§ 21. Собственные одночастотные колебания в системах со многими степенями свободы, описываемые системой дифференциальных уравнений второго порядка

Часто при исследовании колебательных систем со многими степенями свободы удобнее рассматривать систему N дифференциальных уравнений второго порядка, где N — число степеней свободы.

Мы рассмотрим частный случай, когда невозмущенная система соответствует обычной схеме теории малых колебаний.

Для исследования этого частного случая воспользуемся результатами, установленными в предыдущем параграфе. Как известно, в этом случае невозмущенная система полностью характеризуется кинетической энергией

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r,\, s=1}^{N} a_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s \tag{21.1}$$

и потенциальной энергией

$$V = \frac{1}{2} \sum_{r,\, s=1}^{N} c_{rs} q_r q_s, \tag{21.2}$$

где q_s $(s = 1, 2, \ldots, N)$ — обобщенные координаты и a_{rs}, c_{rs} — соответственно инерционные и квазиупругие коэффициенты, причем $a_{rs} = a_{sr}$, $c_{rs} = c_{sr}$.

Подставляя значения кинетической и потенциальной энергии (21.1) и (21.2) в уравнения Лагранжа, мы получаем дифференциальные уравнения невозмущенного движения в виде

$$\sum_{s=1}^{N} \{a_{rs} \ddot{q}_s + c_{rs} q_s\} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, N). \tag{21.3}$$

Предполагая, что возмущение определяется малыми обобщенными силами вида

$$Q_r(q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N, \varepsilon) =$$
$$= \varepsilon Q_r^{(1)}(q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N) + \varepsilon^2 Q_r^{(2)}(q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N) + \varepsilon^3 \ldots \tag{21.4}$$
$$(r = 1, 2, \ldots, N),$$

приходим к задаче исследования следующих дифференциальных уравнений:

$$\sum_{s=1}^{N} \{a_{rs} \ddot{q}_s + c_{rs} q_s\} =$$
$$= \varepsilon Q_r^{(1)}(q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N) + \varepsilon^2 Q_r^{(2)}(q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N) + \varepsilon^3 \ldots \tag{21.5}$$
$$(r = 1, 2, \ldots, N),$$

которые при $\varepsilon = 0$ вырождаются в уравнения (21.3).

Прежде чем переходить к применению результатов предыдущего параграфа к исследованию системы уравнений (21.5), остановимся на некоторых свойствах решений системы невозмущенных уравнений (21.3).

Как известно, частные решения невозмущенной системы (21.3), соответствующие нормальным колебаниям, представляются выражениями:

$$q_s = \varphi_s^{(j)} a e^{i(\omega_j t+\theta)} + \varphi_s^{(j)*} a e^{-i(\omega_j t+\theta)}$$
$$(s,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N)$$

или в вещественной форме

$$q_s = \varphi_s^{(j)} a \cos(\omega_j t + \theta) \quad (s,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N), \tag{21.6}$$

где ω_j $(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N)$ — собственные частоты, определяемые характеристическим уравнением

$$D \| -a_{rs}\omega^2 + c_{rs} \| = 0, \tag{21.7}$$

$\varphi_s^{(j)}$ $(s,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N)$ — нормальные функции, являющиеся нетривиальными решениями системы однородных алгебраических уравнений

$$\sum_{s=1}^{N} \{-a_{rs}\omega_j^2 + c_{rs}\} \varphi_s^{(j)} = 0 \qquad (r,\ j = 1,2,\ \ldots,\ N), \tag{21.8}$$

обладающие свойством ортогональности

$$\left.\begin{aligned} \sum_{r,\ s=1}^{N} a_{rs}\varphi_r^{(j)}\varphi_s^{(l)} &= 0, \\ \sum_{r,\ s=1}^{N} c_{rs}\varphi_r^{(j)}\varphi_s^{(l)} &= 0 \quad (j \neq l), \end{aligned}\right\} \tag{21.9}$$

а a и θ — вещественные произвольные постоянные.

Заметим далее, что вынужденные колебания, возбуждаемые в невозмущенной системе (21.3) гармоническими обобщенными силами

$$Q_r = E_r \cos(\alpha t + \vartheta) \qquad (r = 1,\ 2,\ \ldots,\ N),$$

определяются выражениями:

$$q_s = u_s \cos(\alpha t + \vartheta) \qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ N).$$

Постоянные амплитуды u_r $(r = 1,\ 2,\ \ldots,\ N)$ удовлетворяют системе неоднородных алгебраических уравнений

$$\sum_{s=1}^{N} \{-a_{rs}\alpha^2 + c_{rs}\} u_s = E_r \qquad (r = 1,\ 2,\ \ldots,\ N), \tag{21.10}$$

для решения которой воспользуемся нормальными координатами. Будем искать выражение для u_s $(s = 1,\ 2,\ \ldots,\ N)$ в виде сумм

$$u_s = \sum_{j=1}^{N} c_j \varphi_s^{(j)} \qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ N), \tag{21.11}$$

где c_j — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению. Подставляя (21.11) в систему уравнений (21.10) и учитывая, что

$$\varphi_s^{(j)} \ (s,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N)$$

удовлетворяют системам однородных алгебраических уравнений (21.8), получим:

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{s=1}^{N} a_{rs} \{\omega_j^2 - \alpha^2\} c_j \varphi_s^{(j)} = E_r \qquad (r = 1,\ 2,\ \ldots,\ N). \tag{21.12}$$

Умножая эти уравнения соответственно на $\varphi_1^{(j_1)}, \varphi_2^{(j_1)}, \ldots, \varphi_N^{(j_1)}$ и суммируя результат по r, находим:

$$\sum_{j=1}^{N} c_j \{\omega_j^{(2)} - \alpha^2\} \sum_{s,\, r=1}^{N} a_{rs}\varphi_s^{(j)}\varphi_r^{(j_1)} = \sum_{r=1}^{N} E_r\varphi_r^{(j_1)}. \qquad (21.13)$$

Принимая во внимание ортогональность нормальных функций (выражения (21.9)) и вводя обозначения

$$\sum_{r,\, s=1}^{N} a_{rs}\varphi_r^{(j)}\varphi_s^{(j)} = m_j \quad (j = 1, 2, \ldots, N), \qquad (21.14)$$

находим:

$$u_s = \sum_{j=1}^{N} \varphi_s^{(j)} \frac{\sum\limits_{r=1}^{N} E_r\varphi_r^{(j)}}{m_j(\omega_j^2 - \alpha^2)} \quad (s = 1, 2, \ldots, N). \qquad (21.15)$$

Таким образом, условие конечности вынужденных колебаний в случае, когда частота внешней силы α равна одной из собственных частот, например ω_1, будет иметь вид:

$$\sum_{r=1}^{N} E_r\varphi_r^{(1)} = 0. \qquad (21.16)$$

При выполнении этого условия амплитуды вынужденных колебаний определяются формулой

$$u_s = \sum_{j=2}^{N} \varphi_s^{(j)} \frac{\sum\limits_{r=1}^{N} E_r\varphi_r^{(j)}}{m_j(\omega_j^2 - \alpha^2)} + C\varphi_s^{(1)} \quad (s = 1, 2, \ldots, N), \qquad (21.17)$$

где C — произвольная постоянная.

После сделанных кратких замечаний о собственных и вынужденных колебаниях в невозмущенной системе (21.3) перейдем к исследованию системы возмущенных уравнений (21.5).

Как и в предыдущем параграфе, рассмотрим задачу о построении асимптотических приближенных формул для частных решений, соответствующих одночастотным колебаниям, близким (при малых ε) к одному из нормальных невозмущенных колебаний (21.6), например к нормальному колебанию

$$q_s = \varphi_s^{(1)} a \cos(\omega_1 t + \theta) \quad (s = 1, 2, \ldots, N) \qquad (21.18)$$

с частотой ω_1.

Чтобы удовлетворить условиям применимости метода, изложенного в предыдущем параграфе, необходимо сделать следующие допущения:

1. В невозмущенной системе возможны незатухающие гармонические колебания с частотой ω_1, зависящие только от двух произвольных постоянных.

2. Единственным решением, соответствующим равновесию в невозмущенной системе, является тривиальное решение

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_N = 0.$$

3. Частота ω_1, а также ни один из ее обертонов $2\omega_1, 3\omega_1, \ldots, k\omega_1, \ldots$ не равны какой-либо собственной частоте $\omega_2, \ldots, \omega_N$ невозмущенной системы (отсутствует внутренний резонанс).

При этих условиях мы можем применить наш метод и построить асимптотические разложения

$$q_s = \varphi_s^{(1)} a \cos(\omega_1 t + \theta) + \varepsilon u_s^{(1)}(a, \omega_1 t + \theta) + \varepsilon^2 u_s^{(2)}(a, \omega_1 t + \theta) + \varepsilon^3 \ldots \quad (21.19)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, N),$$

в которых a и $\psi = \omega_1 t + \theta$ определяются дифференциальными уравнениями вида:

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \varepsilon^3 \ldots, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_1 + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \varepsilon^3 \ldots \end{aligned}\right\} \quad (21.20)$$

Функции $u_s^{(1)}(a, \omega_1 t + \theta)$, $u_s^{(2)}(a, \omega_1 t + \theta), \ldots$ $(s = 1, 2, \ldots, N)$; $A_1(a)$, $A_2(a), \ldots$; $B_1(a)$, $B_2(a), \ldots$, стоящие в правых частях выражений (21.19) и уравнений (21.15), могут быть определены совершенно так же, как и в предыдущем параграфе. Однако нетрудно убедиться, что первые члены разложений (21.19) и (21.20), необходимые для построения решений в первом и во втором приближении, могут быть найдены с помощью формального приема, сформулированного в предыдущем параграфе.

Выведем вначале формулы для первого приближения. Как и в предыдущем параграфе, в качестве первого приближения принимаем выражения

$$q_s = \varphi_s^{(1)} a \cos\psi \quad (s = 1, 2, \ldots, N), \qquad (21.21)$$

в которых амплитуда a и полная фаза ψ определяются уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_1 + \varepsilon B_1(a). \end{aligned}\right\} \qquad (21.22)$$

Здесь функции $A_1(a)$ и $B_1(a)$ можем найти, подставляя (21.21) в уравнения гармонического баланса:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^{N} \varphi_r^{(1)} \Big\{ \sum_{s=1}^{N} (a_{rs}\ddot{q}_s + c_{rs} q_s) - \varepsilon Q_r^{(1)}(q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N) - \\ &\qquad - \varepsilon^2 Q_r^{(2)}(q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N) - \ldots \Big\} \cos\psi \, d\psi = 0, \\ &\int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^{N} \varphi_r^{(1)} \Big\{ \sum_{s=1}^{N} (a_{rs}\ddot{q}_s + c_{rs} q_s) - \varepsilon Q_r^{(1)}(q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N) - \\ &\qquad - \varepsilon^2 Q_r^{(2)}(q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N) - \ldots \Big\} \sin\psi \, d\psi = 0, \end{aligned}\right\} \quad (21.23)$$

причем при подстановке ограничиваемся только членами первого порядка малости включительно.

Найдем явные выражения для $A_1(a)$ и $B_1(a)$. Дифференцируя (21.21), учитывая при этом уравнения (21.22), находим с точностью до величин первого порядка малости:

$$\left.\begin{aligned} \dot{q}_s &= \varphi_s^{(1)} [\varepsilon \cos\psi A_1(a) - a\omega_1 \sin\psi - \varepsilon a\omega_1 \sin\psi B_1(a)], \\ \ddot{q}_s &= \varphi_s^{(1)} [-\varepsilon 2\omega_1 \sin\psi A_1(a) - a\omega_1^2 \cos\psi - \varepsilon 2a\omega_1 \cos\psi B_1(a)] \\ &\qquad (s = 1, 2, \ldots, N). \end{aligned}\right\} \quad (21.24)$$

Подставляя (21.21) и (21.24) в выражения (21.23), находим с той же степенью точности:

$$\int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^{N} \varphi_r^{(1)} \left\{ \sum_{s=1}^{N} \varphi_s^{(1)} [-a_{rs}(a\omega_1^2 \cos\psi + 2a\omega_1\varepsilon \cos\psi B_1(a) + 2\varepsilon\omega_1 \sin\psi A_1(a)) + \right.$$
$$\left. + c_{rs} a \cos\psi] - \varepsilon Q_r^{(1)}(\varphi_1^{(1)} a \cos\psi, \ldots, -\varphi_1^{(1)} a\omega_1 \sin\psi, \ldots) \right\} \cos\psi\, d\psi = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^{N} \varphi_r^{(1)} \left\{ \sum_{s=1}^{N} \varphi_s^{(1)} [-a_{rs}(a\omega_1^2 \cos\psi + 2a\omega_1\varepsilon \cos\psi B_1(a) + 2\varepsilon\omega_1 \sin\psi A_1(a)) + \right.$$
$$\left. + c_{rs} a \cos\psi] - \varepsilon Q_r^{(1)}(\varphi_1^{(1)} a \cos\psi, \ldots, -\varphi_1^{(1)} a\omega_1 \sin\psi, \ldots,) \right\} \sin\psi\, d\psi = 0.$$

Меняя порядок суммирования и интегрирования, полагая при интегрировании по ψ, что a — постоянная и учитывая, что

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\psi\, d\psi = \pi, \quad \int_0^{2\pi} \sin\psi \cos\psi\, d\psi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2\psi\, d\psi = \pi,$$

получим:

$$2a\omega_1\pi\varepsilon B_1(a) \sum_{r,\, s=1}^{N} \varphi_r^{(1)}\varphi_s^{(1)} a_{rs} - a\pi \sum_{r,s=1}^{N} (c_{rs} - a_{rs}\omega_1^2)\varphi_s{}'\varphi_r^{(1)} =$$
$$= -\varepsilon \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^{N} \varphi_r^{(1)} Q_r^{(1)}(\varphi_1^{(1)} a \cos\psi, \ldots, -\varphi_1^{(1)} a\omega_1 \sin\psi, \ldots) \cos\psi\, d\psi,$$

$$2\omega_1\pi\varepsilon A_1(a) \sum_{r,\, s=1}^{N} \varphi_r^{(1)}\varphi_s^{(1)} a_{rs} =$$
$$= -\varepsilon \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^{N} \varphi_r^{(1)} Q_r^{(1)}(\varphi_1^{(1)} a \cos\psi, \ldots, -\varphi_1^{(1)} a\omega_1 \sin\psi_1, \ldots) \sin\psi\, d\psi.$$

Учитывая, что

$$\sum_{r,\, s=1}^{N} a_{rs}\varphi_r^{(1)}\varphi_s^{(1)} = m_1, \quad \sum_{s=1}^{N} (c_{rs} - a_{rs}\omega_1^2)\varphi_s^{(1)} = 0,$$

окончательно получаем следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon A_1(a) &= -\frac{\varepsilon}{2\omega_1\pi m_1} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^{N} \varphi_r^{(1)} Q_r^{(1)}(\varphi_1^{(1)} a \cos\psi, \ldots \\ &\qquad \ldots, -\varphi_1^{(1)} a\omega_1 \sin\psi, \ldots) \sin\psi\, d\psi, \\ \varepsilon B_1(a) &= -\frac{\varepsilon}{2\omega_1\pi m_1 a} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^{N} \varphi_r^{(1)} Q_r^{(1)}(\varphi_1^{(1)} a \cos\psi, \ldots \\ &\qquad \ldots, -\varphi_1^{(1)} a\omega_1 \sin\psi, \ldots) \cos\psi\, d\psi. \end{aligned}\right\} \quad (21.25)$$

Заметим теперь, что формулы (21.25) можно получить гораздо проще, проведя аналогию с результатами первого параграфа для системы с одной степенью свободы.

Действительно, на основании (21.7) и (21.14), можем написать:

$$\sum_{r,\,s=1}^{N} c_{rs}\varphi_r^{(1)}\varphi_s^{(1)} = m_1\omega_1^2.$$

Полагая $x = a\cos\psi$, вместо (21.23) получаем следующие уравнения гармонического баланса:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\Big\{m_1\Big(\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_1^2x\Big)-\\
&\qquad -\varepsilon\sum_{r=1}^{N}\varphi_r^{(1)}Q_r^{(1)}(\varphi_1^{(1)}x,\ \ldots,\ \varphi_N^{(1)}x,\ \ \varphi_1^{(1)}\dot{x},\ \ldots,\ \varphi_N^{(1)}\dot{x})\Big\}\cos\psi\,d\psi=0,\\
&\int_0^{2\pi}\Big\{m_1\Big(\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_1^2x\Big)-\\
&\qquad -\varepsilon\sum_{r=1}^{N}\varphi_r^{(1)}Q_r^{(1)}(\varphi_1^{(1)}x,\ \ldots,\ \varphi_N^{(1)}x,\ \ \varphi_1^{(1)}\dot{x},\ \ldots,\ \varphi_N^{(1)}\dot{x})\Big\}\sin\psi\,d\psi=0.
\end{aligned}\right\}\quad(21.26)$$

Отсюда совершенно очевидно, что уравнения первого приближения (21.22) должны оказаться теми же, что и для системы с одной степенью свободы с массой m_1, упругостью $m_1\omega_1^2$, находящейся под воздействием возмущающей силы:

$$\varepsilon\sum_{r=1}^{N}\varphi_r^{(1)}Q_r^{(1)}(\varphi_1^{(1)}x,\ \ldots,\ \varphi_N^{(1)}x,\ \ \varphi_1^{(1)}\dot{x},\ \ldots,\ \varphi_N^{(1)}\dot{x}).\qquad(21.27)$$

Поэтому, воспользовавшись формулами (1.27), выведенными для случая системы с одной степенью свободы и подставляя в них вместо $f(a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi)$ выражение (21.27), мы сразу находим формулы (21.25).

Остановимся еще на простой энергетической интерпретации полученных формул (21.25).

Рассмотрим для этого выражение виртуальной работы δW, которую совершили бы возмущающие обобщенные силы

$$Q_r^{(1)}(q_1,\ \ldots,\ q_N,\ \dot{q}_1,\ \ldots,\ \dot{q}_N)\quad(r=1,\ 2,\ \ldots,\ N)$$

в режиме синусоидальных колебаний

$$q_s=\varphi_s^{(1)}a\cos\psi,\qquad \dot{q}_s=-\omega_1\varphi_s^{(1)}a\sin\psi,$$

на виртуальных перемещениях

$$\delta q_s=\varphi_s^{(1)}\cos\psi\delta a-\varphi_s^{(1)}a\sin\psi\delta\psi,$$

соответствующих вариациям амплитуды и полной фазы нормального колебания. Имеем с принятой степенью точности, т. е. с точностью до величин первого порядка малости включительно:

$$\begin{aligned}\delta W=\varepsilon\sum_{r=1}^{N}Q_r^{(1)}(\varphi_1^{(1)}a\cos\psi,\ \ldots,\ -\varphi_1^{(1)}a\omega_1\sin\psi,\ \ldots)\times\\
\times[\varphi_r^{(1)}\cos\psi\delta a-\varphi_r^{(1)}a\sin\psi\delta\psi].\quad(21.28)\end{aligned}$$

Возьмем среднее значение этой работы за полный цикл колебания:

$$\overline{\delta W} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta W \, d\psi. \tag{21.29}$$

Тогда, сопоставляя (21.28), (21.29) с (21.25), можем написать:

$$\overline{\delta W} = -m_1\omega_1 a\varepsilon B_1(a)\,\delta a + m_1\omega_1 a\varepsilon A_1(a)\,\delta\psi.$$

Обозначим символами

$$\frac{\overline{\delta W}}{\delta a}, \quad \frac{\overline{\delta W}}{\delta \psi}$$

коэффициенты при вариациях δa и $\delta\psi$ в выражении для $\overline{\delta W}$.

Тогда будем иметь:

$$\varepsilon A_1(a) = \frac{1}{m_1\omega_1 a}\frac{\overline{\delta W}}{\delta\psi}, \quad \varepsilon B_1(a) = -\frac{1}{m\omega_1 a}\frac{\overline{\delta W}}{\delta a}, \tag{21.30}$$

и поэтому уравнения первого приближения можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{1}{m_1\omega_1 a}\frac{\overline{\delta W}}{\delta\psi}, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_1 - \frac{1}{m_1\omega_1 a}\frac{\overline{\delta W}}{\delta a}. \end{aligned} \tag{21.31}$$

Итак, чтобы получить уравнения первого приближения, достаточно определить только среднюю величину виртуальной работы за цикл колебания, которую совершили бы возмущающие силы в режиме синусоидальных колебаний на виртуальных перемещениях, соответствующих вариации их амплитуды a и фазы ψ.

Перейдем теперь к построению решений для уравнений (21.5) во втором приближении.

Для этого рассмотрим вначале, с точностью до величин первого порядка малости, вынужденные колебания, которые возбуждались бы в невозмущенной системе (21.3) обобщенными силами

$$Q_r(q_1, \ldots, q_N, \dot q_1, \ldots, \dot q_N) \quad (r = 1, 2, \ldots, N),$$

если бы в них $q_1, \ldots, q_N, \dot q_1, \ldots, \dot q_N$ были бы синусоидальные:

$$q_s = \varphi_s^{(1)} a \cos(\omega_1 t + \theta), \quad \dot q_s = -\varphi_s^{(1)} a\omega_1 \sin(\omega_1 t + \theta) \quad (s = 1, 2, \ldots, N).$$

Заметим, что тогда

$$Q_r(q_1, \ldots, q_N, \dot q_1, \ldots, \dot q_N, \varepsilon) = \\ = \varepsilon Q_r^{(1)}(\varphi_1^{(1)} a \cos\psi, \ldots, -\varphi_1^{(1)} a\omega_1 \sin\psi, \ldots,) + \varepsilon^2 \ldots \quad (r = 1, 2, \ldots, N)$$

Разложим $\varepsilon Q_r^{(1)}(\varphi_1^{(1)} a\cos\psi, \ldots, -\varphi_1^{(1)} a\omega_1 \sin\psi, \ldots)$ в ряд Фурье:

$$\varepsilon Q_r^{(1)}(\varphi_1^{(1)} a\cos\psi, \ldots, -\varphi_1^{(1)} a\omega_1\sin\psi, \ldots) = \varepsilon f_r^{(0)}(a) + \\ + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \{f_r^{(k)}(a)\cos k(\omega_1 t + \theta) + g_r^{(k)}(a)\sin k(\omega_1 t + \theta)\} \\ (r = 1, 2, \ldots, N),$$

где

$$f_r^{(k)}(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q_r^{(1)}(\varphi_1^{(1)}a\cos\psi,\ \ldots,\ -\varphi_1^{(1)}a\omega_1\sin\psi,\ \ldots)\cos k\psi\,d\psi,$$

$$g_r^{(k)}(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q_r^{(1)}(\varphi_1^{(1)}a\cos\psi,\ \ldots,\ -\varphi_1^{(1)}a\omega_1\sin\psi,\ \ldots)\sin k\psi\,d\psi$$

$$(r=1,\ 2,\ \ldots,\ N;\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Каждая из компонент этого рода с частотой $k\omega_1$ $(k=0,\ 2,\ 3\ \ldots)$ в соответствии с (21.15) возбуждает вынужденное колебание

$$\varepsilon\sum_{j=1}^{N}\varphi_s^{(j)}\frac{\sum\limits_{r=1}^{N}\{f_r^{(k)}(a)\cos k(\omega_1t+\theta)+g_r^{(k)}(a)\sin k(\omega_1t+\theta)\}\varphi_r^{(j)}}{m_j(\omega_j^2-k^2\omega_1^2)}$$

$$(k=2,\ 3,\ \ldots),$$

$$\varepsilon\sum_{j=1}^{N}\varphi_s^{(j)}\frac{\sum\limits_{r=1}^{N}f_r^{(0)}(a)\varphi_r^{(j)}}{m_j\omega_j^2},\quad k=0$$

$$(s=1,\ 2,\ \ldots,\ N).$$

У гармоники с частотой ω_1 учтем в сумме (21.10) только члены, соответствующие возбуждению высших нормальных координат:

$$\varepsilon\sum_{j=2}^{N}\varphi_s^{(j)}\frac{\sum\limits_{r=1}^{N}\{f_r^{(1)}(a)\cos(\omega_1t+\theta)+g_r^{(1)}(a)\sin(\omega_1t+\theta\}\varphi_r^{(j)}}{m_j(\omega_j^2-\omega_1^2)}$$

$$(s=1,\ 2,\ \ldots,\ N).$$

Таким образом, получаем «регуляризированное» вынужденное колебание, возбуждаемое в невозмущенной системе обобщенными силами $Q_r(q_1,\ \ldots,\ q_N,\ \dot q_1,\ \ldots,\ \dot q_N,\ \varepsilon)$ $(r=1,\ 2,\ \ldots,\ N)$, в которых q_s, $\dot q_s$ $(s=1,\ \ldots,\ N)$ синусоидальны, в следующем виде (с точностью до величин первого порядка малости включительно):

$$\varepsilon u_s^{(1)}(a,\ \omega_1t+\theta)=\varepsilon\sum_{j=1}^{N}\varphi_s^{(j)}\frac{\sum\limits_{r=1}^{N}f_r^{(0)}(a)\varphi_r^{(j)}}{m_j\omega_j^2}+$$

$$+\varepsilon\sum_{j=2}^{N}\varphi_s^{(j)}\frac{\sum\limits_{r=1}^{N}\{f_r^{(1)}(a)\cos(\omega_1t+\theta)+g_r^{(1)}(a)\sin(\omega_1t+\theta)\}\varphi_r^{(j)}}{m_j(\omega_j^2-\omega_1^2)}+$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=1}^{N}\varphi_s^{(j)}\frac{\sum\limits_{r=1}^{N}\{f_r^{(k)}(a)\cos k(\omega_1t+\theta)+g_r^{(k)}(a)\sin k(\omega_1t+\theta)\}\varphi_r^{(j)}}{m_j(\omega_j^2-k^2\omega_1^2)}\qquad(21.32)$$

$$(s=1,\ 2,\ \ldots,\ N).$$

Складывая эти выражения с первым приближением, получаем решения уравнений (21.5) во втором приближении:

$$q_s = \varphi_s^{(1)} a \cos\psi + \varepsilon u_s^{(1)}(a, \psi) \qquad (s = 1, 2, \ldots, N). \tag{21.33}$$

Как и в предыдущем параграфе можно было бы добавить сюда члены типа $\varepsilon\{C_1(a)\cos\psi + C_2(a)\sin\psi\}\varphi_r^{(1)}$, содержащие две функции $C_1(a)$ и $C_2(a)$. Но поскольку их выбор произволен, то для получения более простых формул положим $C_1(a) = C_2(a) = 0$ и будем в дальнейшем оперировать с выражениями (21.33).

Для того чтобы выражения (21.33) давали в действительности второе приближение, в них a и ψ должны быть функциями времени, определяемыми из уравнений второго приближения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_1 + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a). \end{aligned}\right\} \tag{21.34}$$

Входящие сюда функции $A_2(a)$ и $B_2(a)$ могут быть найдены с помощью подстановки второго приближения (21.33) в уравнения гармонического баланса (21.23). При этом дифференцирование по времени должно быть выполнено с учетом уравнений (21.34) так, чтобы производные по t не фигурировали под знаком интеграла, а интегрирование по ψ должно совершаться, как если бы a было постоянным параметром и все вычисления велись бы с точностью до величин второго порядка малости включительно.

Заметим теперь, что в формулах (21.32) гармоники первого порядка $\cos\psi$ и $\sin\psi$ входят только в члены, пропорциональные $\varphi_r^{(2)}, \varphi_r^{(3)}, \ldots$ $\ldots, \varphi_r^{(N)}$ $(r = 1, 2, \ldots, N)$, и что имеют место соотношения:

$$\sum_{r,\, s=1}^{N} a_{rs}\varphi_r^{(1)}\varphi_s^{(j)} = 0, \qquad \sum_{r,\, s=1}^{N} c_{rs}\varphi_r^{(1)}\varphi_s^{(j)} = 0$$
$$(j = 2, 3, \ldots, N).$$

Поэтому выражения

$$\sum_{r,\, s=1}^{N} \varphi_r^{(1)} a_{rs} u_s^{(1)}(a, \psi), \qquad \sum_{r,\, s=1}^{N} \varphi_r^{(1)} c_{rs} u_s^{(1)}(a, \psi)$$

не содержат гармоник первого порядка.

Учитывая сделанные замечания, мы можем уравнения гармонического баланса (21.23) представить в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \Big\{ m_1\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_1^2 x\right) - \sum_{r=1}^{N} \varphi_r^{(1)} \left[\varepsilon Q_r^{(1)}(\varphi_1^{(1)}x + \varepsilon u_1^{(1)}, \ldots) + \right. \\ &\qquad\qquad \left. + \varepsilon^2 Q_r^{(2)}(\varphi_1^{(1)}x, \ldots)\right]\Big\} \cos\psi \, d\psi = 0, \\ &\int_0^{2\pi} \Big\{ m_1\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_1^2 x\right) - \sum_{r=1}^{N} \varphi_r^{(1)} \left[\varepsilon Q_r^{(1)}(\varphi_1^{(1)}x + \varepsilon u_1^{(1)}, \ldots) + \right. \\ &\qquad\qquad \left. + \varepsilon^2 Q_r^{(2)}(\varphi_1^{(1)}x, \ldots)\right]\Big\} \sin\psi \, d\psi = 0, \end{aligned}\right\} \tag{21.35}$$

где, как и выше, $x = a\cos\psi$.

Поскольку выражение

$$m_1\left(\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_1^2 x\right) \tag{21.36}$$

состоит лишь из первой гармоники по отношению к ψ, то уравнения (21.35) эквивалентны уравнению, выражающему равенство выражения (21.36) первой гармонике суммы:

$$\sum_{r=1}^{N} \varphi_r^{(1)}\left(\varepsilon Q_r^{(1)}\left(\varphi_1^{(1)}x+\varepsilon u_1^{(1)},\ \ldots\right)+\varepsilon^2 Q_r^{(2)}\left(\varphi_1^{(1)}x,\ \ldots\right)\right).$$

Обозначим первую гармонику какой-либо периодической функции $F(\psi)$ через $H_1\{F\}$:

$$H_1\{F\}=\cos\psi\ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\psi)\cos\psi\, d\psi+\sin\psi\ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\psi)\sin\psi\, d\psi.$$

Тогда уравнение, эквивалентное выражениям (21.35), можем написать в следующем виде:

$$m_1\left(\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_1^2 x\right)=H_1\left\{\sum_{r=1}^{N}\varphi_r^{(1)}\left[\varepsilon Q_r^{(1)}\left(\varphi_1^{(1)}x+\varepsilon u_1^{(1)},\ \ldots\right)+\varepsilon^2 Q_r^{(2)}\left(\varphi_1^{(1)}x,\ \ldots\right)\right]\right\}. \tag{21.37}$$

Разумеется, что это уравнение должно удовлетворяться лишь с точностью до величин второго порядка малости включительно, причем в выражениях обобщенных сил q_r и $\dot{q}_r$ $(r=1, 2, \ldots, N)$ должны быть заменены согласно формулам (21.33) с учетом уравнений (21.34).

Заметим теперь, что так как $x=a\cos\psi$, то мы можем написать:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_1^2 x=\varepsilon\{-2\omega_1 A_1\sin\psi-2\omega_1 aB_1\cos\psi\}+$$
$$+\varepsilon^2\left\{\left(A_1\frac{dA_1}{da}-aB_1^2-2\omega_1 aB_2\right)\cos\psi-\left(2\omega_1 A_2+2A_1B_1+A_1\frac{dB_1}{da}a\right)\sin\psi\right\}. \tag{21.38}$$

Разлагая правую часть уравнения (21.37) по степеням ε и удерживая лишь первые два члена, находим:

$$H_1\left\{\sum_{r=1}^{N}\varphi_r^{(1)}Q_r\left(q_1,\ \ldots,\ q_N,\ \dot{q}_1,\ \ldots,\ \dot{q}_N,\ \varepsilon\right)\right\}=$$
$$=\{\varepsilon L_1(a)+\varepsilon^2 L_2(a)\}\cos\psi+\{\varepsilon M_1(a)+\varepsilon^2 M_2(a)\}\sin\psi. \tag{21.39}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках и одинаковых степенях ε в правых частях выражений (21.38) и (21.39), находим:

$$A_1(a)=-\frac{M_1(a)}{2\omega_1 m_1},\quad B_1(a)=-\frac{L_1(a)}{2\omega_1 m_1 a}, \tag{21.40}$$

а также

$$\left.\begin{aligned} A_2(a)&=-\frac{A_1(a)B_1(a)}{\omega_1}-\frac{A_1(a)}{2\omega_1}a\frac{dB_1(a)}{da}-\frac{M_2(a)}{2\omega_1 m_1},\\ B_2(a)&=-\frac{B_1^2(a)}{2\omega_1}+\frac{A_1(a)}{2\omega_1 a}\frac{dA_1(a)}{da}-\frac{L_2(a)}{2\omega_1 m_1 a}.\end{aligned}\right\} \tag{21.41}$$

Нетрудно убедиться, что формулы (21.40) дают для $A_1(a)$ и $B_1(a)$ те же выражения, что и ранее полученные формулы (21.25).

Итак, уравнения второго приближения могут быть написаны в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon M_1(a)+\varepsilon^2 M_2(a)}{2\omega_1 m_1} - \frac{\varepsilon^2 A_1(a)B_1(a)}{\omega_1} - \frac{\varepsilon^2 A_1(a)}{2\omega_1}\frac{dB_1(a)}{da}a, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_1 - \frac{\varepsilon L_1(a)+\varepsilon^2 L_2(a)}{2\omega_1 m_1 a} - \frac{\varepsilon^2 B_1^2(a)}{2\omega_1} + \varepsilon^2\frac{A_1(a)}{2\omega_1 a}\frac{dA_1(a)}{da}. \end{aligned}\right\} \qquad (21.42)$$

Заметим теперь, что с точки зрения обычной теории малых колебаний, сумма

$$\sum_{r=1}^{N} \varphi_r^{(1)} Q_r$$

представляет собой обобщенную силу, действующую на первую нормальную координату.

Таким образом, чтобы написать уравнения второго приближения в явной форме, достаточно уметь подсчитать первую гармонику этой обобщенной силы с учетом членов не выше второго порядка малости.

Рассмотрим частный случай стационарных одночастотных колебаний с постоянной амплитудой. В этом случае фаза ψ вращается равномерно с некоторой угловой скоростью $\omega_1(a)$:

$$\psi = \omega_1(a)t + \theta, \quad \theta = \text{const}.$$

Из (21.42) имеем:

$$\omega_1(a) = \omega_1 - \frac{\varepsilon L_1(a)+\varepsilon^2 L_2(a)}{2\omega_1 m_1 a} - \varepsilon^2\frac{B_1^2(a)}{2\omega_1} + \varepsilon^2\frac{A_1(a)}{2\omega_1 a}\frac{dA_1(a)}{da},$$

а также

$$M_1(a) + \varepsilon M_2(a) + \varepsilon 2m_1 A_1(a)B_1(a) + \varepsilon 2m_1 A_1(a)\frac{dB_1(a)}{da}a = 0,$$

или $A_1(a) + \varepsilon A_2(a) = 0$.

Последнее равенство показывает, что $M_1(a)$ и $A_1(a)$ будут величинами первого порядка малости, и потому с той же степенью точности можем написать:

$$\varepsilon M_1(a) + \varepsilon^2 M_2(a) = 0 \qquad (21.43)$$

и

$$\omega_1(a) = \omega_1 - \frac{\varepsilon L_1(a)+\varepsilon^2 L_2(a)}{2\omega_1 m_1 a} - \frac{\varepsilon^2 B_1^2(a)}{2\omega_1},$$

или, учитывая (21.40),

$$\omega_1(a) = \omega_1 - \frac{\varepsilon L_1(a)}{2\omega_1 m_1 a} - \frac{\varepsilon^2}{2\omega_1}\left(\frac{L_1(a)}{2\omega_1 m_1 a}\right)^2 - \frac{\varepsilon^2 L_2(a)}{2\omega_1 m_1 a}.$$

Возводя в квадрат и отбрасывая члены порядка малости выше второго, для квадрата частоты стационарных колебаний получаем окончательно следующее выражение:

$$\omega_1^2(a) = \omega_1^2 - \frac{\varepsilon L_1(a) + \varepsilon^2 L_2(a)}{m_1 a}. \tag{21.44}$$

Итак, расчет стационарных одночастотных колебаний в системах со многими степенями свободы может производиться по следующей простой схеме.

Прежде всего определяем обобщенную силу, действующую на первую нормальную координату; заменяем в ней q_r, $\dot{q}_r$ $(r = 1, 2, \ldots, N)$ согласно формулам (21.33), где $u_r^{(1)}(a, \psi)$ $(r = 1, 2, \ldots, N)$ определены как вынужденные «регуляризированные» колебания, возбуждаемые в невозмущенной системе внешними силами, в режиме синусоидальных колебаний; раскладываем полученное выражение обобщенной силы, действующей на первую нормальную координату, в ряд Фурье. После этого коэффициент при синусе, взятый с точностью до величин второго порядка малости включительно, приравниваем нулю и получаем уравнение (21.43), из которого определяем стационарную амплитуду колебаний. Коэффициент при косинусе подставляем в правую часть формулы (21.44), определяющей частоту стационарных колебаний.

§ 22. Влияние внешних периодических сил на одночастотные колебания в системах со многими степенями свободы

Перейдем теперь к рассмотрению колебательных систем со многими степенями свободы, находящихся под воздействием внешних периодических обобщенных сил, зависящих явно от времени и имеющих следующий вид:

$$\begin{gathered} Q_r(\nu t, q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N, \varepsilon) = \varepsilon Q_r^{(1)}(\nu t, q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N) + \\ + \varepsilon^2 Q_r^{(2)}(\nu t, q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N) + \ldots \\ (r = 1, 2, \ldots, N). \end{gathered} \tag{22.1}$$

Тогда мы приходим к рассмотрению системы N уравнений второго порядка:

$$\begin{gathered} \sum_{s=1}^{N} (a_{rs}\ddot{q}_s + c_{rs}q_s) = \varepsilon Q_r^{(1)}(\nu t, q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N) + \\ + \varepsilon^2 Q_r^{(2)}(\nu t, q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N) + \ldots \\ (r = 1, 2, \ldots, N), \end{gathered} \tag{22.2}$$

в которой, как и в предыдущем параграфе, q_r $(r = 1, 2, \ldots, N)$ — обобщенные координаты, $a_{rs} = a_{sr}$, $c_{rs} = c_{sr}$ — постоянные.

Предположим, как и в § 13, что функции $Q_r(\nu t, q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N, \varepsilon)$ $(r = 1, 2, \ldots, N)$ являются периодическими по отношению к νt с периодом 2π и могут быть представлены в виде конечных сумм Фурье с коэфициентами, являющимися некоторыми полиномами по отношению к q_r, $\dot{q}_r$ $(r = 1, 2, \ldots, N)$.