

Рассмотрим еще случай параметрического резонанса в колебательной системе с нелинейным трением.

В случае параметрического возбуждения контура с электронной лампой (рис. 23) уравнение колебаний будет:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2(\lambda_0 + \lambda_2 x^2) \frac{dx}{dt} + \omega^2 (1 - h \cos vt) x = 0. \quad (17.76)$$

Допустим, что при отсутствии параметрического возбуждения, т. е. при  $h = 0$ , система несамовозбужденная. Для этого необходимо, чтобы  $\lambda_0 > 0$ .

Составим уравнения первого приближения. Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\lambda_0 - \frac{\lambda_2 a^3}{4} - \frac{ah\omega^2}{2\nu} \sin 2\vartheta \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega - \frac{\nu}{2} - \frac{h\omega^2}{2\nu} \cos 2\vartheta. \end{aligned}$$

(17.77)

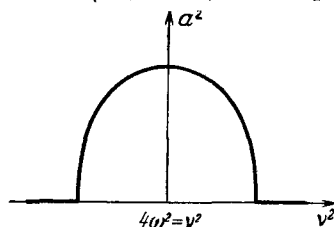


Рис. 106.

Для определения стационарных значений  $a$  и  $\vartheta$  приравняем правые части уравнений (17.77) нулю:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_0 a + \frac{\lambda_2 a^3}{4} + \frac{ah\omega^2}{2\nu} \sin 2\vartheta &= 0, \\ \omega - \frac{\nu}{2} - \frac{h\omega^2}{2\nu} \cos 2\vartheta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17.78)$$

Исключая из полученных соотношений  $\vartheta$ , находим с принятой нами степенью точности следующую зависимость между амплитудой колебания  $a$  и частотой изменения параметра  $\nu$ :

$$a^2 = \frac{2}{\lambda_2 \nu} \sqrt{h^2 \omega^4 - 4 \left( \omega^2 - \left( \frac{\nu}{2} \right)^2 \right)^2 - 4 \frac{\lambda_0}{\lambda_2}}. \quad (17.79)$$

При помощи этой зависимости можем построить резонансную кривую (рис. 106), а также найти условия параметрического возбуждения, максимальную амплитуду возбуждения, границы резонансной области и т. д.

## § 18. Воздействие периодических сил на релаксационную систему

Остановимся теперь на исследовании случая воздействия внешней возмущающей силы на релаксационную колебательную систему, характеризуемую уравнением типа

$$\frac{dx}{dt} = \Phi(x) + \varepsilon E \cos vt, \quad (18.1)$$

где, как и во второй главе,  $\Phi(x)$  представляет определенную на интервале  $(a, b)$  двузначную функцию.

Для построения решения уравнения (18.1) целесообразно прежде всего преобразовать уравнение (18.1) с целью исключения из него неоднозначной функции  $\Phi(x)$ . Для этого будем исходить из некоторого частного периодического решения уравнения свободных релаксационных колебаний:

$$\frac{dx}{dt} = \Phi(x). \quad (18.2)$$

Для определенности примем то из решений уравнения (18.2), в котором величина  $x$  принимает минимальное значение при  $t = 0$ .

Обозначая через  $\omega$  частоту свободных релаксационных колебаний, напомним это периодическое решение в виде

$$x = z(\omega t), \quad (18.3)$$

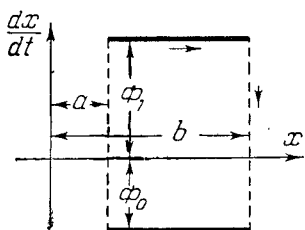


Рис. 107.

где  $z(\varphi)$  — некоторая периодическая функция  $\varphi$  с периодом  $2\pi$ .

Принимая во внимание результаты § 10, легко видеть, что производная  $z'(\varphi)$  в течение одного периода дважды терпит разрыв и что по абсолютной величине она всегда больше некоторой положительной постоянной.

Так, например, если двузначная функция  $\Phi(x)$  имеет для верхней и нижней ветвей соответственно следующие значения:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x) &= \Phi_1 = \text{const}, & a < x < b, \\ \Phi(x) &= -\Phi_0 = \text{const}, & a < x < b, \end{aligned} \right\} \quad (18.4)$$

то решение уравнения (18.2) (рис. 107) можно представить в виде

$$\begin{aligned} x &= a + \Phi_1 t, & 0 < t < \frac{b-a}{\Phi_1}, \\ x &= b + \Phi_0 \left[ \frac{b-a}{\Phi_1} - t \right], & \frac{b-a}{\Phi_1} < t < (b-a) \frac{\Phi_0 + \Phi_1}{\Phi_0 \Phi_1}, \end{aligned} \quad (18.5)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = (b-a) \frac{\Phi_0 + \Phi_1}{\Phi_0 \Phi_1} \quad (18.6)$$

и, следовательно,

$$\omega = \frac{2\pi}{b-a} \frac{\Phi_0 \Phi_1}{\Phi_0 + \Phi_1}. \quad (18.7)$$

Обозначим:

$$\varphi_0 = 2\pi \frac{\Phi_0}{\Phi_0 + \Phi_1},$$

тогда периодическое решение  $z(\varphi)$  можно записать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} z(\varphi) &= a + \frac{b-a}{\varphi_0} \varphi, & 0 < \varphi < \varphi_0, \\ z(\varphi) &= a + \frac{b-a}{\varphi_0} \frac{\Phi_0}{\Phi_1} (2\pi - \varphi), & \varphi_0 < \varphi < 2\pi. \end{aligned} \right\} \quad (18.8)$$

Заметим теперь, что, поскольку выражение (18.8) представляет решение уравнения (18.2), функция  $z(\varphi)$  должна удовлетворять тождественно следующему соотношению:

$$\omega z'(\varphi) = \Phi[z(\varphi)]. \quad (18.9)$$

Сделаем теперь в уравнении, описывающем вынужденные колебания (18.1), замену переменных.

Введем вместо неизвестной  $x$  новую неизвестную  $\varphi$  посредством формулы

$$x = z(\varphi). \quad (18.10)$$

Дифференцируя (18.10) и подставляя в (18.1), получим:

$$z'(\varphi) \frac{d\varphi}{dt} = \Phi[z(\varphi)] + \varepsilon E \cos vt, \quad (18.11)$$

или, учитывая тождество (18.9):

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega + \frac{\varepsilon E \cos vt}{z'(\varphi)}. \quad (18.12)$$

Преобразованное уравнение (18.12) уже не содержит в правой части неоднозначных функций.

Для удобства построения приближенных решений дифференциальных уравнений обычно желательно, чтобы правая часть была регулярной функцией. В уравнении (18.12) правая часть ввиду наличия в знаменателе разрывной функции  $z'(\varphi)$  не удовлетворяет условию регулярности.

Для регуляризации уравнения (18.12) достаточно обратить роли переменных  $t$  и  $\varphi$  и в дальнейшем считать  $\varphi$  независимой переменной, а  $t$  неизвестной функцией  $\varphi$ , определяемой дифференциальным уравнением

$$\frac{d(vt)}{d\varphi} = \frac{v}{\omega + \frac{\varepsilon E \cos vt}{z'(\varphi)}}. \quad (18.13)$$

Если обозначить через  $\gamma$  положительную постоянную, такую, что

$$|\Phi(x)| > \gamma, \quad a < x < b, \quad (18.14)$$

то согласно (18.9) и (18.10) имеем:

$$\omega |z'(\varphi)| > \gamma. \quad (18.15)$$

Предположим, что амплитуда  $\varepsilon E$  внешней возмущающей силы меньше  $\gamma$ . Тогда знаменатель в правой части (18.13) положителен и сама правая часть уравнения (18.13) является аналитической функцией неизвестной  $t$ . Уравнения типа (18.13) исследовались А. Пуанкаре и А. Данжуа. Однако при помощи результатов, полученных ими, можно выяснить только качественный характер решений. Для получения методики, дающей возможность производить количественные расчеты, воспользуемся методом усреднения, кратко изложенным в главе I.

Для приложения результатов § 1 к уравнению (18.13) разложим правую часть уравнения (18.13) в ряд по степеням  $\varepsilon$ . Имеем:

$$\frac{d(vt)}{d\varphi} = \frac{v}{\omega} - \frac{\varepsilon v E}{\omega^2} \frac{\cos vt}{z'(\varphi)} + \frac{\varepsilon^2 v E^2}{\omega^3} \frac{\cos^2 vt}{[z'(\varphi)]^2} - \varepsilon^3 \dots \quad (18.16)$$

Будем исследовать уравнение (18.16) для резонансного случая. Предположим, что отношение  $\frac{v}{\omega}$  близко к некоторому рациональному числу  $\frac{p}{q}$ , где, как и выше,  $p$  и  $q$ , вообще говоря, небольшие взаимно простые числа.

Тогда, полагая

$$\frac{v}{\omega} = \frac{p}{q} + \varepsilon \Delta \quad (18.17)$$

и вводя новую переменную  $\tau$  по формуле

$$\tau = \nu t - \frac{p}{q} \varphi,$$

окончательно уравнение (18.16) можем записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{d\varphi} = \varepsilon \left\{ \Delta - \frac{p}{q} \frac{E}{\omega} \frac{\cos \left( \tau + \frac{p}{q} \varphi \right)}{z'(\varphi)} \right\} + \\ + \varepsilon^2 \left\{ \frac{pE^2}{q\omega^2} \frac{\cos^2 \left( \tau + \frac{p}{q} \varphi \right)}{[z'(\varphi)]^2} - \frac{\Delta E}{\omega} \frac{\cos \left( \tau + \frac{p}{q} \varphi \right)}{z'(\varphi)} \right\} + \varepsilon^3 \dots \end{aligned} \quad (18.18)$$

Уравнение типа (18.18) мы условились выше называть уравнением в стандартной форме.

Приближенное решение этого уравнения может быть построено на основании принципа усреднения.

В первом приближении согласно результатам § 1 главы I решение уравнения (18.18) будет:

$$\tau = \xi, \quad (18.19)$$

где  $\xi$  определяется из усредненного уравнения

$$\frac{d\xi}{d\varphi} = \varepsilon \Delta - \frac{\varepsilon p E}{q \omega} M \left\{ \frac{\cos \left( \xi + \frac{p}{q} \varphi \right)}{z'(\varphi)} \right\}. \quad (18.20)$$

Раскроем операцию усреднения в правой части полученного уравнения. Для этого необходимо разложить функцию  $\frac{1}{\omega z'(\varphi)}$  в ряд Фурье.

Имеем:

$$\frac{1}{\omega z'(\varphi)} = \frac{1}{\Phi[z(\varphi)]} = A_0 + \sum_{n \neq 0} A_n \cos(n\varphi + \vartheta_n). \quad (18.21)$$

Заметим теперь, что выражение

$$M_{\varphi} \left\{ \cos(n\varphi + \vartheta_n) \cos \left( \xi + \frac{p}{q} \varphi \right) \right\}$$

может быть отлично от нуля лишь при  $\frac{p}{q} = n$ . В этом случае имеем:

$$M_{\varphi} \{ \cos(n\varphi + \vartheta_n) \cos(\xi + n\varphi) \} = \frac{1}{2} \cos(\xi - \vartheta_n).$$

Таким образом, если  $\frac{p}{q} \neq n$ , где  $n$  — целое число, то уравнение первого приближения (18.20) вырождается в следующее:

$$\frac{d\xi}{d\varphi} = \varepsilon \Delta, \quad (18.22)$$

из которого находим:

$$\tau = \xi = \varepsilon \Delta \varphi + \text{const},$$

т. е.,

$$\nu t - \frac{p}{q} \varphi = \left( \frac{\nu}{\omega} - \frac{p}{q} \right) \varphi + \text{const},$$

или

$$\varphi = \omega t + \varphi_0, \quad (18.23)$$

и, следовательно, в первом приближении

$$x = z(\omega t + \varphi_0). \quad (18.24)$$

Итак, в случае, если  $\frac{p}{q} \neq n$ , мы получаем для вынужденных колебаний в первом приближении такое же выражение, как и для свободных колебаний, когда внешняя сила  $\varepsilon E \cos \nu t$  на систему не действует.

Таким образом, в первом приближении влияние малой внешней силы на форму и частоту колебаний оказывается пренебрежимым в случае, когда ее частота не является достаточно близкой к одному из обертонов собственной частоты.

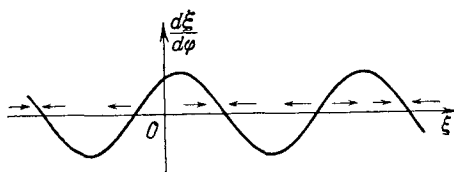


Рис. 108.

Рассмотрим теперь случай, когда  $\frac{p}{q}$  равно некоторому целому числу  $m$ , что соответствует субгармоническому резонансу  $\omega \approx \frac{\nu}{m}$ .

Из уравнения (18.20) находим:

$$\frac{d\xi}{d\varphi} = \frac{\nu}{\omega} - m - \frac{\varepsilon m A_m}{2} \cos(\xi - \vartheta_m). \quad (18.25)$$

Полученное уравнение значительно проще, чем соответствующие уравнения первого приближения (14.39) для системы, рассмотренной в § 14 настоящей главы, где мы получили систему двух дифференциальных уравнений относительно двух неизвестных — амплитуды и полной фазы колебания. В рассматриваемом случае релаксационных колебаний имеем лишь одно дифференциальное уравнение относительно фазового угла  $\xi$ , которое к тому же интегрируется в квадратурах.

Характер решений уравнения (18.25) можно обнаружить и непосредственно, не производя предварительно его интегрирования.

Пусть, например,

$$\left| \frac{\nu}{\omega} - m \right| < \left| \frac{\varepsilon m A_m}{2} \right|. \quad (18.26)$$

Тогда производная  $\frac{d\xi}{d\varphi}$  будет знакопеременной функцией  $\xi$  вида, изображенного на рис. 108.

Таким образом, очевидно, существуют постоянные решения  $\xi_i$ , являющиеся корнями уравнения

$$F(\xi) = \frac{\nu}{\omega} - m - \frac{\varepsilon m A_m}{2} \cos(\xi - \vartheta_m) = 0. \quad (18.27)$$

При этом те из решений, для которых

$$F'(\xi) = \frac{\varepsilon m A_m}{2} \sin(\xi - \vartheta_m) > 0,$$

неустойчивы, а те решения, для которых

$$F'(\xi) = \frac{\varepsilon m A_m}{2} \sin(\xi - \vartheta_m) < 0,$$

устойчивы.

Так как в рассматриваемом случае  $\xi = \tau = \nu t - m\varphi$ , имеем:

$$x = z \left[ \frac{\nu t - \xi}{m} \right], \quad (18.28)$$

откуда очевидно, что вынужденные релаксационные колебания с течением времени приближаются к установившимся периодическим колебаниям, соответствующим различным корням уравнения (18.27) и совершающимся с частотой, точно равной субгармонике  $\frac{\nu}{m}$  частоты  $\nu$  внешней силы.

Таким образом, для значений частоты  $\nu$ , лежащей внутри резонансной полосы, определенной неравенством (18.26):

$$m - \left| \frac{\varepsilon m A_n}{2} \right| < \frac{\nu}{\omega} < m + \left| \frac{\varepsilon m A_n}{2} \right|, \quad (18.29)$$

имеет место явление синхронизации.

Ширина резонансной зоны в первом приближении

$$|\varepsilon m A_n|,$$

как видно, пропорциональна амплитуде внешней силы.

Рассмотрим теперь случай, когда  $\nu$  лежит вне резонансной зоны и, следовательно:

$$\left| \frac{\nu}{\omega} - m \right| > \left| \frac{\varepsilon m A_m}{2} \right|. \quad (18.30)$$

В этом случае согласно уравнению (18.25) очевидно, что производная  $\frac{d\xi}{d\varphi}$  имеет постоянный знак, равный знаку разности  $\frac{\nu}{\omega} - m$ .

Интегрируя уравнения (18.25), получаем:

$$\varphi = \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\frac{\nu}{\omega} - m - \frac{\varepsilon m A_m}{2} \cos(\xi - \vartheta_m)} + \text{const},$$

откуда находим:

$$\varphi = \frac{\xi}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} f(\xi) + \vartheta_0, \quad (18.31)$$

где

$$\alpha = \left( \frac{\nu}{\omega} - m \right) \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2 m^2 A_m^2}{4 \left( m - \frac{\nu}{\omega} \right)^2}}, \quad (18.32)$$

$\vartheta_0$  — произвольная постоянная,  $f(\xi)$  — периодическая функция  $\xi$  с периодом  $2\pi$ :

$$f(\xi) = \frac{1}{\pi} \arctg \frac{\cos\left(\frac{\xi - \vartheta_m - \beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\xi - \vartheta_m + \beta}{2}\right)}. \quad (18.33)$$

Здесь

$$\beta = \arccos \frac{\varepsilon m A_m}{2 \left( m - \frac{\nu}{\omega} \right)}, \quad 0 < \beta < \pi.$$

Обращая (18.31), получим:

$$\xi = \alpha (\varphi - \vartheta_0) + F \{ \alpha (\varphi - \vartheta_0) \}, \quad (18.34)$$

где  $F(\vartheta)$  — периодическая функция  $\vartheta$  с периодом  $2\pi$ .

Замечая, что в принятом приближении

$$\xi = \tau = \nu t - m\varphi,$$

из (18.34) имеем:

$$\nu t = m\varphi + \alpha (\varphi - \vartheta_0) + F \{ \alpha (\varphi - \vartheta_0) \}. \quad (18.35)$$

Положим

$$\alpha (\varphi - \vartheta_0) = \theta;$$

тогда

$$\varphi = \vartheta_0 + \frac{\theta}{\alpha} \quad (18.36)$$

и

$$(m + \alpha) \theta + \alpha F(\theta) = \alpha (\nu t - m\vartheta_0),$$

откуда, решая это уравнение относительно  $\theta$ , находим:

$$\theta = \frac{\alpha (\nu t - m\vartheta_0)}{m + \alpha} + \alpha \sigma \left\{ \frac{\alpha (\nu t - m\vartheta_0)}{m + \alpha} \right\}, \quad (18.37)$$

где  $\sigma(\vartheta)$  — периодическая функция  $\vartheta$  с периодом  $2\pi$ .

Подставляя значения  $\theta$  (18.37) в правую часть (18.31), получаем:

$$\varphi = \Omega_p t + \varphi_1 + \sigma [m(\Omega_s - \Omega_p)t - m\varphi_1], \quad (18.38)$$

где обозначено:

$$\Omega_p = \frac{\nu}{m + \alpha}, \quad \Omega_s = \frac{\nu}{m},$$

$$\varphi_1 = \frac{\vartheta_0 \alpha}{m + \alpha} = \text{const.}$$

Подставляя (18.38) в (18.28), находим окончательно приближенное выражение для вынужденных релаксационных колебаний в виде

$$x = z \{ \Omega_p t + \varphi_1 + \sigma [m(\Omega_s - \Omega_p)t - m\varphi_1] \}. \quad (18.39)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае колебания являются кратно периодическими и совершаются с двумя основными частотами — с частотой  $\Omega_p$ , которую можно было бы назвать измененной собственной частотой, так как  $\Omega_p = \omega$  при  $\varepsilon = 0$ , и с частотой биений

$$|m(\Omega_s - \Omega_p)| = \left| \frac{\alpha \nu}{m + \alpha} \right| \approx \sqrt{(\nu - m\omega)^2 - \frac{\varepsilon^2 m^2 A_n^2}{4}}, \quad (18.40)$$

представляющей разностный тон между частотой внешней силы  $\nu = m\Omega$ , и  $m$ -м обертоном измененной собственной частоты.

Заметим, что при приближении  $\nu$  к границе резонансной зоны  $\alpha \rightarrow 0$  а потому стремится к нулю и частота биений.

Кроме того, нетрудно показать, что при удалении от резонанса интенсивность биений, определяемых функцией  $\sigma$ , уменьшается и измененная

собственная частота  $\Omega_p$  приближается к своему значению  $\omega$ , соответствующему свободным колебаниям.

Перейдем теперь к построению второго приближения. Для этого прежде всего найдем выражение улучшенного первого приближения.

Рассмотрим сначала общий случай произвольного рационального значения отношения  $\frac{p}{q}$ .

Воспользовавшись разложением Фурье (18.21), получаем для коэффициента при первой степени  $\varepsilon$  в правой части уравнения (18.20) выражение

$$\Delta - \frac{p}{q\omega} \frac{\cos\left(\tau + \frac{p}{q}\varphi\right)}{z'(\varphi)} = \Delta - \frac{p}{q} A_0 \cos\left(\tau + \frac{p}{q}\varphi\right) - \\ - \frac{p}{q} \sum_{n \neq 0} \frac{A_n}{2} \left\{ \cos\left[\left(n + \frac{p}{q}\right)\varphi + \tau + \vartheta_n\right] + \cos\left[\left(n - \frac{p}{q}\right)\varphi - \tau + \vartheta_n\right] \right\}.$$

Поэтому улучшенное первое приближение будет иметь следующий вид:

$$\tau = \xi + \varepsilon u(\varphi, \xi), \quad (18.41)$$

где

$$u(\varphi, \xi) = -A_0 \sin\left(\xi + \frac{p}{q}\varphi\right) - \frac{p}{q} \sum_{n \neq 0} \frac{A_n}{2} \frac{\sin\left\{\left(n + \frac{p}{q}\right)\varphi + \xi + \vartheta_n\right\}}{n + \frac{p}{q}} - \\ - \frac{p}{q} \sum_{\substack{n \neq \frac{p}{q} \\ n \neq 0,}} \frac{A_n}{2} \frac{\sin\left\{\left(n - \frac{p}{q}\right)\varphi - \xi + \vartheta_n\right\}}{n - \frac{p}{q}}. \quad (18.42)$$

Подставляя значение  $\tau$  (18.41) в уравнение (18.20) и усредняя по  $\varphi$ , получим уравнение второго приближения:

$$\frac{d\xi}{d\varphi} = \varepsilon \left\{ \Delta - \frac{p}{q} M \left[ \frac{\cos\left(\xi + \frac{p}{q}\varphi\right)}{\omega z'(\varphi)} \right] \right\} + \varepsilon^2 M \left[ \frac{p}{q} \frac{\sin\left(\xi + \frac{p}{q}\varphi\right)}{\omega z'(\varphi)} u(\varphi, \xi) + \right. \\ \left. + \frac{p}{q} \frac{\cos^2\left(\xi + \frac{p}{q}\varphi\right)}{[\omega z'(\varphi)]^2} - \frac{\Delta}{\omega} \frac{\cos\left(\xi + \frac{p}{q}\varphi\right)}{z'(\varphi)} \right]. \quad (18.43)$$

Рассмотрим сначала нерезонансный случай, когда отношение  $\frac{p}{q}$  не равно ни целому, ни половине целого числа, и следовательно, когда частота внешней силы не лежит вблизи обертонов собственной частоты —  $n\omega$  и ее половины —  $\frac{n\omega}{2}$ .

Заметим, что в принятом нерезонансном случае для любых целых  $n$  и  $m$  имеем неравенства

$$n \neq \frac{p}{q}, \quad n + \frac{p}{q} \neq m - \frac{p}{q}.$$



Далее, на основании (18.21) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\cos\left(\xi + \frac{p}{q}\varphi\right)}{\omega z'(\varphi)} &= A_0 \cos\left(\xi + \frac{p}{q}\varphi\right) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0} A_n \left\{ \cos\left[\left(n + \frac{p}{q}\right)\varphi + \xi + \vartheta_n\right] + \right. \\ &\quad \left. + \cos\left[\left(n - \frac{p}{q}\right)\varphi - \xi + \vartheta_n\right] \right\}, \\ \frac{\sin\left(\xi + \frac{p}{q}\varphi\right)}{\omega z'(\varphi)} &= A_0 \sin\left(\xi + \frac{p}{q}\varphi\right) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0} A_n \left\{ \sin\left[\left(n + \frac{p}{q}\right)\varphi + \xi + \vartheta_n\right] - \right. \\ &\quad \left. - \sin\left[\left(n - \frac{p}{q}\right)\varphi - \xi + \vartheta_n\right] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (18.44)$$

Поэтому, учитывая (18.42) и (18.44), можем написать:

$$\begin{aligned} M_{\varphi} \left\{ \frac{\cos\left(\xi + \frac{p}{q}\varphi\right)}{\omega z'(\varphi)} \right\} &= 0, \\ M_{\varphi} \left\{ \frac{\cos^2\left(\xi + \frac{p}{q}\varphi\right)}{[\omega z'(\varphi)]^2} \right\} &= \frac{1}{2} A_0^2 + \frac{1}{4} \sum_{n \neq 0} A_n^2, \\ M_{\varphi} \left\{ \frac{\sin\left(\xi + \frac{p}{q}\varphi\right)}{\omega z'(\varphi)} u(\varphi, \xi) \right\} &= -\frac{A_0^2}{2} + \frac{p}{q} \sum_{n \neq 0} \frac{A_n^2}{8} \left[ \frac{1}{n - \frac{p}{q}} - \frac{1}{n + \frac{p}{q}} \right]. \end{aligned}$$

После этого уравнение второго приближения (18.43) принимает следующий вид:

$$\frac{d\xi}{d\varphi} = \varepsilon \Delta + \varepsilon^2 \gamma = \frac{\nu}{\omega} - \frac{p}{q} + \varepsilon^2 \gamma, \quad (18.45)$$

где обозначено

$$\gamma = \frac{p}{q} \sum_{n \neq 0} \frac{A_n^2}{4} \frac{n^2}{n^2 - \frac{p^2}{q^2}}. \quad (18.46)$$

Интегрируя уравнение (18.45), находим:

$$\xi = \left[ \frac{\nu}{\omega} - \frac{p}{q} + \varepsilon^2 \gamma \right] \varphi + \xi_0,$$

где  $\xi_0$  — произвольная постоянная. Принимая во внимание (18.41), получаем следующую формулу второго приближения:

$$z = \nu t - \frac{p}{q} \varphi = \left[ \frac{\nu}{\omega} - \frac{p}{q} + \varepsilon^2 \gamma \right] \varphi + \xi_0 + \varepsilon u \left[ \varphi, \left( \frac{\nu}{\omega} - \frac{p}{q} + \varepsilon^2 \gamma \right) \varphi + \xi_0 \right],$$

из которой с точностью до величин второго порядка малости включительно получаем:

$$\varphi = \frac{\nu t - \xi_0}{\frac{\nu}{\omega} + \varepsilon^2 \gamma} - \frac{\omega}{\nu} \varepsilon u \left\{ \frac{\nu t - \xi_0}{\frac{\nu}{\omega} + \varepsilon^2 \gamma}, \left[ \frac{\nu}{\omega} - \frac{p}{q} + \varepsilon^2 \gamma \right] \frac{\nu t - \xi_0}{\frac{\nu}{\omega} + \varepsilon^2 \gamma} + \xi_0 \right\}. \quad (18.47)$$

Полагая здесь:

$$\Omega_p = \frac{\omega}{1 + \varepsilon^2 \gamma \frac{\omega}{\nu}}, \quad \varphi_0 = -\Omega_p \frac{\xi_0}{\nu}, \quad (18.48)$$

имеем:

$$\varphi = \Omega_p t + \varphi_0 - \varepsilon u \left\{ \Omega_p t + \varphi_0, \left( \nu - \frac{p}{q} \Omega_p \right) t - \frac{p}{q} \varphi_0 \right\} \frac{\omega}{\nu}. \quad (18.49)$$

Итак, в нерезонансном случае получаем следующие выражения второго приближения для вынужденных релаксационных колебаний:

$$x = z(\varphi),$$

$$\begin{aligned} \varphi = & \Omega_p t + \varphi_0 + \frac{p\omega}{q\nu} \sum_{n \neq 0} \frac{\varepsilon A_n}{2 \left( n + \frac{p}{q} \right)} \sin [n(\Omega_p t + \varphi_0) + \nu t + \vartheta_n] + \\ & + \frac{p\omega}{q\nu} \sum_{n \neq 0} \frac{\varepsilon A_n}{2 \left( n - \frac{p}{q} \right)} \sin [n(\Omega_p t + \varphi_0) - \nu t + \vartheta_n] + \varepsilon A_0 \sin \nu t, \end{aligned} \quad (18.50)$$

где согласно (18.48) с принятой нами степенью точности

$$\Omega_p = \omega - \sum_{n \neq 0} \frac{\varepsilon^2 A_n^2}{4} \frac{n^2 \omega}{n^2 - \frac{p^2}{q^2}}. \quad (18.51)$$

Из полученных формул второго приближения нетрудно исключить вспомогательную величину — отношение  $\frac{p}{q}$ . Так как разность  $\frac{\nu}{\omega} - \frac{p}{q}$  первого порядка малости, то формулы (18.50) верны с точностью до величин второго, а формула (18.51) до величин третьего порядка малости. С такой же степенью точности можем написать:

$$\left. \begin{aligned} x &= z(\varphi), \\ \varphi &= \Omega_p t + \varphi_0 + \sum_{n \neq 0} \frac{\varepsilon A_n \omega}{2(n\omega + \nu)} \sin \{n(\Omega_p t + \varphi_0) + \nu t + \vartheta_n\} + \\ &+ \sum_{n \neq 0} \frac{\varepsilon A_n \omega}{2(n\omega - \nu)} \sin \{n(\Omega_p t + \varphi_0) - \nu t + \vartheta_n\} + \varepsilon A_0 \sin \nu t, \\ \Omega_p &= \omega - \sum_{n \neq 0} \frac{\varepsilon^2 A_n^2}{8} \left[ \frac{n\omega}{n\omega - \nu} + \frac{n\omega}{n\omega + \nu} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (18.52)$$

Найденное решение соответствует асинхронному режиму колебаний. Здесь колебания будут квазипериодическими с двумя основными частотами  $\nu$  и  $\Omega_p$ .

Изменение фазового угла  $\varphi$  представляется здесь как вращение с постоянной угловой скоростью, равной  $\Omega_p$ , на которое налагаются колебания с малой амплитудой, с частотами  $\nu$ ,  $n\Omega_p - \nu$ ,  $n\Omega_p + \nu$ .

Перейдем теперь к построению второго приближения в резонансном случае.

Для исследования резонансного случая следует взять отношение  $\frac{p}{q}$  равным целому или половине целого числа. Если положим  $\frac{p}{q} = m$ , то в качестве уравнения второго приближения получим уравнение, отличающееся от (18.25) на члены второго порядка малости. С помощью этого уравнения мы можем уточнить положение и ширину резонансной зоны, уточнить значение измененной собственной частоты асинхронных колебаний и т. д.

Не останавливаясь на этом, рассмотрим случай, когда отношение  $\frac{p}{q}$  является половиной целого числа:

$$\frac{p}{q} = \frac{2m+1}{2}.$$

Для раскрытия операции усреднения в уравнении второго приближения (18.43) заметим, что согласно (18.42) имеем:

$$\begin{aligned} u(\varphi, \xi) = & -A_0 \sin \left( \xi + \frac{2m+1}{2} \varphi \right) - \\ & - \frac{2m+1}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{A_n}{2} \frac{\sin \left[ \left( n + \frac{2m+1}{2} \right) \varphi + \xi + \vartheta_n \right]}{n + \frac{2m+1}{2}} - \\ & - \frac{2m+1}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{A_n}{2} \frac{\sin \left[ \left( n - \frac{2m+1}{2} \right) \varphi - \xi + \vartheta_n \right]}{n - \frac{2m+1}{2}}; \quad (18.53) \end{aligned}$$

подставляя значение (18.53) в правую часть уравнения (18.43), после ряда выкладок находим:

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\nu}{\omega} - \frac{2m+1}{2} + \varepsilon^2 \gamma - \varepsilon^2 \frac{2m+1}{4} S_m \cos(2\xi + \phi_m), \quad (18.54)$$

где обозначено

$$\left. \begin{aligned} S_m \sin \phi_m &= M_{\varphi} \left\{ \frac{\sin(2m+1)\varphi}{[\omega z'(\varphi)]^2} \right\}, \\ S_m \cos \phi_m &= -M_{\varphi} \left\{ \frac{\cos(2m+1)\varphi}{[\omega z'(\varphi)]^2} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (18.55)$$

Полученное уравнение (18.54) отличается от уравнения (18.45) для нерезонансного случая наличием слагаемого

$$\varepsilon^2 \frac{2m+1}{4} S_m \cos(2\xi - \phi_m).$$

Так же как и в случае первого приближения, нетрудно видеть, что резонансная зона определяется неравенством

$$-\varepsilon^2 \frac{2m+1}{4} S_m < \frac{\nu}{\omega} - \frac{2m+1}{2} + \varepsilon^2 \gamma < \varepsilon^2 \frac{2m+1}{4} S_m \quad (18.56)$$

или, вводя измененную собственную частоту  $\Omega_p$  с той же степенью точности, неравенством

$$-\varepsilon^2 \frac{2m+1}{4} S_m < \frac{\nu}{\Omega_p} - \frac{2m+1}{2} < \varepsilon^2 \frac{2m+1}{4} S_m. \quad (18.57)$$

Итак, рассматривая первое приближение, мы нашли резонансные зоны только для  $\nu$ , лежащих в окрестности  $m\omega$ , причем ширина их оказалась пропорциональной первой степени  $\varepsilon$ ; во втором приближении обнаруживаются дополнительные резонансные зоны для  $\nu$ , лежащих в окрестности  $\frac{2m+1}{2}\omega$ , и ширина этих «вторичных» зон пропорциональна квадрату  $\varepsilon$ .

Анализ высших приближений указал бы также на наличие резонансных зон для  $\nu \approx \frac{p}{q}\omega$ ,  $q = 3, 4, \dots$  с шириной порядка  $\varepsilon^q$ .

### § 19. Воздействие «периодических» сил на нелинейные системы с медленно меняющимися параметрами

Перейдем теперь к рассмотрению воздействия внешних «периодических» сил на нелинейные колебательные системы с медленно меняющимися параметрами, причем будем предполагать, что «частоты» внешних сил в свою очередь также медленно изменяются со временем (медленно в смысле, указанном нами в § 8).

Итак, рассмотрим следующее нелинейное дифференциальное уравнение с медленно меняющимися коэффициентами:

$$\frac{d}{dt} \left[ m(\tau) \frac{dx}{dt} \right] + k(\tau) x = \varepsilon F \left( \tau, \theta, x, \frac{dx}{dt} \right), \quad (19.1)$$

в котором, как и везде,  $\varepsilon$  — малый положительный параметр,  $\tau = \varepsilon t$  — «медленное» время,  $F \left( \tau, \theta, x, \frac{dx}{dt} \right)$  — функция периодическая по  $\theta$  с периодом  $2\pi$ , которая может быть представлена в виде

$$F \left( \tau, \theta, x, \frac{dx}{dt} \right) = \sum_{n=-N}^N e^{in\theta} F_n \left( \tau, x, \frac{dx}{dt} \right), \quad (19.2)$$

причем коэффициенты  $F_n \left( \tau, x, \frac{dx}{dt} \right)$  этой конечной суммы в свою очередь являются некоторыми полиномами  $x, \frac{dx}{dt}$ . Коэффициенты этих полиномов зависят от  $\tau$ . Будем предполагать, кроме того, что  $\frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau)$ , т. е. мгновенная частота внешней периодической силы тоже медленно изменяется со временем. Для возможности применения асимптотического метода к построению приближенных решений уравнения (19.1) предположим, как и в § 8, что коэффициенты уравнения (19.1)  $m(\tau)$ ,  $k(\tau)$ , а также  $F_n \left( \tau, x, \frac{dx}{dt} \right)$  и  $\nu(\tau)$  имеют достаточное число производных по  $\tau$  для всех конечных значений  $\tau$  и, кроме того, для любых  $\tau$  на интервале  $0 \leq \tau \leq L$   $m(\tau)$  и  $k(\tau)$  строго положительны.