неравенство (17.21) определяет собой зону неустойчивости, внутри которой положение равновесия $x = 0$ оказывается неустойчивым и в системе самовозбуждаются колебания.

Перейдем теперь к построению и анализу второго приближения.

Согласно формулам (14.5), (14.21), (14.25) и (14.26) во втором приближении имеем:

$$x = a \cos \left(\frac{\nu}{2} t + \vartheta \right) - \frac{ah\omega}{8 \left(\omega + \frac{\nu}{2} \right)} \cos \left(\frac{3}{2} \nu t + \vartheta \right), \quad (17.22)$$

где a и ϑ должны быть определены из следующей системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{ah\omega^2}{2\nu} \sin 2\vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega - \frac{\nu}{2} + \frac{h^2(\omega + \nu)\omega}{32\left(\omega + \frac{\nu}{2}\right)} - \frac{h\omega^2}{2\nu} \cos 2\vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (17.23)$$

Система (17.23) заменой переменных (17.13) тоже сводится к системе линейных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \left[-\frac{h\omega^2}{2\nu} - \left(\omega - \frac{\nu}{2}\right) - \frac{h^2(\omega + \nu)\omega}{32\left(\omega + \frac{\nu}{2}\right)} \right] v, \\ \frac{dv}{dt} &= \left[-\frac{h\omega^2}{2\nu} + \left(\omega - \frac{\nu}{2}\right) + \frac{h^2(\omega + \nu)\omega}{32\left(\omega + \frac{\nu}{2}\right)} \right] u. \end{aligned} \right\} \quad (17.24)$$

Корни характеристического уравнения в данном случае имеют вид

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{h^2\omega^4}{4\nu^2} - \left[\omega - \frac{\nu}{2} + \frac{h^2(\omega + \nu)\omega}{32\left(\omega + \frac{\nu}{2}\right)} \right]^2}, \quad (17.25)$$

и, следовательно, зона неустойчивости во втором приближении определяется с точностью до величин второго порядка малости включительно следующим неравенством:

$$2\omega \left[1 - \frac{h}{4} - \frac{h^2}{64} \right] < \nu < 2\omega \left[1 + \frac{h}{4} - \frac{h^2}{64} \right]. \quad (17.26)$$

Найдем теперь соотношение между ω и h , при котором решение уравнения (17.10) будет периодическим с периодом $\frac{4\pi}{\nu}$. Это возможно в случае, если в формулах (17.11) и (17.22) $a = \text{const}$. Для этого необходимо, чтобы λ , определяемая выражением (17.17) или (17.25), равнялась нулю.

Таким образом, соотношение, которому должны удовлетворять ω и h для того, чтобы x являлось функцией периодической, будет в первом приближении:

$$\frac{2\omega}{\nu} = 1 \pm \frac{h}{4}; \quad (17.27)$$

во втором приближении:

$$\frac{2\omega}{\nu} = 1 \pm \frac{h}{4} + \frac{5h^2}{64}, \quad (17.28)$$

или соответственно с той же степенью точности в первом приближении:

$$\frac{4\omega^2}{\nu^2} = 1 \pm \frac{h}{2} \quad (17.29)$$

и во втором приближении:

$$\frac{4\omega^2}{\nu^2} = 1 \pm \frac{h}{2} + \frac{7h^2}{32}. \quad (17.30)$$

Соотношения (17.29) и (17.30) представляют собой уравнения кривых в плоскости $(\frac{4\omega^2}{v^2}, h)$ (в первом и во втором приближении), на которых решение уравнения (17.10) будет периодическим, т. е. уравнения граничных кривых областей устойчивости решений уравнения (17.10) (рис. 103).

Для периодических решений с периодом $\frac{4\pi}{v}$ из (17.11) и (17.22), принимая во внимание (17.29) и (17.30), находим следующие выражения:

$$x_I = a_0 \cos\left(\frac{v}{2}t + \vartheta_0\right), \tag{17.31}$$

$$x_{II} = a_0 \cos\left(\frac{v}{2}t + \vartheta_0\right) - \frac{a_0 h}{16} \cos\left(\frac{3v}{2}t + \vartheta_0\right), \tag{17.32}$$

в которых индекс при x указывает на номер приближения.

Сопоставим теперь найденные формулы с результатами, полученными при определении непосредственно периодических решений уравнения (17.10) в случае малых h .

Для этого воспользуемся приемом, с помощью которого Матье находил решения уравнения (17.10) и уравнения граничных кривых, предполагая параметр h малым. (Этот прием следует непосредственно из метода А. Пуанкаре [38] нахождения периодических решений.)

Ищем периодическое решение уравнения (17.10) с периодом $\frac{4\pi}{v}$ в виде ряда

$$x = x_0 + hx_1 + h^2x_2 + \dots, \tag{17.33}$$

в котором x_0, x_1, x_2, \dots должны быть периодическими функциями с периодом $\frac{4\pi}{v}$.

Выражение для ω^2 тоже представляем в виде ряда

$$\omega^2 = \frac{v^2}{4} + h\omega_1 + h^2\omega_2 + \dots \tag{17.34}$$

Подставляя правые части (17.33) и (17.34) в уравнение (17.10) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях h , получаем следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x_0}{dt^2} + \frac{v^2}{4}x_0 &= 0, \\ \frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{v^2}{4}x_1 &= \left(\frac{v^2}{4}\cos vt - \omega_1\right)x_0, \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} + \frac{v^2}{4}x_2 &= \left(\frac{v^2}{4}\cos vt - \omega_1\right)x_1 + (\omega_1\cos vt - \omega_2)x_0, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \tag{17.35}$$

из которой необходимо определить функции x_0, x_1, x_2, \dots и величины $\omega_1, \omega_2, \dots$

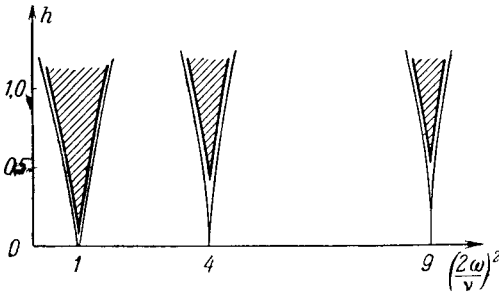


Рис. 103.

Решая первое уравнение системы (17.35), находим:

$$x_0 = a_0 \cos\left(\frac{\nu}{2}t + \vartheta_0\right), \quad (17.36)$$

где a_0 и ϑ_0 — произвольные постоянные.

Подставляя значение x_0 (17.36) в правую часть второго уравнения системы (17.35), имеем:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{\nu^2}{4}x_1 = -\omega_1 a_0 \cos\left(\frac{\nu}{2}t + \vartheta_0\right) + \frac{\nu^2}{4}a_0 \cos\left(\frac{\nu}{2}t + \vartheta_0\right) \cos \nu t, \quad (17.37)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{\nu^2}{4}x_1 = & -\left(\omega_1 - \frac{\nu^2}{8}\right)a_0 \cos \frac{\nu}{2}t \cos \vartheta_0 + \\ & + \left(\omega_1 + \frac{\nu^2}{8}\right)a_0 \sin \frac{\nu}{2}t \sin \vartheta_0 + \frac{\nu^2}{8}a_0 \cos\left(\frac{3}{2}\nu t + \vartheta_0\right). \end{aligned} \quad (17.38)$$

Для того чтобы x_1 было периодической функцией с периодом $\frac{4\pi}{\nu}$, необходимо, чтобы коэффициенты при $\cos \frac{\nu}{2}t$ и $\sin \frac{\nu}{2}t$ в правой части (17.38) равнялись нулю. Тогда получим:

$$\omega_1 = \frac{\nu^2}{8}, \quad \sin \vartheta_0 = 0, \quad \vartheta_0 = 0$$

или

$$\omega_1 = -\frac{\nu^2}{8}, \quad \cos \vartheta_0 = 0, \quad \vartheta_0 = \frac{\pi}{2}.$$

После этого находим выражение для x_1 :

$$x_1 = -\frac{a_0}{16} \cos \frac{3\nu}{2}t + u \cos\left(\frac{\nu}{2}t + \varphi\right), \quad (17.39)$$

или

$$x_1 = \frac{a_0}{16} \sin \frac{3\nu}{2}t + u \cos\left(\frac{\nu}{2}t + \varphi\right). \quad (17.40)$$

Подставляя значения x_0 и x_1 в правую часть третьего уравнения системы (17.35), имеем для случая $\omega_1 = \frac{\nu^2}{8}$, $\vartheta_0 = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_2}{dt^2} + \frac{\nu^2}{4}x_2 = & -\left(\frac{\nu^2}{4} \cos \nu t - \omega_1\right) \frac{a}{16} \cos \frac{3\nu}{2}t - \\ & - \left(\frac{\nu^2}{4} \cos \nu t - \omega_1\right) u \cos\left(\frac{\nu}{2}t + \varphi\right) + (\omega_1 \cos \nu t - \omega_2) a \cos \frac{\nu}{2}t. \end{aligned}$$

Приравняв опять коэффициенты при $\cos \frac{\nu}{2}t$ и $\sin \frac{\nu}{2}t$ нулю, получаем:

$$\omega_2 = \frac{\nu^2}{16} - \frac{\nu^2}{128} = \frac{7\nu^2}{128}, \quad (17.41)$$

$$\frac{\nu^2}{4}u \sin \varphi + \frac{\nu^2}{8}u \sin \varphi = 0, \quad \text{т. е.} \quad \sin \varphi = 0, \quad \varphi = 0.$$

Аналогично для второго случая получим:

$$\left. \begin{aligned} \omega_2 &= \frac{7\nu^2}{128}, \\ \cos \varphi &= 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (17.42)$$

Подставляя полученные значения x_0 , x_1 , ω_1 , ω_2 в правые части формул (17.33) и (17.34), имеем:

$$x = a_0 \cos \frac{\nu}{2} t - \frac{a_0 h}{16} \cos \frac{3\nu}{2} t, \quad (17.43)$$

$$\omega^2 = \frac{\nu^2}{4} + \frac{h\nu^2}{8} + \frac{7h^2\nu^2}{128}, \quad (17.44)$$

или

$$x = a_0 \sin \frac{\nu}{2} t + \frac{a_0 h}{16} \sin \frac{3\nu}{2} t, \quad (17.45)$$

$$\omega^2 = \frac{\nu^2}{4} - \frac{h\nu^2}{8} + \frac{7h^2\nu^2}{128}. \quad (17.46)$$

В этих формулах мы для удобства включили hu в полную амплитуду первой гармоники a_0 .

Полагая $\nu = 2$ и $a_0 = 1$, находим:

$$\left. \begin{aligned} x &= \cos t - \frac{h}{16} \cos 3t, \\ \omega^2 &= 1 + \frac{h}{2} + \frac{7h^2}{32}; \end{aligned} \right\} \quad (17.47)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \sin t + \frac{h}{16} \sin 3t, \\ \omega^2 &= 1 - \frac{h}{2} + \frac{7h^2}{32}. \end{aligned} \right\} \quad (17.48)$$

Выражения (17.47) и (17.48), как и следовало ожидать, совпадают с первыми двумя членами в разложениях функций Матье C_n и S_n (для $n = 1$) в ряд Фурье. Действительно, имеем*):

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \cos t - \frac{h}{16} \cos 3t + O(h^2), \\ \omega_{C_1}^2 &= 1 + \frac{h}{2} + \frac{7h^2}{32} + O(h^3), \end{aligned} \right\} \quad (17.49)$$

а также

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \sin t + \frac{h}{16} \sin 3t + O(h^2), \\ \omega_{S_1}^2 &= 1 - \frac{h}{2} + \frac{7h^2}{32} + O(h^3). \end{aligned} \right\} \quad (17.50)$$

Остановимся теперь на построении приближенных решений уравнения (17.10) и определим границы областей неустойчивости в случае $\omega \approx \frac{\nu}{2} p$, где $p = 2, 3$.

Для случая $p = 2$, т. е. $\omega \approx \nu$, полагаем в формулах (14.21), (14.23) и (14.26) $p = 2$, $q = 2$.

Тогда для второго приближения найдем следующее выражение:

$$x = a \cos(\nu t + \vartheta) + \frac{h a \omega^2}{2\nu(\nu + 2\omega)} \cos(2\nu t + \vartheta) + \frac{h \omega^2 a}{2\nu(\nu - 2\omega)} \cos \vartheta, \quad (17.51)$$

*) См., например, М. Д. О. Стретт, Функции Ляме, Матье и родственные им в физике и технике, стр. 35—39.

где a и ϑ должны быть определены из уравнения второго приближения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{h^2 a \omega^4}{8\nu^2 (2\omega - \nu)} \sin 2\vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega - \nu - \frac{h^2 \omega^4}{4\nu (4\omega^2 - \nu^2)} + \frac{h^2 \omega^4}{8\nu^2 (2\omega - \nu)} \cos 2\vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (17.52)$$

Из системы (17.52), так же как и в предыдущем случае, находим условие вещественности корней характеристического уравнения

$$\left| \omega - \nu - \frac{h^2 \omega^4}{4\nu (4\omega^2 - \nu^2)} \right| < \left| \frac{h^2 \omega^4}{8\nu^2 (2\omega - \nu)} \right|, \quad (17.53)$$

и, следовательно, зона неустойчивости определяется с точностью до величин второго порядка малости неравенством

$$4 + \frac{2h^2 \omega^4}{\nu^2 (4\omega^2 - \nu^2)} - \frac{h^2 \omega^4}{\nu^3 (2\omega - \nu)} < \left(\frac{2\omega}{\nu} \right)^2 < 4 + \frac{2h^2 \omega^4}{\nu^2 (4\omega^2 - \nu^2)} + \frac{h^2 \omega^4}{\nu^3 (2\omega - \nu)} \quad (17.54)$$

или, принимая во внимание, что $\omega \approx \nu$, с той же степенью точности неравенством

$$4 + \frac{2h^2}{3} - h^2 < \left(\frac{2\omega}{\nu} \right)^2 < 4 + \frac{2h^2}{3} + h^2. \quad (17.55)$$

Для случая $p=3$, т. е. $\omega \approx \frac{3}{2}\nu$, необходимо подсчитать третье приближение, так как во втором приближении мы получаем только поправку, уточняющую значение собственной частоты ω . После ряда выкладок находим:

$$\begin{aligned} x = a \cos \left(\frac{3}{2} \nu t + \vartheta \right) - \frac{\omega^2 h a}{2} \left\{ \frac{\cos \left(\frac{5}{2} \nu t + \vartheta \right)}{\nu (2\omega + \nu)} - \frac{\cos \left(\frac{1}{2} \nu t + \vartheta \right)}{\nu (2\omega - \nu)} \right\} + \\ + \frac{h^2 \omega^4 a}{16\nu^2} \left\{ \frac{\cos \left(\frac{7}{2} \nu t + \vartheta \right)}{(2\omega + \nu)(\nu + \omega)} + \frac{\cos \left(\frac{\nu}{2} t - \vartheta \right)}{(2\omega - \nu)(\omega - \nu)} \right\}, \end{aligned} \quad (17.56)$$

где a и ϑ должны быть определены из системы уравнений третьего приближения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= - \frac{h^3 \omega^6 a}{3 \cdot 2^5 \nu^3 (2\omega - \nu)(\omega - \nu)} \sin 2\vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega - \frac{3}{2} \nu - \frac{\omega^4 h^2}{3 \cdot 2\nu (4\omega^2 - \nu^2)} - \frac{h^3 \omega^6}{3 \cdot 2^5 \nu^3 (2\omega - \nu)(\omega - \nu)} \cos 2\vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (17.57)$$

Попутно заметим, что в общем случае из-за громоздкости не выписывались выражения для третьего приближения. Структура же уравнений (17.57) свидетельствует лишней раз о том, что в конкретных случаях даже уравнения третьего приближения весьма просты.

Из системы уравнений (17.57) находим для зоны неустойчивости неравенство

$$\begin{aligned} 9 + \frac{2\omega^4 h^2}{\nu^2 (4\omega^2 - \nu^2)} - \frac{\omega^6 h^3}{2^3 \nu^4 (2\omega - \nu)(\omega - \nu)} < \left(\frac{2\omega}{\nu} \right)^2 < 9 + \\ + \frac{2\omega^4 h^2}{\nu^2 (4\omega^2 - \nu^2)} + \frac{\omega^6 h^3}{2^3 \nu^4 (2\omega - \nu)(\omega - \nu)}, \end{aligned} \quad (17.58)$$

или с той же степенью точности

$$9 + \frac{81h^2}{64} - \frac{3^6 h^3}{2^9} < \left(\frac{2\omega}{\nu}\right)^2 < 9 + \frac{81h^2}{64} + \frac{3^6 h^3}{2^9}. \quad (17.59)$$

Приведем здесь также неравенство определяющее зону неустойчивости в случае $\omega \approx \frac{\nu}{2}$. Согласно (17.20) имеем:

$$1 - \frac{h}{2} < \left(\frac{2\omega}{\nu}\right)^2 < 1 + \frac{h}{2}. \quad (17.60)$$

Из анализа неравенств (17.55), (17.59) и (17.60) очевидно, что величина (ширина) области неустойчивости уменьшается с ее порядком p , как h^p .

Таким образом, высшие резонансы $p=2, 3, \dots$ можем наблюдать, рассматривая соответственно второе, третье и т. д. приближения, а при рассмотрении точного решения уравнения (17.10) получим бесконечный спектр резонансов.

На рис. 103 приведены первые три зоны неустойчивости, построенные согласно неравенствам (17.55), (17.59) и (17.60).

Заметим, что при наличии затухания, т. е. для уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \delta \frac{dx}{dt} + \omega^2(1 - h \cos \nu t)x = 0, \quad (17.61)$$

эти зоны уменьшаются (см. на рис. 103 заштрихованные области). Нетрудно показать, что вместо рассматриваемых неравенств при наличии трения мы получим следующие:

$$1 - \sqrt{\frac{h^2}{4} - \frac{4\delta^2}{\nu^2}} < \left(\frac{2\omega}{\nu}\right)^2 < 1 + \sqrt{\frac{h^2}{4} - \frac{4\delta^2}{\nu^2}}, \quad (17.62)$$

$$4 + \frac{2h^2}{3} - \sqrt{h^4 - 64\frac{\delta^2}{\nu^2}} < \left(\frac{2\omega}{\nu}\right)^2 < 4 + \frac{2h^2}{3} + \sqrt{h^4 - 64\frac{\delta^2}{\nu^2}}, \quad (17.63)$$

$$9 + \frac{81h^2}{64} - \sqrt{\frac{3^{12}h^6}{2^{18}} - 3^4 4\frac{\delta^2}{\nu^2}} < \left(\frac{2\omega}{\nu}\right)^2 < 9 + \frac{81h^2}{64} + \sqrt{\frac{3^{12}h^6}{2^{18}} - 3^4 4\frac{\delta^2}{\nu^2}}. \quad (17.64)$$

Неравенства (17.62), (17.63) и (17.64) содержат еще дополнительные условия:

для первой области

$$h > 4\frac{\delta}{\nu}, \quad (17.65)$$

для второй

$$h > 2\sqrt{2\frac{\delta}{\nu}}, \quad (17.66)$$

для третьей

$$h > \frac{8}{3}\sqrt[6]{\frac{4\delta^3}{9\nu^2}}. \quad (17.67)$$

Как нетрудно видеть, при наличии затухания, для того чтобы был замечен резонанс $\omega \approx \nu$, требуется гораздо большая глубина модуляции параметра $h\omega^2$, чем в случае резонанса $\omega \approx \frac{\nu}{2}$. Еще тяжелее осуществить резонанс $\omega \approx \frac{3}{2}\nu$.

Поэтому обычно наибольший практический интерес представляет резонанс $\omega \approx \frac{\nu}{2}$.

Рассмотрим теперь параметрическое возбуждение в нелинейной колебательной системе.

Заметим, что приведенный выше случай показывает, что в линейной колебательной системе при параметрическом изменении массы или жесткости системы при определенных условиях положение равновесия становится неустойчивым. Даже при очень малых значениях $\omega^2 h$ (глубины модуляции) в системе при определенном соотношении частот возникают колебания, амплитуда которых неограниченно возрастает.

При наличии в линейной системе диссипативных сил влияние последних сказывается только на условии возбуждения колебаний — при наличии диссипации глубина модуляции, при которой наступает резонанс, имеет некоторый нижний предел, отличный от нуля и зависящий от величины декремента затухания. Стационарных колебаний при наличии трения в линейной системе не будет.

В нелинейной колебательной системе дело обстоит иначе. Как будет показано ниже, при изменении рассматриваемых параметров колебательной системы по гармоническому закону с частотой, для определенности, например, равной или близкой к удвоенной собственной частоте системы, наступает резонанс. В данном случае возможны устойчивые режимы стационарных колебаний.

В качестве простейшего примера рассмотрим колебательную систему, описываемую следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 (1 - h \cos \nu t) x + 2\delta \frac{dx}{dt} + \gamma x^3 = 0. \quad (17.68)$$

Предположим, что колебания, описываемые уравнением (17.68), близки к гармоническим. Тогда решение уравнения (17.68), соответствующее наличию в системе основного демумльтипликационного резонанса, ищем в виде

$$x = a \cos\left(\frac{\nu}{2} t + \vartheta\right), \quad (17.69)$$

где согласно (14.25) a и ϑ должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\delta a - \frac{ah\omega^2}{2\nu} \sin 2\vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega - \frac{\nu}{2} + \frac{3\gamma a^2}{4\nu} - \frac{h\omega^2}{2\nu} \cos 2\vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (17.70)$$

Для получения стационарных значений амплитуды и фазы колебания приравняем правые части системы (17.70) нулю.

Получаем соотношения:

$$\left. \begin{aligned} -\delta a - \frac{ah\omega^2}{2\nu} \sin 2\vartheta &= 0, \\ \omega - \frac{\nu}{2} + \frac{3\gamma a^2}{4\nu} - \frac{h\omega^2}{2\nu} \cos 2\vartheta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17.71)$$

Исключая из них фазу ϑ , находим с точностью до величин первого порядка малости включительно следующее соотношение между ампли-

тудой a и частотой модуляции ν :

$$a^2 = \frac{4}{3\gamma} \left[\left(\frac{\nu}{2} \right)^2 - \omega^2 \mp \frac{1}{2} \sqrt{h^2\omega^4 - 4\nu^2\delta^2} \right]. \quad (17.72)$$

При помощи этой зависимости строим резонансную кривую.

В случае, если $\gamma > 0$, получим резонансную кривую, приведенную на рис. 104. Анализируя эту кривую, видим, что при увеличении ν , начиная с малых значений, колебания в системе будут отсутствовать, пока ν не достигнет значения, соответствующего точке A . При достижении ν точки A в системе возникнут колебания, и при дальнейшем увеличении ν амплитуда этих колебаний будет изменяться вдоль верхней ветви резонансной кривой AB . В точке B колебания потеряют свою устойчивость и сорвутся.

При уменьшении ν , начиная с больших значений, колебания скачком возбуждятся в точке C (жесткое возбуждение), и при последующем уменьшении ν амплитуда колебаний будет изменяться вдоль кривой AB .

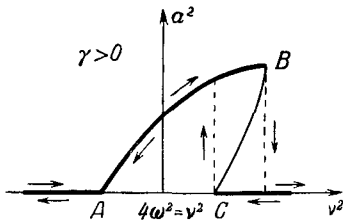


Рис. 104.

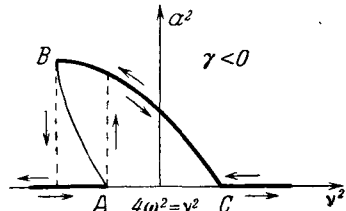


Рис. 105.

В случае, если $\gamma < 0$, получим аналогичную картину, только резонансная кривая будет наклонена в сторону малых значений ν (рис. 105).

Для определения границ зоны синхронизации необходимо приравнять правую часть выражения для a нулю.

В первом приближении зона резонанса будет:

$$\omega^2 - \frac{1}{2} \sqrt{h^2\omega^4 - 16\omega^2\delta^2} < \left(\frac{\nu}{2} \right)^2 < \omega^2 + \frac{1}{2} \sqrt{h^2\omega^4 - 16\omega^2\delta^2}, \quad (17.73)$$

и потому ширина резонансной зоны

$$\Delta = \sqrt{h^2\omega^4 - 16\omega^2\delta^2}. \quad (17.74)$$

Заметим, что наличие затухания уменьшает интервал AC , внутри которого возникает параметрический резонанс.

Очевидно, что Δ будет действительным, если выполняется неравенство

$$h > \frac{4\delta}{\omega}, \quad (17.75)$$

которое, как указывалось, определяет минимальную глубину модуляции, необходимую для параметрического резонанса при данном затухании.

Рассмотрим еще случай параметрического резонанса в колебательной системе с нелинейным трением.

В случае параметрического возбуждения контура с электронной лампой (рис. 23) уравнение колебаний будет:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2(\lambda_0 + \lambda_2 x^2) \frac{dx}{dt} + \omega^2 (1 - h \cos vt) x = 0. \quad (17.76)$$

Допустим, что при отсутствии параметрического возбуждения, т. е. при $h = 0$, система несамовозбужденная. Для этого необходимо, чтобы $\lambda_0 > 0$.

Составим уравнения первого приближения. Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\lambda_0 a - \frac{\lambda_2 a^3}{4} - \frac{ah\omega^2}{2\nu} \sin 2\vartheta \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega - \frac{\nu}{2} - \frac{h\omega^2}{2\nu} \cos 2\vartheta. \end{aligned} \quad (17.77)$$

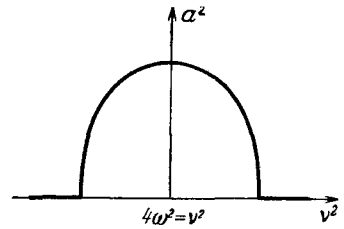


Рис. 106.

Для определения стационарных значений a и ϑ приравняем правые части уравнений (17.77) нулю:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_0 a + \frac{\lambda_2 a^3}{4} + \frac{ah\omega^2}{2\nu} \sin 2\vartheta &= 0, \\ \omega - \frac{\nu}{2} - \frac{h\omega^2}{2\nu} \cos 2\vartheta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17.78)$$

Исключая из полученных соотношений ϑ , находим с принятой нами степенью точности следующую зависимость между амплитудой колебания a и частотой изменения параметра ν :

$$a^2 = \frac{2}{\lambda_2 \nu} \sqrt{h^2 \omega^4 - 4 \left(\omega^2 - \left(\frac{\nu}{2} \right)^2 \right)^2} - 4 \frac{\lambda_0}{\lambda_2}. \quad (17.79)$$

При помощи этой зависимости можем построить резонансную кривую (рис. 106), а также найти условия параметрического возбуждения, максимальную амплитуду возбуждения, границы резонансной области и т. д.

§ 18. Воздействие периодических сил на релаксационную систему

Остановимся теперь на исследовании случая воздействия внешней возмущающей силы на релаксационную колебательную систему, характеризуемую уравнением типа

$$\frac{dx}{dt} = \Phi(x) + \varepsilon E \cos vt, \quad (18.1)$$

где, как и во второй главе, $\Phi(x)$ представляет определенную на интервале (a, b) двузначную функцию.

Для построения решения уравнения (18.1) целесообразно прежде всего преобразовать уравнение (18.1) с целью исключения из него неоднозначной функции $\Phi(x)$. Для этого будем исходить из некоторого частного периодического решения уравнения свободных релаксационных колебаний:

$$\frac{dx}{dt} = \Phi(x). \quad (18.2)$$