ГЛАВА IV

ОДНОЧАСТОТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ СО МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

§ 20. Собственные одночастотные колебания в системах со многими степенями свободы

Колебательные системы со многими степенями свободы, и даже с бесконечным их числом, постоянно встречаются во многих актуальных проблемах современной техники.

Как известно, даже в случае, если колебания в таких системах описываются дифференциальными уравнениями, близкими к линейным, то приложение обычных асимптотических методов нелинейной механики, идея которых изложена нами выше, требует предварительного решения совокупности линейных дифференциальных уравнений с числом неизвестных пропорциональным числу степеней свободы, что создает значительные затруднения при практическом применении этих методов.

В колебательных системах со многими степенями свободы наличие неизбежного внутреннего трения, а также наличие внешних возмущающих сил приводят обычно к быстрому исчезновению высших частот, т. е. к установлению основного тона колебаний (или колебаний с какой-либо одной частотой ω_k). Поэтому целесообразно при исследовании системы со многими степенями свободы рассматривать одночастотный режим, т. е. колебания системы, при которых все точки нашей системы совершают колебания с одной и той же частотой.

Как будет видно из дальнейшего, построение асимптотических разложений в этом случае может быть произведено так, как если бы мы имели дело с колебательной системой с одной степенью свободы.

Для рассмотрения общего случая предположим, что одночастотные колебания в системе со многими степенями свободы описываются следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_k}{dt} - \sum_{q=1}^{n} c_{kq} x_q = \varepsilon f_k^{(1)}(x_1, \ldots, x_n) + \varepsilon^2 f_k^{(2)}(x_1, \ldots, x_n) + \ldots \tag{20.1}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n),$$

переходящей при нулевом значении малого параметра ε в систему линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_k}{dt} - \sum_{q=1}^{n} c_{kq} x_q = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{20.2}$$

с постоянными коэффициентами. Систему дифференциальных уравнений

(20.2) будем в дальнейшем называть дифференциальными уравнениями невозмущенной системы.

Предположим, что в невозмущенной системе возможны незатухающие гармонические колебания с некоторой частотой ω:

$$x_k = a\varphi_k e^{i(\omega t+\theta)} + a\varphi_k{}^* e^{-i(\omega t+\theta)} \qquad (k = 1,\ 2, \ldots,\ n), \tag{20.3}$$

зависящие только от двух произвольных постоянных a, θ; здесь φ_k, $\varphi_k{}^*$ — собственные функции, характеризующие форму колебания, а значок * указывает на переход к комплексно-сопряженной величине.

Предположим также, что в невозмущенной системе единственным статическим решением будет тривиальное решение: $x_k = 0$ $(k = 1,\ 2, \ldots,\ n)$ и что, кроме того, в ней невозможны незатухающие колебания с частотами кратными ω (условие отсутствия внутреннего резонанса).

При этих условиях будем искать решение невозмущенных уравнений (20.1), соответствующее одночастотному колебанию нашей системы со многими степенями свободы, с помощью разложений

$$x_k = a\varphi_k e^{i\psi} + a\varphi_k{}^* e^{-i\psi} + \varepsilon u_k^{(1)}(a, \psi) + \varepsilon^2 u_k^{(2)}(a, \psi) + \ldots \qquad (k = 1,\ 2, \ldots,\ n), \tag{20.4}$$

в которых $u^{(1)}(a, \psi)$, $u_k^{(2)}(a, \psi)$, ... $(k = 1,\ 2, \ldots,\ n)$ являются периодическими функциями угла ψ с периодом 2π, а величины a и ψ как функции времени определяются дифференциальными уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \ldots, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{20.5}$$

Таким образом, как и в предыдущих случаях, мы здесь ставим задачу определения функций

$$u_k^{(1)}(a, \psi) \quad u_k^{(2)}(a, \psi), \ \ldots \quad (k = 1,\ 2, \ldots,\ n), \tag{20.6}$$

периодических, с периодом 2π, по отношению к ψ и функций

$$A_1(a),\ A_2(a),\ \ldots;\ B_1(a),\ B_2(a),\ \ldots \tag{20.7}$$

таким образом, чтобы выражения (20.4) удовлетворяли бы уравнениям (20.1) всякий раз, когда a и ψ удовлетворяют уравнениям (20.5).

Заметим, что, поскольку интегрирование уравнений (20.5) вводит только две произвольные постоянные, мы получаем с помощью выражений (20.4) приближенное представление не для общего решения уравнений (20.1), которое должно зависеть от n произвольных постоянных, а лишь для двупараметрического семейства частных решений. Так как в нелинейных системах принцип суперпозиции не имеет места, то, исходя из различных частных решений, мы не можем непосредственно построить общее решение. Однако в ряде важных случаев двупараметрическое многообразие решений (20.4) обладает особым свойством сильной устойчивости, заключающимся в том, что любое решение уравнений (20.1) при начальных значениях, близких к начальным значениям нашего двупараметрического многообразия интегральных кривых (20.4), при увеличении t стремится к решениям, принадлежащим к семейству (20.4). Рассматриваемое многообразие как бы притягивает к себе все близкие к нему решения.

Собственно говоря, только в этих случаях исследование решений типа (20.4) и может представлять физический интерес. В дальнейшем в главе, посвященной математическому обоснованию, мы более подробно остановимся на указанном вопросе устойчивости многообразий типа (20.4) и на вопросе получения критериев, при выполнении которых представляет интерес рассмотрение двупараметрических семейств типа (20.4).

Прежде чем переходить к решению поставленной задачи — определению функций (20.6) и (20.7), сделаем некоторые предварительные замечания о свойствах колебаний в невозмущенной системе, описываемой уравнениями (20.2), которыми нам придется воспользоваться.

Заметим прежде всего, что для системы однородных алгебраических уравнений

$$\sum_{q=1}^{n} (\delta_{kq} p - c_{kq}) x_q = 0 \qquad (20.8)$$

$$(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где

$$\delta_{kq} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = q, \\ 0, & \text{если } k \neq q; \end{cases}$$

разрешающий определитель

$$D(p) = D\,\| \delta_{kq} p - c_{kq} \| \qquad (20.9)$$

в соответствии со сделанными предположениями о наличии в системе одночастотного колебательного режима имеет два простых сопряженных чисто мнимых корня $p = +i\omega$ и $p = -i\omega$ и, кроме того, значения $p = 0$ и $p = \pm im\omega$ (где m — любое целое число, отличное от единицы) не являются корнями уравнения $D(p) = 0$, т. е.

$$D(im\omega) \neq 0, \qquad (20.10)$$

где $-\infty < m < \infty, \quad m \neq \pm 1$.

Обозначим нетривиальные решения системы уравнений (20.8) для значений $p = +i\omega$ и $p = -i\omega$ соответственно через φ_k и $\varphi_k{}^*$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Возьмем сопряженную с (20.8) систему алгебраических уравнений

$$\sum_{q=1}^{n} (\delta_{kq} p + c_{qk}) x_q = 0 \qquad (20.11)$$

и обозначим ее нетривиальные решения для значений $p = +i\omega$ и $p = -i\omega$ соответственно через χ_k и $\chi_k{}^*$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

Введя эти обозначения, рассмотрим вынужденные колебания, вызываемые в невозмущенной системе (20.2) внешними гармоническими силами

$$F_k e^{im\omega t}.$$

Эти колебания описываются системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_k}{dt} - \sum_{q=1}^{n} c_{kq} x_q = F_k e^{im\omega t}. \qquad (20.12)$$

Как известно, в случае, если m — любое целое положительное или отрицательное число, отличное от ± 1, решения системы (20.12) представляются формулой

$$x_k = e^{im\omega t} \sum_{q=1}^{n} Z_{kq}(im\omega) F_q, \qquad (20.13)$$

$$Z_{kq}(im\omega) = \frac{D_{kq}(im\omega)}{D(im\omega)},$$

где $D_{kq}(p)$ — соответствующие миноры определителя $D(p)$. Если $m = \pm 1$, то уравнения (20.12) не имеют, вообще говоря, периодического решения, поскольку $D(\pm i\omega) = 0$. Для того чтобы такое решение все же существовало, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{q=1}^{n} \chi_q F_q &= 0 \qquad \text{для} \quad n = 1, \\ \sum_{q=1}^{n} \chi_q^* F_q &= 0 \qquad \text{для} \quad n = -1. \end{aligned}\right\} \qquad (20.14)$$

При выполнении этих условий вынужденное колебание, определяемое уравнениями (20.12) для $m = 1$, представляется формулой

$$x_k = e^{i\omega t} \sum_{q=1}^{n} S_{kq} F_q + C\varphi_k e^{i\omega t} \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \qquad (20.15)$$

в которой

$$S_{kq} = \left\{ \frac{\dfrac{\partial D_{kq}(p)}{\partial p}}{\dfrac{\partial D(p)}{\partial p}} \right\}_{p = i\omega} \quad (k,\ q = 1, 2, \ldots, n)$$

и C — произвольная постоянная. Аналогичную формулу получаем и для $n = -1$.

Рассмотрим теперь задачу о нахождении периодического, с периодом $\frac{2\pi}{\omega}$, решения системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_k}{dt} - \sum_{q=1}^{n} c_{kq} x_q = \sum_{(-\infty < m < \infty)} F_k^{(m)} e^{im\omega t} \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \qquad (20.16)$$

т. е. задачу о нахождении вынужденного колебания в невозмущенной системе под действием сил

$$\sum_{(-\infty < m < \infty)} F_k^{(m)} e^{im\omega t} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Поскольку нас интересуют, разумеется, лишь вещественные решения, мы будем предполагать выполненными условия вещественности

$$F_k^{(-m)} = F_k^{*(m)} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \qquad (20.17)$$

Тогда на основании вышесказанного убеждаемся, что поставленная задача имеет решение только в случае, когда выполняются условия

$$\sum_{q=1}^{n} \chi_q F_q^{(1)} = 0, \qquad \sum_{q=1}^{n} \chi_q^* F_q^{(-1)} = 0. \qquad (20.18)$$

Заметим, между прочим, что благодаря (20.17) одно из этих условий является следствием другого.

Если условие (20.18) выполняется, то искомое периодическое решение представляется следующей формулой:

$$x_k = \sum_{\left(\substack{-\infty<m<\infty \\ m\neq\pm 1}\right)} e^{im\omega t}\left\{\sum_{q=1}^{n} Z_{kq}(im\omega)F_q^{(m)}\right\} + e^{i\omega t}\sum_{q=1}^{n} S_{kq}F_q^{(1)} +$$

$$+ e^{-i\omega t}\sum_{q=1}^{n} S_{kq}^{*}F_q^{(-1)} + C\varphi_k e^{i\omega t} + C^{*}\varphi_k^{*}e^{-i\omega t} \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \quad (20.19)$$

содержащей две произвольные постоянные — вещественную и мнимую части C.

Заменяя в предыдущих выкладках ωt на ψ, легко получить следующий результат, который нам понадобится в дальнейшем при определении функций (20.6).

Для того чтобы система уравнений

$$\omega\frac{\partial u_k}{\partial\psi} - \sum_{q=1}^{n} c_{kq}u_q = \sum_{(-\infty<m<\infty)} F_k^{(m)}e^{im\psi}, \qquad (20.20)$$

для которой выполняются условия вещественности (20.17), имела вещественное периодическое решение, с периодом 2π, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^{n} F_k^{(1)}\chi_k = 0. \qquad (20.21)$$

Если это условие выполнено, искомое решение имеет следующий вид:

$$u_k(\psi) = \sum_{\left(\substack{-\infty<m<\infty \\ m\neq\pm 1}\right)} e^{im\psi}\left\{\sum_{q=1}^{n} Z_{kq}(im\omega)F_q^{(m)}\right\} + e^{i\psi}\sum_{q=1}^{n} S_{kq}F_q^{(1)} +$$

$$+ e^{-i\omega}\sum_{q=1}^{n} S_{kq}^{*}F_q^{(-1)} + C\varphi_k e^{i\psi} + C^{*}\varphi_k^{*}e^{-i\psi}, \qquad (20.22)$$

где C — произвольная комплексная постоянная.

После этих предварительных замечаний приступим к решению нашей основной задачи, т. е. к нахождению функций (20.6) и (20.7).

Разложение (20.4) напишем в виде

$$x_k = u_k^{(0)}(a,\ \psi) + \varepsilon u_k^{(1)}(a,\ \psi) + \varepsilon^2 u_k^{(2)}(a,\ \psi) + \ldots \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \quad (20.23)$$

где для сокращения положено

$$u_k^{(0)}(a,\ \psi) = \varphi_k a e^{i\psi} + \varphi_k^{*} a e^{-i\psi} \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \quad (20.24)$$

Дифференцируя выражения (20.23) по времени и учитывая при этом уравнения (20.5), находим:

$$\frac{dx_k}{dt} = \left\{\frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial a} + \varepsilon\frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial a} + \varepsilon^2\frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial a} + \ldots\right\}\frac{da}{dt} +$$

$$+ \left\{\frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial\psi} + \varepsilon\frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial\psi} + \varepsilon^2\frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial\psi} + \ldots\right\}\frac{d\psi}{dt} =$$

$$= \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial\psi}\omega + \varepsilon\left\{\frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial a}A_1 + \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial\psi}B_1 + \omega\frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial\psi}\right\} +$$

$$+ \varepsilon^2\left\{\frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial a}A_2 + \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial\psi}B_2 + \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial a}A_1 + \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial\psi}B_1 + \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial\psi}\omega\right\} + \varepsilon^3\ldots$$

$$(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

и поэтому левые части уравнений (20.1) могут быть представлены в виде:

$$\frac{dx_k}{dt}-\sum_{q=1}^{n} c_{kq}x_q=\varepsilon\left\{\frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial\psi}-\sum_{q=1}^{n} c_{kq}u_q^{(1)}+\frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial a}A_1+\frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial\psi}B_1\right\}+$$
$$+\varepsilon^2\left\{\omega\frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial\psi}-\sum_{q=1}^{n} c_{kq}u_q^{(2)}+\frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial a}A_2+\frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial\psi}B_2+\frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial a}A_1+\frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial\psi}B_1\right\}+\varepsilon^3\ldots$$
$$(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Подставляя (20.23) в правые части уравнений (20.1), можем их записать следующим образом:

$$\varepsilon f_k^{(1)}(x_1,\ \ldots,\ x_n)+\varepsilon^2 f_k^{(2)}(x_1,\ \ldots,\ x_n)+\varepsilon^3\ldots=\varepsilon f_k^{(1)}(u_1^{(0)},\ \ldots,\ u_n^{(0)})+$$
$$+\varepsilon^3\left\{\sum_{r=1}^{n} f_{kx_r}^{(1)\prime}(u_1^{(0)},\ \ldots,\ u_n^{(0)})\,u_r^{(1)}+f_k^{(2)}(u_1^{(0)},\ \ldots,\ u_n^{(0)})\right\}+\varepsilon^3\ldots$$
$$(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Приравнивая после этого коэффициенты при одинаковых степенях ε в последних двух выражениях, получим:

$$\omega\frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial\psi}-\sum_{q=1}^{n} c_{kq}u_k^{(1)}=f_k^{(1)}(u_1^{(0)},\ \ldots,\ u_n^{(0)})-\frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial a}A_1-\frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial\psi}B_1, \qquad (20.25)$$

$$\omega\frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial\psi}-\sum_{q=1}^{n} c_{kq}u_k^{(2)}=\sum_{r=1}^{n} f_{kx_r}^{(1)\prime}(u_1^{(0)},\ \ldots,\ u_n^{(0)})\,u_r^{(1)}+$$
$$+f_k^{(2)}(u_1^{(0)},\ \ldots,\ u_n^{(0)})-\frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial a}A_1-\frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial\psi}B_1-\frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial a}A_2-\frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial\psi}B_2, \qquad (20.26)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Из полученных систем уравнений (20.25), (20.26) и т. д. мы последовательно можем определить искомые функции $u_k^{(1)}(a,\ \psi)$, $u_k^{(2)}(a,\ \psi)$, ... $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, а также функции $A_1(a)$, $B_1(a)$, $A_2(a)$, $B_2(a)$, ..., причем последние должны быть определены так, чтобы функции $u_k^{(1)}(a,\psi)$, $u_k^{(2)}(a,\ \psi)$, ..., $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ были периодическими по ψ с периодом 2π.

Приступая к решению системы уравнений (20.25), рассмотрим разложения Фурье для функций $f_k^{(1)}(u_1^{(0)},\ \ldots,\ u_n^{(0)})$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ в комплексной форме:

$$f_k^{(1)}(u_1^{(0)},\ \ldots,\ u_n^{(0)})=\sum_{(-\infty<m<\infty)}\Phi_k^{(0)}(a)\,e^{im\psi} \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где

$$\Phi_k^{(m)}(a)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f_k^{(1)}(u_1^{(0)},\ \ldots,\ u_n^{(0)})\,e^{-im\psi}\,d\psi,$$

Тогда систему уравнений (20.25), учитывая также обозначения (20.24), можем представить в виде

$$\omega \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial \psi} - \sum_{q=1}^{n} c_{kq} u_q^{(1)} = \sum_{\substack{-\infty<m<\infty \\ m \neq \pm 1}} \Phi_k^{(m)}(a) e^{im\psi} +$$
$$+ \{\Phi_k^{(1)}(a) - A_1\varphi_k - iB_1\varphi_k a\} e^{i\psi} + \{\Phi_k^{(-1)}(a) - A_1\varphi_k^* + iB_1\varphi_k^* a\} e^{-i\psi} \qquad (20.27)$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

Мы получили тем самым уравнения типа (20.20). Поэтому, для того чтобы из системы (20.27) можно было бы определить искомые функции $u_k^{(1)}(a, \psi)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, периодические по ψ, должно выполняться условие, аналогичное условию (20.21), т. е.

$$\sum_{q=1}^{n} \chi_q \{\Phi_q^{(1)}(a) - A_1\varphi_q - iB_1\varphi_q a\} = 0,$$

откуда находим выражения для $A_1(a)$ и $B_1(a)$:

$$A_1(a) + ia\,B_1(a) = \frac{\sum_{q=1}^{n} \chi_q \Phi_q^{(1)}(a)}{\sum_{q=1}^{n} \chi_q \varphi_q}. \qquad (20.28)$$

Решая теперь уравнения (20.27), получаем в соответствии с (20.22) следующее выражение для функций $u_k^{(1)}(a, \psi)$:

$$u_k^{(1)}(a, \psi) = \sum_{\substack{-\infty<m<\infty \\ m \neq \pm 1}} e^{im\psi} \left\{ \sum_{q=1}^{n} Z_{kq}(im\omega) \Phi_k^{(m)}(a) \right\} +$$
$$+ e^{i\psi} \sum_{q=1}^{n} S_{kq} \{\Phi_q^{(1)}(a) - (A_1(a) + ia\,B_1(a))\varphi_q\} + e^{-i\psi} \sum_{q=1}^{n} S_{kq}^* \{\Phi_q^{(-1)}(a) -$$
$$- (A_1(a) - ia\,B_1(a))\varphi_q^*\} + C_1(a)\varphi_k e^{i\psi} + C_1^*(a)\varphi_k^* e^{-i\psi} \qquad (20.29)$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n),$$

содержащее две произвольные функции — вещественную и мнимую части $C_1(a)$, не зависящие от ψ.

Чтобы несколько упростить это выражение, заметим, что по определению миноров $D_{kq}(p)$ имеем тождественно:

$$\left. \begin{aligned} pD_{kq}(p) - \sum_{r=1}^{n} c_{kr} D_{rq}(p) &= \delta_{kq} D(p), \\ pD_{kq}(p) - \sum_{r=1}^{n} c_{rq} D_{kr}(p) &= \delta_{kq} D(p), \end{aligned} \right\} \qquad (20.30)$$

где

$$\delta_{kq} = \begin{cases} 1, & k = q, \\ 0, & k \neq q. \end{cases}$$

Полагая в (20.30) $p = i\omega$, видим, что при любом фиксированном q величины $x_k = D_{kq}(i\omega)$ удовлетворяют уравнениям (20.8) и, следовательно, должны быть пропорциональны φ_k. Аналогично при любом фиксированном k $D_{kq}(i\omega)$ должны быть пропорциональны χ_q.

Таким образом, имеем:

$$D_{kq}(i\omega) = \lambda\varphi_k\chi_q. \tag{20.31}$$

Дифференцируя (20.30) по p и затем полагая $p = i\omega$, получим в силу (20.31):

$$\lambda\varphi_k\chi_q + i\omega D'_{kq}(i\omega) - \sum_{r=1}^{n} c_{kr} D'_{rq}(i\omega) = \delta_{kq} D'(i\omega),$$

или, учитывая ранее введенные обозначения,

$$\frac{\lambda\varphi_k\chi_q}{D'(i\omega)} + i\omega S_{kq} - \sum_{r=1}^{n} c_{kr} S_{rq} = \delta_{kq}. \tag{20.32}$$

Таким образом, при любом фиксированном q величины $y_k = S_{kq}$ удовлетворяют уравнениям:

$$i\omega y_k - \sum_{r=1}^{n} c_{kr} y_r = \delta_{kq} - \frac{\lambda\varphi_k\chi_q}{D'(i\omega)} \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} \chi_k \left\{\delta_{kq} - \frac{\lambda\varphi_k\chi_q}{D'(i\omega)}\right\} = 0,$$

откуда

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_k\chi_k = \frac{D'(i\omega)}{\lambda} \neq 0, \tag{20.33}$$

поскольку корень $p = i\omega$ уравнения $D(p) = 0$ является простым.

Следовательно, видим, что знаменатель в формуле (20.28) всегда отличен от нуля.

Умножим теперь обе части (20.32) на φ_q и просуммируем результат по q. Так как согласно (20.33)

$$\varphi_k = -\frac{\sum\limits_{q=1}^{n} \lambda\varphi_k\varphi_q\chi_q}{D'(i\omega)} \neq 0,$$

то будем иметь:

$$i\omega\left(\sum_{q=1}^{n} S_{kq}\varphi_q\right) - \sum_{r=1}^{n} c_{kr} \sum_{q=1}^{n} S_{rq}\varphi_q = 0, \tag{20.34}$$

и поэтому

$$\sum_{q=1}^{n} S_{kq}\varphi_q = \alpha\varphi_k, \quad \alpha = \text{const} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Принимая во внимание полученные равенства и вводя вместо $C_1(a)$ новую произвольную функцию

$$K(a) = C_1(a) - \alpha[A_1(a) + ia B_1(a)],$$

мы можем представить (20.29) в следующем виде:

$$u_k^{(1)}(a,\ \psi)=\sum_{\substack{(-\infty<m<\infty)\\ m\neq\pm 1}} e^{im\psi}\left\{\sum_{q=1}^{n} Z_{kq}(im\omega)\,\Phi_q^{(m)}(a)\right\}+$$
$$+e^{i\psi}\left\{\sum_{q=1}^{n} S_{kq}\Phi_q^{(1)}(a)+K(a)\,\varphi_k\right\}+e^{-i\psi}\left\{\sum_{q=1}^{n} S_{kq}^{*}\Phi_q^{(-1)}(a)+K^{*}(a)\,\varphi_k^{*}\right\} \quad (20.35)$$
$$(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Заметим, далее, что так как значения $p=\pm i\omega$ являются простыми корнями уравнения $D(p)=0$, то они будут простыми полюсами функций

$$Z_{kq}(p)=\frac{D_{kq}(p)}{D(p)},$$

и поэтому на основании (20.31) можем написать:

$$Z_{kq}(p)=\frac{\lambda\varphi_k\chi_q}{D'(i\omega)\,(p-i\omega)}+\frac{\lambda^{*}\overset{*}{\varphi}_k\overset{*}{\chi}_q}{D'(-i\omega)\,(p+i\omega)}+Z_{kq}^{*}(p), \quad (20.36)$$

где $Z_{kq}^{*}(p)$ является регулярной функцией в окрестности точек $p=\pm i\omega$.

Поскольку по определению

$$S_{kq}=\frac{D'_{kq}(i\omega)}{D'(i\omega)},$$

то мы видим, что S_{kq} будет значением регулярной части $Z_{kq}(p)$ в точке полюса $p=i\omega$:

$$S_{kq}=\frac{\lambda^{*}\overset{*}{\varphi}_k\overset{*}{\chi}_q}{2i\omega\,D'(-i\omega)}+Z_{kq}^{*}(i\omega). \quad (20.37)$$

Аналогично S_{kq}^{*} будет значением соответствующей регулярной части Z_{kq} в точке полюса $p=-i\omega$:

$$S_{kq}^{*}=-\frac{\lambda\varphi_k\chi_q}{2i\omega\,D'(i\omega)}+Z_{kq}^{*}(i\omega). \quad (20.38)$$

В полученном нами выражении для функций $u_k^{(1)}(a,\psi)$ $(k=1,2,\ldots,n)$ (20.35) содержатся две произвольные функции — действительная и мнимая части $K(a)$. Для определения этих функций мы можем, как делали это ранее, наложить дополнительное требование, заключающееся в том, чтобы каждая из n функций $u_k^{(1)}(a,\ \psi)$ не содержала основной гармоники, так как подобное требование привело бы к $2n$ условиям.

В рассматриваемом случае воспользуемся следующим приемом.

Возьмем какие-либо постоянные $g_1,\ \ldots,\ g_n$ и образуем линейную комбинацию:

$$g_1u_1^{(1)}(a,\ \psi)+\ \ldots\ +g_nu_n^{(1)}(a,\ \psi). \quad (20.39)$$

Потребуем, чтобы в разложении Фурье для функции (20.39) отсутствовал член с $e^{i\psi}$. Для этого необходимо, чтобы имело место следующее соотношение:

$$\int_0^{2\pi}[g_1u_1^{(1)}(a,\ \psi)+\ \ldots\ +g_nu_n^{(1)}(a,\ \psi)]\,e^{-i\psi}\,d\psi=0. \quad (20.40)$$

Подставляя в (20.40) значения $u_k^{(1)}(a,\ \psi)$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ (20.35), получаем одно линейное уравнение, из которого можем определить $K(a)$.

В частности, если в качестве $g_1, \ldots, g_n$ взяты вещественные величины, условие (20.40) будет эквивалентно условию отсутствия основной гармоники у функции (20.39).

Найдя, таким образом, вещественную и мнимую части $K(a)$ и определив тем самым, согласно (20.35), вид функций $u_k^{(1)}(a, \psi)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, перейдем к решению уравнений (20.26).

Как и в предыдущем случае, для того, чтобы эти уравнения обладали периодическим решением по ψ с периодом 2π, необходимо, чтобы выполнялось условие типа (20.21), т. е. чтобы

$$\sum_{k=1}^{n} \chi_k \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{r=1}^{n} f_{kx_r}^{(1)'}(u_1^{(0)}, \ldots, u_n^{(0)}) u_r^{(1)} + f_k^{(2)}(u_1^{(0)}, \ldots, u_n^{(0)}) - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial a} A_1 - \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial \psi} B_1 - \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial a} A_2 - \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial \psi} B_2 \right\} e^{-i\psi} d\psi = 0.$$

Это условие дает нам возможность определить функции $A_2(a)$ и $B_2(a)$:

$$A_2(a) + iaB_2(a) = \frac{\sum_{k=1}^{n} \chi_k \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{r=1}^{n} f_{kx_r}^{(1)'}(u_1^{(0)}, \ldots, u_n^{(0)}) u_r^{(1)} + f_k^{(2)}(u_1^{(0)}, \ldots, u_n^{(0)}) - \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial a} A_1 - \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial \psi} B_1 \right\} e^{-i\psi} d\psi}{2\pi \sum_{k=1}^{n} \chi_k \varphi_k}. \tag{20.41}$$

Приняв это выражение для $A_2(a)$ и $B_2(a)$, мы можем найти из (20.26) периодические функции $u_k^{(2)}(a, \psi)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$.

Таким образом, мы можем теперь построить приближенные решения системы уравнений (20.1), соответствующие одночастотному колебательному режиму.

В первом приближении имеем:

$$x_k = \varphi_k a e^{i\psi} + \varphi_k^* a e^{-i\psi} \quad (k=1, 2, \ldots, n), \tag{20.42}$$

где φ_k, φ_k^* $(k=1, 2, \ldots, n)$ — нетривиальные решения системы однородных алгебраических уравнений (20.8), в которых положено соответственно $p = i\omega$ и $p = -i\omega$; a и ψ — функции времени, определяемые уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \varepsilon B_1(a), \end{aligned} \right\} \tag{20.43}$$

в которых $A_1(a)$ и $B_1(a)$ находятся из (20.28).

Во втором приближении имеем:

$$x_k = \varphi_k a e^{i\psi} + \varphi_k^* a e^{-i\psi} + \varepsilon u_k^{(1)}(a, \psi) \quad (k=1, 2, \ldots, n), \tag{20.44}$$

где $u_k^{(1)}(a, \psi)$ определяются согласно формуле (20.35) а a и ψ — функции времени, определяемые из уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a), \end{aligned} \right\} \tag{20.45}$$

в которых $A_1(a)$ и $B_1(a)$ определяются выражением (20.28), а $A_2(a)$ и $B_2(a)$ выражением (20.41).

Резюмируя полученный результат, укажем сейчас формальный прием, с помощью которого можно построить первое и второе приближение для решений системы (20.1), соответствующих одночастотному колебательному процессу, зависящих от двух произвольных постоянных.

Прежде всего необходимо выделить невозмущенную линейную систему и убедиться, что в ней возможны гармонические собственные колебания с некоторой частотой ω. Затем следует проверить, что собственные колебания с этой частотой зависят лишь от двух произвольных постоянных a и θ:

$$x_k = \varphi_k a e^{i(\omega t+\theta)} + \varphi_k^* a e^{-i(\omega t+\theta)} \quad (k=1, 2, \ldots, n), \tag{20.46}$$

и что в невозмущенной системе ($\varepsilon=0$) невозможны собственные незатухающие колебания ни на обертонах ω, ни на «нулевой гармонике» (условие отсутствия «статических» решений, отличных от тривиального).

Далее рассматриваем вынужденные колебания

$$x_k = \sum_{r=1}^{n} Z_{kr}(i\alpha) F_r e^{i\alpha t},$$

возбуждаемые в невозмущенной системе приложенными силами $F_r e^{i\alpha t}$, и находим условие конечности вынужденных колебаний при $\alpha=\omega$:

$$\sum_{k=1}^{n} \chi_k F_k = 0.$$

Тогда в качестве первого приближения может быть использовано выражение (20.46), в котором a и $\psi=\omega t+\theta$ являются функциями времени, определяемыми уравнениями первого приближения (20.43). Функции $A_1(a)$ и $B_1(a)$, входящие в эти уравнения, находим, подставляя (20.46) в «уравнение гармонического баланса»:

$$\int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \chi_k \left\{ \frac{dx_k}{dt} - \sum_{r=1}^{n} c_{kr} x_r - \varepsilon f_k^{(1)}(x_1, \ldots, x_n) - \right.$$
$$\left. - \varepsilon^2 f_k^{(2)}(x_1, \ldots, x_n) - \ldots \right\}_{x_i=u_i^{(0)}(a,\psi)} e^{-i\psi} d\psi = 0. \tag{20.47}$$

При такой подстановке дифференцирование совершаем с учетом уравнений (20.43) и отбрасываем члены порядка малости выше первого.

Нетрудно проверить, что мы получим для $A_1(a)$ и $B_1(a)$ выражения, аналогичные тем, которые получаем согласно формуле (20.28).

Для построения второго приближения рассмотрим главные члены возмущающих сил

$$\varepsilon f_k^{(1)}(x_1, \ldots, x_n) \quad (k=1, 2, \ldots, n),$$

подставим в них значения $x_1, \ldots, x_n$ согласно формулам первого приближения (20.46) и разложим результат в ряд Фурье:

$$\sum_{(-\infty<m<\infty)} \varepsilon \Phi_k^{(m)}(a) e^{im(\omega t+\theta)}. \tag{20.48}$$

Считая здесь a и θ постоянными, рассмотрим регуляризированное вынужденное колебание

$$\varepsilon u_k^{(1)}(a, \omega t+\theta) = \sum_{\substack{(-\infty<m<\infty)\\ m\neq\pm 1}} e^{im(\omega t+\theta)} \left\{\sum_{r=1}^{n} \varepsilon\Phi_r^{(m)}(a) Z_{kr}(im\omega)\right\} + \\ + e^{i(\omega t+\theta)}\left\{\sum_{r=1}^{n} S_{kr}\varepsilon\Phi_r^{(1)}(a)\right\} + e^{-i(\omega t+\theta)}\left\{\sum_{r=1}^{n} S_{kr}^{*}\varepsilon\Phi_r^{(-1)}(a)\right\} \quad (20.49)$$
$$(k=1, 2, \ldots, n),$$

возбуждаемое в невозмущенной системе приложенными силами (20.48). Мы говорим о «регуляризированном» вынужденном колебании, подразумевая, что в гармонических компонентах вынужденного колебания, возбужденных «резонирующими членами»,

$$\varepsilon\Phi_k^{(1)} e^{i(\omega t+\theta)},$$
$$\varepsilon\Phi_k^{(-1)} e^{-i(\omega t+\theta)}$$

из множителей $Z_{kr}(p)$ удалены их особенности

$$\frac{\lambda\varphi_k\chi_r}{D'(i\omega)(p-i\omega)}$$

для $p=i\omega$ и

$$\frac{\lambda^*\varphi_k^*\chi_r^*}{D'(-i\omega)(p+i\omega)}$$

для $p=-i\omega$.

Введем, далее, две произвольные вещественные функции $K_1(a)$ и $K_2(a)$ $(K(a)=K_1(a)+iK_2(a))$, после чего в качестве второго приближения берем выражения вида

$$x_k = \varphi_k a e^{i(\omega t+\theta)} + \varphi_k^* a e^{-i(\omega t+\theta)} + \varepsilon\varphi_k K(a) e^{i(\omega t+\theta)} + \\ + \varepsilon\varphi_k^* K^*(a) e^{-i(\omega t+\theta)} + \varepsilon u_k^{(1)}(a, \omega t+\theta) \quad (20.50)$$
$$(k=1, 2, \ldots, n),$$

в которых

$$K(a)=K_1(a)+iK_2(a), \quad K^*(a)=K_1(a)-iK_2(a).$$

Выражения (20.50), очевидно, могут быть интерпретированы как сумма собственных колебаний и регуляризированных вынужденных колебаний.

Чтобы определить функции $\varepsilon A_1(a)+\varepsilon^2 A_2(a)$ и $\varepsilon B_1(a)+\varepsilon^2 B_2(a)$, стоящие в правых частях уравнений второго приближения (20.45), подставляем значения x_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ согласно формулам (20.50) в «уравнение гармонического баланса» (20.47), причем при дифференцировании учитываем уравнения второго приближения (20.45) и вычисления ведем с точностью до величин второго порядка малости включительно.

Простая проверка убеждает нас в том, что изложенный формальный прием приводит к тем же результатам, что и разработанная выше теория асимптотических разложений.