

или, вводя измененную собственную частоту Ω_p с той же степенью точности, неравенством

$$-\varepsilon^2 \frac{2m+1}{4} S_m < \frac{\nu}{\Omega_p} - \frac{2m+1}{2} < \varepsilon^2 \frac{2m+1}{4} S_m. \quad (18.57)$$

Итак, рассматривая первое приближение, мы нашли резонансные зоны только для ν , лежащих в окрестности $m\omega$, причем ширина их оказалась пропорциональной первой степени ε ; во втором приближении обнаруживаются дополнительные резонансные зоны для ν , лежащих в окрестности $\frac{2m+1}{2}\omega$, и ширина этих «вторичных» зон пропорциональна квадрату ε .

Анализ высших приближений указал бы также на наличие резонансных зон для $\nu \approx \frac{p}{q}\omega$, $q = 3, 4, \dots$ с шириной порядка ε^q .

§ 19. Воздействие «периодических» сил на нелинейные системы с медленно меняющимися параметрами

Перейдем теперь к рассмотрению воздействия внешних «периодических» сил на нелинейные колебательные системы с медленно меняющимися параметрами, причем будем предполагать, что «частоты» внешних сил в свою очередь также медленно изменяются со временем (медленно в смысле, указанном нами в § 8).

Итак, рассмотрим следующее нелинейное дифференциальное уравнение с медленно меняющимися коэффициентами:

$$\frac{d}{dt} \left[m(\tau) \frac{dx}{dt} \right] + k(\tau) x = \varepsilon F \left(\tau, \theta, x, \frac{dx}{dt} \right), \quad (19.1)$$

в котором, как и везде, ε — малый положительный параметр, $\tau = \varepsilon t$ — «медленное» время, $F \left(\tau, \theta, x, \frac{dx}{dt} \right)$ — функция периодическая по θ с периодом 2π , которая может быть представлена в виде

$$F \left(\tau, \theta, x, \frac{dx}{dt} \right) = \sum_{n=-N}^N e^{in\theta} F_n \left(\tau, x, \frac{dx}{dt} \right), \quad (19.2)$$

причем коэффициенты $F_n \left(\tau, x, \frac{dx}{dt} \right)$ этой конечной суммы в свою очередь являются некоторыми полиномами $x, \frac{dx}{dt}$. Коэффициенты этих полиномов зависят от τ . Будем предполагать, кроме того, что $\frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau)$, т. е. мгновенная частота внешней периодической силы тоже медленно изменяется со временем. Для возможности применения асимптотического метода к построению приближенных решений уравнения (19.1) предположим, как и в § 8, что коэффициенты уравнения (19.1) $m(\tau)$, $k(\tau)$, а также $F_n \left(\tau, x, \frac{dx}{dt} \right)$ и $\nu(\tau)$ имеют достаточное число производных по τ для всех конечных значений τ и, кроме того, для любых τ на интервале $0 \leq \tau \leq L$ $m(\tau)$ и $k(\tau)$ строго положительны.

При этих предположениях построим приближенные решения для уравнения (19.1) в самом общем виде, пригодные для исследования как резонансной зоны, так и подходов к ней из нерезонансной зоны, причем для случая любого демультипликационного резонанса.

К правильному выбору структуры асимптотического решения уравнения (19.1) приходим, как и в предыдущих параграфах, из тех же физических соображений.

При отсутствии возмущения ($\varepsilon = 0$) и при постоянном τ решение уравнения (19.1) будет выражаться синусоидой с постоянными амплитудой и фазой колебания, определяемыми начальными значениями.

При наличии возмущения в решении могут появиться обертоны, гармоника комбинационных частот; могут возникнуть различные резонансы и другие явления, о которых мы уже говорили выше (§§ 1 и 13). Наличие же медленно меняющегося времени τ (медленная изменяемость массы системы, коэффициента упругости, частоты внешней периодической силы и других параметров) также вызывает в системе ряд дополнительных явлений, не наблюдаемых в колебательных системах, описываемых уравнением (13.1). Так, например, как указывалось в § 8, здесь уже теряет смысл общепринятое понятие собственной частоты системы, так как в данном случае «собственная частота» $\omega(\tau) = \sqrt{\frac{k(\tau)}{m(\tau)}}$ будет также медленно изменяться со временем, зависимость мгновенной частоты внешней силы $\nu(\tau)$ от времени будет влиять на величину амплитуды колебаний и т. д.

Принимая во внимание все эти физические соображения, естественно, учитывая структуру асимптотических решений для уравнений (8.1) и (13.1), приближенное решение уравнения (19.1) искать в виде ряда

$$x = a \cos\left(\frac{p}{q}\theta + \vartheta\right) + \varepsilon u_1\left(\tau, a, \theta, \frac{p}{q}\theta + \vartheta\right) + \varepsilon^2 u_2\left(\tau, a, \theta, \frac{p}{q}\theta + \vartheta\right) + \dots, \quad (19.3)$$

в котором $u_1\left(\tau, a, \theta, \frac{p}{q}\theta + \vartheta\right)$, $u_2\left(\tau, a, \theta, \frac{p}{q}\theta + \vartheta\right)$, ... — периодические функции углов θ , $\frac{p}{q}\theta + \vartheta$ с периодом 2π ; p и q , как и выше, — некоторые небольшие взаимно простые числа, выбор которых зависит от того, какой резонанс мы собираемся исследовать, а величины a и ϑ — функции времени, определяющиеся из следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(\tau, a, \vartheta) + \varepsilon^2 A_2(\tau, a, \vartheta) + \dots, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega(\tau) - \frac{p}{q}\nu(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a, \vartheta) + \varepsilon^2 B_2(\tau, a, \vartheta) + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (19.4)$$

где $\omega(\tau) = \sqrt{\frac{k(\tau)}{m(\tau)}}$ — «собственная» частота системы, $\frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau)$ — мгновенная частота внешнего периодического возмущения, $\tau = \varepsilon t$, а разность $\omega(\tau) - \frac{p}{q}\nu(\tau)$ может изменяться в процессе колебания.

Для определения функций, стоящих в правых частях выражений (19.3) и (19.4), мы можем, как и обычно, найти, исходя из (19.3), выражения для $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$ с учетом, разумеется, уравнений (19.4), полученные выражения подставить в уравнение (19.1), приравнять коэффициенты при оди-

наковых степенях ε , после чего найти выражения для $u_1\left(\tau, a, \theta, \frac{p}{q}\theta + \vartheta\right)$, $u_2\left(\tau, a, \theta, \frac{p}{q}\theta + \vartheta\right)$, ..., а также, учитывая дополнительные условия типа (1.8), выражения для $A_1(\tau, a, \vartheta)$, $B_1(\tau, a, \vartheta)$, $A_2(\tau, a, \vartheta)$, $B_2(\tau, a, \vartheta)$, ...

Можно эти функции найти и проще, воспользовавшись уравнениями гармонического баланса, которые в рассматриваемом случае имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^{2\pi q} \left\{ \frac{d}{dt} \left[m(\tau) \frac{dx}{dt} \right] + k(\tau) x - \right. \\ & \left. - \varepsilon F\left(\tau, \theta, x, \frac{dx}{dt}\right) \right\}_{x=a \cos\left(\frac{p}{q}\theta + \vartheta\right) + \dots} \cos\left(\frac{p}{q}\theta + \vartheta\right) d\theta = 0, \\ & \int_0^{2\pi q} \left\{ \frac{d}{dt} \left[m(\tau) \frac{dx}{dt} \right] + k(\tau) x - \right. \\ & \left. - \varepsilon F\left(\tau, \theta, x, \frac{dx}{dt}\right) \right\}_{x=a \cos\left(\frac{p}{q}\theta + \vartheta\right) + \dots} \sin\left(\frac{p}{q}\theta + \vartheta\right) d\theta = 0. \end{aligned} \right\} \quad (19.5)$$

Подставляя в подынтегральные выражения значения x , $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, найденные из (19.3) с точностью до величин первого порядка малости с учетом того, что a и ϑ являются функциями времени, удовлетворяющими уравнениям (19.4), и, произведя интегрирование, получаем уравнения типа (14.34) для функций $A_1(\tau, a, \vartheta)$ и $B_1(\tau, a, \vartheta)$.

Учитывая при подстановке x , $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$ также величины, пропорциональные ε^2 , получим уравнения, определяющие $A_2(\tau, a, \vartheta)$ и $B_2(\tau, a, \vartheta)$.

После этих элементарных выкладок находим приближенные решения для уравнения (19.1).

В первом приближении решение уравнения (19.1) будет иметь вид

$$x = a \cos\left(\frac{p}{q}\theta + \vartheta\right), \quad (19.6)$$

где a и ϑ должны быть определены из системы уравнений первого приближения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(\tau, a, \vartheta), \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega(\tau) - \frac{p}{q} \nu(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a, \vartheta), \end{aligned} \right\} \quad (19.7)$$

в которой $A_1(\tau, a, \vartheta)$ и $B_1(\tau, a, \vartheta)$ — периодические по ϑ с периодом 2π частные решения системы

$$\left. \begin{aligned} & \left[\omega(\tau) - \frac{p}{q} \nu(\tau) \right] \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} - 2a \nu(\tau) B_1 = \\ & = \frac{1}{2\pi^2 m(\tau)} \sum_{\sigma} e^{i\sigma q \vartheta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_0(\tau, a, \theta, \psi) e^{-i\sigma q \vartheta'} \cos \psi \, d\theta \, d\psi, \\ & \left[\omega(\tau) - \frac{p}{q} \nu(\tau) \right] a \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta} + 2\omega(\tau) A_1 = -\frac{1}{m(\tau)} \frac{d[m(\tau) \omega(\tau)]}{d\tau} - \\ & - \frac{1}{2\pi^2 m(\tau)} \sum_{\sigma} e^{i\sigma q \vartheta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_0(\tau, a, \theta, \psi) e^{-i\sigma q \vartheta'} \sin \psi \, d\theta \, d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (19.8)$$

В этой системе, как обычно, введено обозначение

$$F_0(\tau, a, \theta, \psi) = F(\tau, \theta, a \cos \psi, -a\omega(\tau) \sin \psi), \quad \sqrt{\vartheta'} = \psi - \frac{p}{q} \theta.$$

Во втором приближении имеем:

$$x = a \cos\left(\frac{p}{q} \theta + \vartheta\right) + \varepsilon u_1\left(\tau, a, \theta, \frac{p}{q} \theta + \vartheta\right), \quad (19.9)$$

где a и ϑ — решения следующей системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(\tau, a, \vartheta) + \varepsilon^2 A_2(\tau, a, \vartheta), \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega(\tau) - \frac{p}{q} \nu(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a, \vartheta) + \varepsilon^2 B_2(\tau, a, \vartheta). \end{aligned} \right\} \quad (19.10)$$

Здесь $u_1\left(\tau, a, \theta, \frac{p}{q} \theta + \vartheta\right)$ определяется формулой

$$u_1\left(\tau, a, \theta, \frac{p}{q} \theta + \vartheta\right) = \frac{1}{4\pi^2 m(\tau)} \sum_{n, m} \frac{e^{i\left[n\theta + m\left(\frac{p}{q} \theta + \vartheta\right)\right]}}{\omega^2(\tau) - (n\omega(\tau) + m\nu(\tau))^2} \times \\ \times \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_0(\tau, a, \theta, \psi) e^{-i(n\vartheta + m\psi)} d\theta d\psi, \quad (19.11)$$

в которой суммирование выполняется для значений n, m , удовлетворяющих условию $nq + p(m + 1) \neq 0$. В этом случае в правой части выражения (19.11) отсутствуют члены, знаменатели которых могут обращаться в нуль для любых τ в интервале $0 \leq \tau \leq L$. $A_2(\tau, a, \vartheta)$ и $B_2(\tau, a, \vartheta)$ определяются из системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \left[\omega(\tau) - \frac{p}{q} \nu(\tau)\right] \frac{\partial A_2}{\partial \vartheta} - 2a\omega(\tau) B_2 &= \\ &= - \left[\frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} B_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \tau} - aB_1^2 + \frac{dm(\tau)}{d\tau} \frac{A_1}{m(\tau)} \right] + \\ &+ \frac{1}{2\pi^2 m(\tau)} \sum_{\sigma} e^{i\sigma q \vartheta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(\tau, a, \theta, \psi) e^{-i\sigma q \vartheta'} \cos \psi d\theta d\psi, \\ \left[\omega(\tau) - \frac{p}{q} \nu(\tau)\right] a \frac{\partial B_2}{\partial \vartheta} + 2\omega(\tau) A_2 &= \\ &= - \left[\frac{\partial B_1}{\partial a} aA_1 + \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta} aB_1 + \frac{\partial B_1}{\partial \tau} a + 2A_1 B_1 + \frac{dm(\tau)}{d\tau} \frac{aB_1}{m(\tau)} \right] - \\ &- \frac{1}{2\pi^2 m(\tau)} \sum_{\sigma} e^{i\sigma q \vartheta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(\tau, a, \theta, \psi) e^{-i\sigma q \vartheta'} \sin \psi d\theta d\psi, \end{aligned} \right\} \quad (19.12)$$

где $F_1(\tau, a, \theta, \psi)$ — функция, периодическая по θ и ψ с периодом 2π , явное выражение для которой становится известным, как только будет найдено выражение для $u_1(\tau, a, \theta, \psi)$ ($\psi = \frac{p}{q} \theta + \vartheta$).

Заметим так же, как и в § 8, что полученные здесь уравнения, определяющие a и ϑ в общем случае, не могут быть проинтегрированы в замкнутом виде, и поэтому приходится пользоваться численными методами интегрирования или ограничиваться исследованиями качественного характера; численное интегрирование уравнений типа (19.4) во много раз проще, чем численное интегрирование непосредственно уравнения (19.1), как об этом уже говорилось.

Перейдем к рассмотрению некоторых частных случаев уравнения (19.1).

В качестве первого частного случая рассмотрим дифференциальное уравнение колебаний нелинейного вибратора, находящегося под воздействием синусоидальной силы, амплитуда и мгновенная частота которой медленно изменяются. В этом случае имеем следующее дифференциальное уравнение:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = \varepsilon f \left(x, \frac{dx}{dt} \right) + \varepsilon E(\tau) \sin \theta, \quad (19.13)$$

где $\frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau)$, $\tau = \varepsilon t$, m и k — постоянные.

Колебательные системы, описываемые уравнением такого типа, играют значительную роль в машиностроении, электротехнике и т. д.

Как указывалось выше (см. § 13), в таких системах в первом приближении возможно обнаружить только основной резонанс, поэтому мы сейчас остановимся на составлении уравнений первого приближения для случая основного резонанса $p = 1$, $q = 1$. Для вывода уравнений первого приближения воспользуемся уравнениями гармонического баланса.

В первом приближении для случая основного резонанса решение уравнения (19.13) ищем в виде

$$x = a \cos(\theta + \vartheta), \quad (19.14)$$

где a и ϑ должны быть определены из уравнений первого приближения

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(\tau, a, \vartheta), \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega - \nu(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a, \vartheta), \end{aligned} \right\} \quad (19.15)$$

в которых

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \text{const.}$$

Определим $A_1(\tau, a, \vartheta)$ и $B_1(\tau, a, \vartheta)$. Для этого находим (с точностью до величин порядка ε включительно)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{da}{dt} \cos(\theta + \vartheta) - a \sin(\theta + \vartheta) \frac{d(\theta + \vartheta)}{dt} = \\ &= \varepsilon A_1 \cos(\theta + \vartheta) - a\omega \sin(\theta + \vartheta) - \varepsilon a B_1 \sin(\theta + \vartheta), \end{aligned} \quad (19.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= \varepsilon \left[(\omega - \nu(\tau)) \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} - 2a\omega B_1 \right] \cos(\theta + \vartheta) - a\omega^2 \cos(\theta + \vartheta) - \\ &- \varepsilon \left[(\omega - \nu(\tau)) a \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta} + 2\omega A_1 \right] \sin(\theta + \vartheta). \end{aligned} \quad (19.17)$$

Подставляя (19.17) и (19.14) в левую часть уравнения (19.13), имеем:

$$\begin{aligned} \left\{ m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx \right\}_{x=a \cos(\theta + \vartheta)} &= \varepsilon m \left[(\omega - \nu(\tau)) \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} - 2a\omega B_1 \right] \cos(\theta + \vartheta) - \\ &- \varepsilon m \left[(\omega - \nu(\tau)) a \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta} + 2\omega A_1 \right] \sin(\theta + \vartheta), \end{aligned} \quad (19.18)$$

так как

$$m\omega^2 = k.$$

Мы здесь не учитываем члена $\varepsilon k u_1(\tau, a, \theta, \theta + \vartheta)$, так как он не содержит первой гармоники и при интегрировании пропадает.

Правую часть уравнения (19.13), учитывая (19.14) и (19.16), можем представить с точностью до величины порядка ε в виде

$$\left\{ \varepsilon f \left(x, \frac{dx}{dt} \right) + \varepsilon E(\tau) \sin \theta \right\}_{x=a \cos(\theta+\vartheta)} = \\ = \varepsilon f(a \cos(\theta+\vartheta), -a\omega \sin(\theta+\vartheta)) + \varepsilon E(\tau) \sin \theta,$$

или

$$\left\{ \varepsilon f \left(x, \frac{dx}{dt} \right) + \varepsilon E(\tau) \sin \theta \right\}_{x=a \cos(\theta+\vartheta)} = \\ = \frac{\varepsilon \cos(\theta+\vartheta)}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \phi, -a\omega \sin \phi) \cos \phi d\phi + \\ + \frac{\varepsilon \sin(\theta+\vartheta)}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \phi, -a\omega \sin \phi) \sin \phi d\phi + \varepsilon \sum_{n \neq 1} \{ f_n^{(1)}(a) \cos n(\theta+\vartheta) + \\ + f_n^{(2)}(a) \sin n(\theta+\vartheta) \} + \varepsilon E(\tau) [\cos \vartheta \sin(\theta+\vartheta) - \sin \vartheta \cos(\theta+\vartheta)], \quad (19.19)$$

где

$$f_n^{(1)}(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \phi) \cos n\phi d\phi, \\ f_n^{(2)}(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \phi) \sin n\phi d\phi,$$

причем

$$f_0(a, \phi) = f(a \cos \phi, -a\omega \sin \phi).$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε и одинаковых гармониках (соответственно при синусах и косинусах) в правых частях выражений (19.18) и (19.19), находим систему уравнений, определяющую $A_1(\tau, a, \vartheta)$ и $B_1(\tau, a, \vartheta)$:

$$\left. \begin{aligned} m \left[(\omega - \nu(\tau)) \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} - 2a\omega B_1 \right] &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \phi) \cos \phi d\phi - E(\tau) \sin \vartheta, \\ m \left[(m - \nu(\tau)) a \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta} + 2\omega A_1 \right] &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \phi) \sin \phi d\phi - E(\tau) \cos \vartheta, \end{aligned} \right\} \quad (19.20)$$

из которой без затруднений находим:

$$\left. \begin{aligned} A_1(\tau, a, \vartheta) &= -\frac{1}{2\pi m \omega} \int_0^{2\pi} f_0(a, \phi) \sin \phi d\phi - \frac{E(\tau)}{m[\omega + \nu(\tau)]} \cos \vartheta, \\ B_1(\tau, a, \vartheta) &= -\frac{1}{2\pi m \omega a} \int_0^{2\pi} f_0(a, \phi) \cos \phi d\phi + \frac{E(\tau)}{m a [\omega + \nu(\tau)]} \sin \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (19.21)$$

После этого уравнения первого приближения принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{2\pi m \omega} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi) \sin \psi d\psi - \frac{\varepsilon E(\tau)}{m[\omega + \nu(\tau)]} \cos \vartheta, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega - \nu(\tau) - \frac{\varepsilon}{2\pi m \omega a} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi) \cos \psi d\psi + \frac{\varepsilon E(\tau)}{ma[\omega + \nu(\tau)]} \sin \vartheta. \end{aligned} \right\} (19.22)$$

Воспользовавшись обозначениями (15.5) (см. § 15), систему (19.22) можно записать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\dot{\omega}_e(a) a - \frac{\varepsilon E(\tau)}{m[\omega + \nu(\tau)]} \cos \vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_e(a) - \nu(\tau) + \frac{\varepsilon E(\tau)}{ma[\omega + \nu(\tau)]} \sin \vartheta, \end{aligned} \right\} (19.23)$$

где $\dot{\omega}_e(a)$ и $\omega_e(a)$ являются соответственно эквивалентным декрементом затухания и эквивалентной частотой для нелинейной колебательной системы, описываемой уравнением (15.6).

Для нашего случая $\varepsilon u_1(\tau, a, \theta, \theta + \vartheta)$ мы можем найти либо воспользовавшись формулой (19.11), либо непосредственно как вынужденные колебания, возбуждаемые в исследуемой системе высшими гармониками, находящимися в правой части выражения (19.19), т. е. суммой

$$\varepsilon \sum_{n \neq 1} \{f_n^{(1)}(a) \cos n(\theta + \vartheta) + f_n^{(2)}(a) \sin n(\theta + \vartheta)\}.$$

Явное выражение для $\varepsilon u_1(\tau, a, \theta, \theta + \vartheta)$ будет:

$$\varepsilon u_1(\tau, a, \theta, \theta + \vartheta) = \frac{1}{\pi \omega^2} \sum_{n \neq 1} \frac{1}{1-n^2} \left[\cos n(\theta + \vartheta) \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi) \cos n\psi d\psi + \sin n(\theta + \vartheta) \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi) \sin n\psi d\psi \right]. \quad (19.24)$$

причем оно не зависит от медленного времени τ и совпадает со вторым слагаемым в правой части (15.4).

Выражений для $A_2(\tau, a, \vartheta)$ и $B_2(\tau, a, \vartheta)$ мы здесь находить не будем; заметим только, что для их определения, после того как мы нашли явное выражение для $u_1(\tau, a, \theta, \theta + \vartheta)$, проще всего опять воспользоваться уравнениями гармонического баланса, однако все выкладки вести уже с точностью до величин второго порядка малости включительно.

В качестве второго частного случая рассмотрим весьма распространенное в технике уравнение Матве в случае, если частота модуляции медленно изменяется со временем. Имеем уравнение

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2(1 - h \cos \theta) x = 0, \quad (19.25)$$

где $\frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau)$, $\tau = \varepsilon t$, ω и h — постоянные, причем $h \ll 1$. Обозначая $h = \varepsilon h_1$, можем уравнение (19.25) представить в виде

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon \omega^2 h_1 x \cos \theta. \quad (19.26)$$

Как указывалось выше, для уравнения (19.25) уже в первом приближении можно рассматривать демультипликационный резонанс. Поэтому

построим асимптотическое решение в первом приближении для случая $p = 1, q = 2$, воспользовавшись, как и в предыдущем случае, уравнениями гармонического баланса.

Итак, решение уравнения (19.25) ищем в виде

$$x = a \cos \left(\frac{1}{2} \theta + \vartheta \right), \tag{19.27}$$

где a и ϑ должны быть определены из системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(\tau, a, \vartheta), \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega - \frac{1}{2} \nu(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a, \vartheta). \end{aligned} \right\} \tag{19.28}$$

Определим $A_1(\tau, a, \vartheta)$ и $B_1(\tau, a, \vartheta)$. Для этого, подставляя (19.27) с учетом соотношений (19.28) в левую часть уравнения (19.26), имеем с точностью до величин первого порядка малости:

$$\left\{ \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x \right\}_{x=a \cos \left(\frac{1}{2} \theta + \vartheta \right)} = \varepsilon \left[\left(\omega - \frac{1}{2} \nu(\tau) \right) \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} - 2a\omega B_1 \right] \cos \left(\frac{1}{2} \theta + \vartheta \right) - \varepsilon \left[\left(\omega - \frac{1}{2} \nu(\tau) \right) a \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta} + 2\omega A_1 \right] \sin \left(\frac{1}{2} \theta + \vartheta \right). \tag{19.29}$$

Правую часть уравнения (19.26) можем представить в виде:

$$\begin{aligned} \left\{ \varepsilon \omega^2 h_1 x \cos \theta \right\}_{x=a \cos \left(\frac{1}{2} \theta + \vartheta \right)} &= \frac{\varepsilon \omega^2 h_1}{2} \cos 2\vartheta a \cos \left(\frac{1}{2} \theta + \vartheta \right) + \\ &+ \frac{\varepsilon \omega^2 h_1}{2} \sin 2\vartheta a \sin \left(\frac{1}{2} \theta + \vartheta \right) + \frac{a \varepsilon \omega^2 h_1}{2} \cos 3 \left(\frac{1}{2} \theta + \vartheta \right) \cos 2\vartheta + \\ &+ \frac{a \varepsilon \omega^2 h_1}{2} \sin 3 \left(\frac{1}{2} \theta + \vartheta \right) \sin 2\vartheta. \end{aligned} \tag{19.30}$$

Приравнивая коэффициенты при первой гармонике в правых частях (19.29) и (19.30), получаем систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \left(\omega - \frac{1}{2} \nu(\tau) \right) \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} - 2a\omega B_1 &= \frac{a\omega^2 h_1}{2} \cos 2\vartheta, \\ \left(\omega - \frac{1}{2} \nu(\tau) \right) a \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta} + 2\omega A_1 &= -\frac{a\omega^2 h_1}{2} \sin 2\vartheta, \end{aligned} \right\} \tag{19.31}$$

из которой находим:

$$\left. \begin{aligned} A_1(\tau, a, \vartheta) &= -\frac{ah_1\omega^2}{2\nu(\tau)} \sin 2\vartheta, \\ B_1(\tau, a, \vartheta) &= -\frac{h_1\omega^2}{2\nu(\tau)} \cos \vartheta. \end{aligned} \right\} \tag{19.32}$$

И, следовательно, уравнениями первого приближения, определяющими a и ϑ , в рассматриваемом случае будут:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{ah\omega^2}{2\nu(\tau)} \sin 2\vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega - \frac{\nu(\tau)}{2} - \frac{h\omega^2}{2\nu(\tau)} \cos 2\vartheta. \end{aligned} \right\} \tag{19.33}$$

Остановимся теперь на применении полученных формул к исследованию колебательных процессов в конкретных системах с медленно меняющимися параметрами, в частности, рассмотрим явления, происходящие в колебательной системе при прохождении через резонанс. Для того, чтобы легче было сопоставить полученные результаты с изученным стационарным режимом, рассмотрим, как и в § 15, нелинейный вибратор с жесткой характеристикой нелинейной восстанавливающей силы ($F = cx + dx^3$, $d > 0$), находящийся под воздействием внешней синусоидальной силы с постоянной амплитудой и медленно изменяющейся частотой. Пусть колебания этого вибратора описываются следующим уравнением:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx + dx^3 = E \sin \theta, \quad (19.34)$$

где x — координата, определяющая положение системы, t — время, m — масса, b — коэффициент сопротивления, $F = cx + dx^3$ — нелинейная восстанавливающая упругая сила, E — амплитуда возмущающей силы, θ — некоторая функция времени. Введем, как и выше, для упрощения выкладок безразмерные x_1 и t_1 по формулам:

$$x_1 = \sqrt{\frac{d}{c}} x, \quad t_1 = \sqrt{\frac{c}{m}} t; \quad (19.35)$$

тогда уравнение (19.34) запишется в виде

$$\frac{d^2x_1}{dt_1^2} + \delta \frac{dx_1}{dt_1} + x_1 + x_1^3 = E_1 \sin \theta, \quad (19.36)$$

где введены обозначения:

$$\delta = \frac{b}{\sqrt{mc}}, \quad E_1 = \frac{E}{c} \sqrt{\frac{d}{c}}.$$

Предположим, что трение, амплитуда внешней силы, а также член, характеризующий нелинейность, достаточно малы по сравнению с собственной частотой системы, т. е. система близка к линейной консервативной, и положим

$$-\left[\delta \frac{dx_1}{dt_1} + x_1^3 \right] = \varepsilon f\left(x_1, \frac{dx_1}{dt_1}\right). \quad (19.37)$$

Тогда согласно (15.5) находим:

$$\delta_e(a) = -\frac{\delta}{2}, \quad h_e(a) = 1 + \frac{3a^2}{8},$$

после чего, воспользовавшись (19.14) и (19.23), в первом приближении получим:

$$x_1 = a \cos(\theta + \vartheta),$$

где a и ϑ должны быть определены из системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\delta a}{2} - \frac{E_1}{1 + \nu(\tau)} \cos \vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= 1 - \nu(\tau) + \frac{3a^2}{8} + \frac{E_1}{a[1 + \nu(\tau)]} \sin \vartheta, \end{aligned} \right\} \quad (19.38)$$

при этом $\nu(\tau) = \frac{d\theta}{dt}$ — некоторая функция времени, характеризующая закон изменения со временем мгновенной частоты внешней силы.

В § 15 подробно исследован стационарный режим колебательных систем, описываемых уравнением типа (19.34); построены резонансные кривые; исследована устойчивость различных ветвей этих кривых; рассмотрены гистерезисные явления, возникающие в связи с нелинейностью.

Здесь мы рассмотрим поведение кривых зависимости амплитуды колебания от частоты внешней силы при медленном изменении частоты со временем, причем допустим, что в процессе своего изменения частота внешней силы проходит через резонансные значения*). Для того чтобы построить резонансные кривые при прохождении через резонанс, необходимо системе уравнений первого приближения (19.38) численно проинтегрировать при помощи какого-либо метода численного интегрирования. Для исследуемых уравнений (19.38) удобным является метод численного интегрирования, разработанный А. Н. Крыловым. Заметим, что нет необходимости численно интегрировать уравнения (19.38) для всего промежутка времени, в течение которого изменяется частота внешней силы. Для получения полной картины процесса, происходящего при прохождении через резонанс, достаточно проинтегрировать систему (19.38), начиная от того момента времени, когда частота внешней силы достаточно близка к собственной частоте системы, но еще не находится непосредственно в резонансной зоне.

Как показывает практика построения резонансных кривых при прохождении через резонанс для тех значений частоты внешней силы, для которых стационарная резонансная кривая близка к горизонтальной линии, кривые прохождения через резонанс мало отличаются от стационарных резонансных кривых даже при достаточно больших скоростях изменения частоты внешней силы. Кроме того, на характер резонансных кривых при прохождении через резонанс (на величину и положение максимума и т. д.) почти не влияют начальные условия в случае, если они не находятся непосредственно в резонансной зоне (т. е. в зоне частот, где амплитуда резко возрастает). Поэтому для численного интегрирования системы (19.38) в качестве начальных значений целесообразно принимать значения a , ϑ и ν , удовлетворяющие стационарному режиму вблизи резонансной зоны, но не в зоне быстрого возрастания амплитуд.

На преимущество интегрирования системы уравнений (19.38) по сравнению с непосредственным интегрированием уравнения (19.34) уже обращалось внимание, и поэтому подробно на этом останавливаться не будем.

Будем рассматривать случай, когда мгновенная частота внешней силы зависит от времени линейно:

$$\nu(\tau) = \nu_0 + \beta t; \quad (19.39)$$

при $\beta > 0$ частота возрастает со временем, при $\beta < 0$ — убывает. Скорость прохождения через резонанс зависит от значений β . Чем больше по абсолютной величине β , тем скорее система проходит через резонанс.

Численно интегрируя систему уравнений при различных значениях β , получаем ряд кривых прохождения через резонанс, которые приведены на рис. 109, 110, 111. Для сопоставления со стационарным режимом на этих же рисунках приведены стационарные резонансные кривые, построенные согласно формулам § 15.

На рис. 112 и 113 приведены как стационарные резонансные кривые, так и кривые прохождения через резонанс для случая, когда

*) Этот вопрос подробно рассмотрен в нашей работе [31].

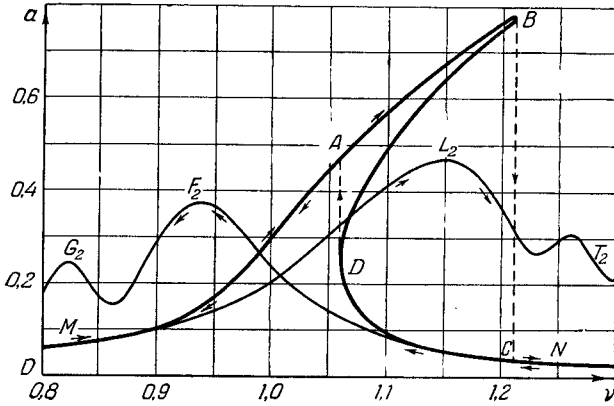


Рис. 109.

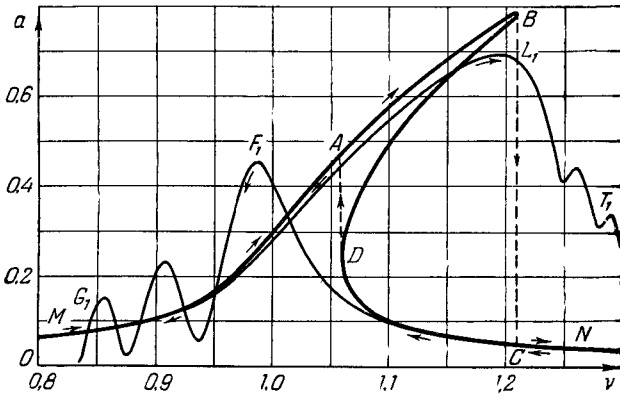


Рис. 110.

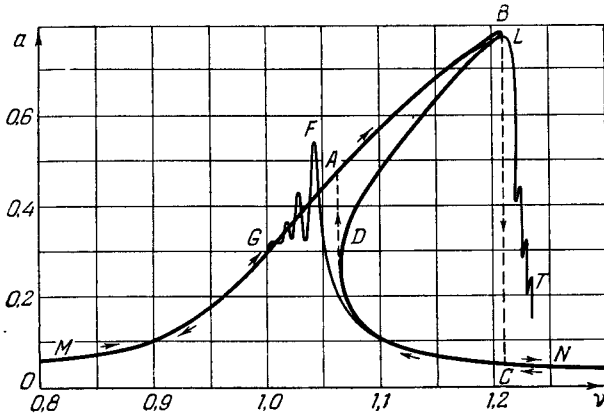


Рис. 111.

характеристика нелинейной восстанавливающей силы имеет вид, приведенный на рис. 114.

Анализ построенных резонансных кривых при прохождении через резонанс позволяет выявить ряд характерных особенностей этого сложного явления, а также влияние на него нелинейности системы. Этот вопрос

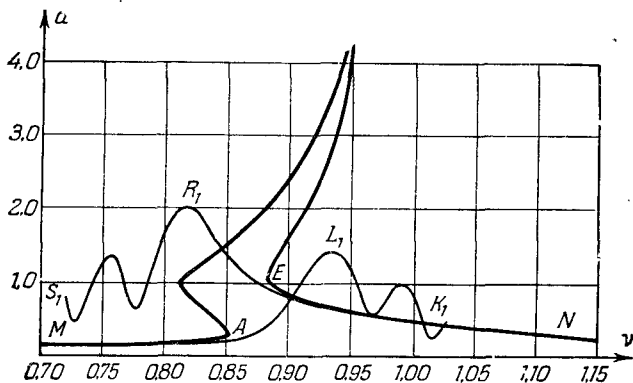


Рис. 112.

подробно рассмотрен в специальной литературе [31], и поэтому мы здесь укажем только на некоторые характерные особенности этого явления, резко отличающие его от обычного резонанса при стационарном режиме.

При прохождении через резонанс существенное влияние на резонансные кривые оказывает скорость изменения частоты внешней силы: при ее

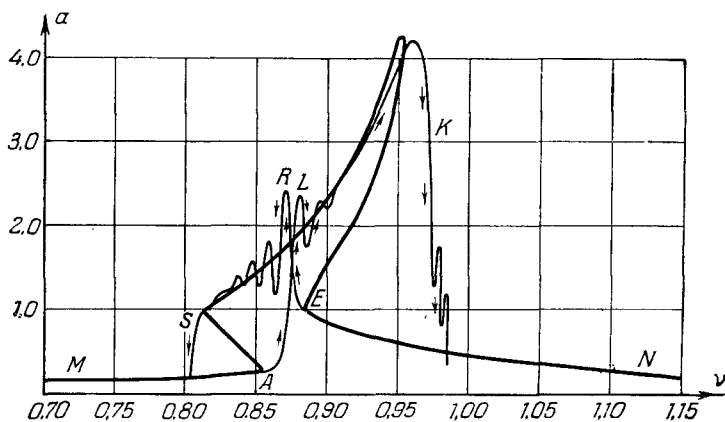


Рис. 113.

увеличении максимумы амплитуды снижаются, а острота первого максимума становится меньше остроты стационарной резонансной кривой.

После достижения первого максимума наблюдаются биения амплитуд, причем чем быстрее осуществляется прохождение через резонанс, тем характернее выражены после первого максимума несколько максимумов меньшей величины.

Если при стационарном резонансном режиме в системе вследствие нелинейности имеются точки разрыва амплитуды, то при прохождении

через резонанс для соответствующих значений частоты наблюдаются резкие изменения амплитуды (особенно для медленного прохождения).

Максимумы амплитуды имеют место не в момент совпадения частоты возмущающей силы с собственной частотой системы, а позже или раньше, что зависит от скорости изменения частоты, характера нелинейности, а также от направления изменения частоты.

В каждом конкретном случае нелинейность накладывает специфический отпечаток не только на стационарную резонансную кривую, но и на кривые прохождения через резонанс, причем чем медленнее прохождение через резонанс, тем сильнее сказываются особенности данной нелинейности.

Остановимся теперь на исследовании некоторых примеров нелинейных колебательных систем с переменными коэффициентами, в которых возможен более сложный резонанс.

В качестве первого примера рассмотрим поведение амплитуды при резонансе n -го рода в зависимости от режима изменения расстройки в колебательном контуре с регенерацией при помощи лампы. Этот пример в случае $n = 2$ при постоянной расстройке рассматривался нами в § 15.

Если расстройка $\xi = \frac{\nu^2 - 4\omega^2}{4\omega^2}$ изменяется

со временем, то, как нетрудно видеть, вместо (15.50) получаем следующее уравнение:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \varepsilon(\tau) f\left(x, \frac{dx}{dt}, \xi(\tau)\right) + E \sin 2t, \quad (19.40)$$

которое при помощи замены переменной

$$x = z - \frac{E}{3} \sin 2t \quad (19.41)$$

может быть приведено к виду

$$\frac{d^2z}{dt^2} + z = \varepsilon(\tau) f\left(z - \frac{E}{3} \sin 2t, \frac{dz}{dt} - \frac{2E}{3} \cos 2t, \xi(\tau)\right). \quad (19.42)$$

Предположим, как и в § 15, что

$$f\left(x, \frac{dx}{dt}, \xi(\tau)\right) = [k(\tau) + 2x + \gamma x^2] \frac{dx}{dt} + \frac{\xi(\tau)}{0,016} x, \quad (19.43)$$

причем для определенности положим:

$$\left. \begin{aligned} k(\tau) &= k_0 - 2\bar{\vartheta} \frac{\xi(\tau)}{\beta}, \quad \beta(\tau) = \frac{0,016}{1 + \xi(\tau)}, \quad \lambda = 0,016, \\ \bar{\vartheta} &= 0,013, \quad \gamma = -2, \quad f_0 = -0,05. \end{aligned} \right\} \quad (19.44)$$

Тогда уравнение (19.42) принимает следующий вид:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + z = \frac{0,016}{1 + \xi(\tau)} \left\{ k(\tau) - 2\left(z - \frac{E}{3} \sin 2t\right) + \right. \\ \left. + \gamma \left(z - \frac{E}{3} \sin 2t\right)^2 \right\} \left(\frac{dz}{dt} - \frac{2E}{3} \cos 2t \right) + \frac{\xi(\tau)}{1 + \xi(\tau)} \left(z - \frac{E}{3} \sin 2t \right). \quad (19.45)$$

Воспользовавшись формулами (19.6) и (19.7) и полагая $p = 1, q = 2$, после ряда выкладок в первом приближении получим:

$$z = a \cos(t + \vartheta), \tag{19.46}$$

где a и ϑ должны быть определены из системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon(\tau) \left\{ \frac{1}{2} a \left[k(\tau) + \frac{\gamma a^2}{4} \right] + \frac{\gamma E^2 a}{36} + \frac{aE}{6} \sin 2\vartheta \right\}, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \varepsilon(\tau) \left\{ -\frac{\xi(\tau)}{2\beta} + \frac{E}{6} \cos 2\vartheta \right\}. \end{aligned} \right\} \tag{19.47}$$

Для построения графиков, характеризующих изменение амплитуды колебания при резонансе 2-го рода для различных режимов изменения расстройки $\xi(\tau)$, необходимо, как и обычно, численно проинтегрировать систему уравнений (19.47).

Для определенности предположим, что расстройка изменяется за счет изменения собственной частоты ω колебательной системы, причем предположим, что $\xi(\tau)$ изменяется согласно формуле

$$\xi(\tau) = \xi_0 + at. \tag{19.48}$$

Подставляя это выражение в уравнения (19.47) и произведя численное интегрирование, получаем кривые, характеризующие зависимость a от ξ для различных значений a (рис. 115).

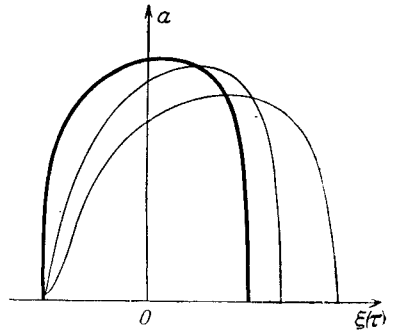


Рис. 115.

На этом же рисунке для сопоставления приведена резонансная кривая при стационарном режиме, построенная согласно формуле (15.72) (жирная линия).

Анализируя полученный график, можно сделать ряд выводов. Как и обычно, при увеличении скорости прохождения через резонанс максимумы резонансных кривых снижаются и смещаются. Резко бросается в глаза существенное отличие в поведении амплитуды колебания при прохождении через резонанс второго рода по сравнению с рассмотренным выше примером прохождения через обычный резонанс. В то время как при прохождении через обычный резонанс (см. рис. 110) после первого максимума резонансной кривой наблюдалось еще несколько максимумов меньшей величины, и таким образом, колебания носили характер затухающих биений, в данном случае амплитуда после достижения максимального значения непрерывно убывает, стремясь к нулю.

В качестве второго примера рассмотрим прохождение через параметрический резонанс.

Пусть на стержень длиной l с шарнирно закрепленными концами (рис. 116) действует «периодическая» продольная сила

$$E_0 \cos \theta, \tag{19.49}$$

мгновенная частота которой $\frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau)$, медленно изменяясь со временем, проходит через удвоенное критическое значение (для определенности положим через удвоенное первое критическое значение).

Дифференциальное уравнение поперечных колебаний стержня можем записать в виде

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + \frac{\gamma A}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + E_0 \cos \theta \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = 0, \tag{19.50}$$

где, как и в § 17, A — площадь поперечного сечения, EI — жесткость, γ — плотность материала, из которого сделан стержень, g — ускорение силы тяжести.

Граничные условия будут

$$\left. \begin{aligned} y \Big|_{z=0} &= 0, & \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \Big|_{z=0} &= 0, \\ y \Big|_{z=l} &= 0, & \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \Big|_{z=l} &= 0, \end{aligned} \right\} \tag{19.51}$$

и поэтому путем подстановки

$$y = x \sin \pi \frac{z}{l}$$

уравнение (19.50) можем свести к следующему:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 (1 - h \cos \theta) x = 0, \tag{19.52}$$

где обозначено:

$$h = \frac{E_0 l^2}{EI \pi}, \quad \omega^2 = \frac{EI g \pi^2}{\gamma A l^4}.$$

Предположим, что $\frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau) = \nu_0 + \alpha t$, изменяясь со временем, пройдет через удвоенное значение частоты ω . В этом случае для исследования колебательного процесса построим первое приближение, соответствующее резонансу $p = 1, q = 2$. Для этого мы можем воспользоваться непосредственно формулами, введенными выше для уравнения (19.25). Итак, согласно (19.27) и (19.33) имеем:

$$x = a \cos \left(\frac{1}{2} \theta + \vartheta \right),$$

где a и ϑ должны быть определены из системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{ah\omega^2}{2(\nu_0 + \alpha t)} \sin 2\vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega - \frac{\nu_0 + \alpha t}{2} - \\ &\quad - \frac{h\omega^2}{2(\nu_0 + \alpha t)} \cos 2\vartheta. \end{aligned} \right\} \tag{19.53}$$

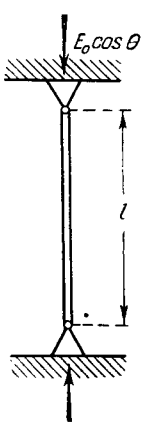


Рис. 116.

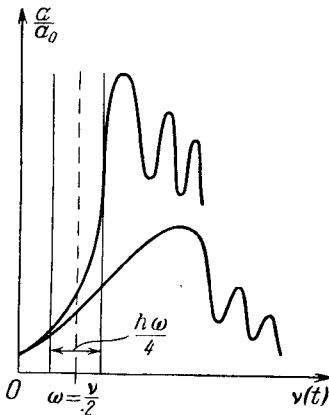


Рис. 117.

Задаваясь численными значениями h, ω, ν_0, α и интегрируя систему (19.53) численно, получаем кривые прохождения через параметрический резонанс, приведенные на рис. 117.