следующее выражение:

$$\omega_1^2(a) = \omega_1^2 - \frac{\varepsilon L_1(a) + \varepsilon^2 L_2(a)}{m_1 a}. \tag{21.44}$$

Итак, расчет стационарных одночастотных колебаний в системах со многими степенями свободы может производиться по следующей простой схеме.

Прежде всего определяем обобщенную силу, действующую на первую нормальную координату; заменяем в ней q_r, $\dot{q}_r$ $(r = 1, 2, \ldots, N)$ согласно формулам (21.33), где $u_r^{(1)}(a, \psi)$ $(r = 1, 2, \ldots, N)$ определены как вынужденные «регуляризированные» колебания, возбуждаемые в невозмущенной системе внешними силами, в режиме синусоидальных колебаний; раскладываем полученное выражение обобщенной силы, действующей на первую нормальную координату, в ряд Фурье. После этого коэффициент при синусе, взятый с точностью до величин второго порядка малости включительно, приравниваем нулю и получаем уравнение (21.43), из которого определяем стационарную амплитуду колебаний. Коэффициент при косинусе подставляем в правую часть формулы (21.44), определяющей частоту стационарных колебаний.

§ 22. Влияние внешних периодических сил на одночастотные колебания в системах со многими степенями свободы

Перейдем теперь к рассмотрению колебательных систем со многими степенями свободы, находящихся под воздействием внешних периодических обобщенных сил, зависящих явно от времени и имеющих следующий вид:

$$\begin{aligned} Q_r(\nu t, q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N, \varepsilon) = \varepsilon Q_r^{(1)}(\nu t, q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N) + \\ + \varepsilon^2 Q_r^{(2)}(\nu t, q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N) + \ldots \\ (r = 1, 2, \ldots, N). \end{aligned} \tag{22.1}$$

Тогда мы приходим к рассмотрению системы N уравнений второго порядка:

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{N} (a_{rs}\ddot{q}_s + c_{rs}q_s) = \varepsilon Q_r^{(1)}(\nu t, q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N) + \\ + \varepsilon^2 Q_r^{(2)}(\nu t, q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N) + \ldots \\ (r = 1, 2, \ldots, N), \end{aligned} \tag{22.2}$$

в которой, как и в предыдущем параграфе, q_r $(r = 1, 2, \ldots, N)$ — обобщенные координаты, $a_{rs} = a_{sr}$, $c_{rs} = c_{sr}$ — постоянные.

Предположим, как и в § 13, что функции $Q_r(\nu t, q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N, \varepsilon)$ $(r = 1, 2, \ldots, N)$ являются периодическими по отношению к νt с периодом 2π и могут быть представлены в виде конечных сумм Фурье с коэфициентами, являющимися некоторыми полиномами по отношению к q_r, $\dot{q}_r$ $(r = 1, 2, \ldots, N)$.

Кроме того, предположим, что для невозмущенной системы уравнений:

$$\sum_{s=1}^{N} (a_{rs}\ddot{q}_s + c_{rs}q_s) = 0 \tag{22.3}$$
$$(r = 1, 2, \ldots, N)$$

выполняются условия, приведенные в § 21, стр. 261.

При этих предположениях будем искать решения системы (22.2), соответствующие одночастотному режиму, близкому к какому-либо нормальному колебанию, для определенности положим к нормальному колебанию с частотой ω_1. При этом будем рассматривать как нерезонансные случаи, так и резонансные.

Ввиду того, что исследование одночастотных режимов формально сводится к исследованию некоторого одного эквивалентного уравнения второго порядка вместо системы N уравнений второго порядка, то при построении приближеных решений для системы (22.2) воспользуемся, кроме методики и результатов предыдущих двух параграфов, также результатами главы III.

В нерезонансном случае *), исходя из соображений, приведенных в § 13 (стр. 158), решение системы (22.2) следует искать в виде асимптотических рядов

$$q_s = q_s^{(1)} a \cos\psi + \varepsilon u_s^{(1)}(a, \nu t, \psi) + \varepsilon^2 u_s^{(2)}(a, \nu t, \psi) + \varepsilon^3 \ldots \tag{22.4}$$
$$(s = 1, 2, \ldots, N),$$

в которых $u_s^{(1)}(a, \psi, \nu t)$, $u_s^{(2)}(a, \psi, \nu t)$, ... $(s = 1, 2, \ldots, N)$ — периодические по обеим угловым переменным с периодом 2π функции, а амплитуда a и фаза ψ должны быть определены из уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \ldots, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_1 + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{22.5}$$

Для определения функций $u_s^{(1)}(a, \nu t, \psi)$, $u_s^{(2)}(a, \nu t, \psi)$, ... $(s = 1, 2, \ldots N)$, $A_1(a), A_2(a), \ldots, B_1(a), B_2(a), \ldots$ можем воспользоваться непосредственно результатами, полученными в § 13 для случая системы с одной степенью свободы.

Вместо системы (22.2), описывающей одночастотный колебательный режим, рассматриваем соответствующее ей одно уравнение второго порядка

$$m_1\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_1^2 x\right) = \sum_{r=1}^{N} \varphi_r^{(1)} Q_r(\nu t, \varphi_1^{(1)}x, \ldots, \varphi_N^{(1)}x, \varphi_1^{(1)}\dot{x}, \ldots, \varphi_N^{(1)}\dot{x}, \varepsilon), \tag{22.6}$$

для которого, воспользовавшись непосредственно формулами (13.35),

---

*) Здесь под нерезонансным случаем мы подразумеваем случай, когда частота внешней силы ν не совпадает ни с одной из собственных частот системы и не выполняются соотношения типа $\nu \approx \frac{p}{q}\omega_k$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$, где p и q — целые взаимно простые числа.

находим:

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon A_1(a) &= -\frac{1}{4\pi^2 m_1 \omega_1}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\varepsilon\sum_{r=1}^{N}\varphi_r^{(1)}Q_{r0}^{(1)}(a,\ \theta,\ \psi)\sin\psi\,d\theta\,d\psi,\\ \varepsilon B_1(a) &= -\frac{1}{4\pi^2 m_1 \omega_1 a}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\varepsilon\sum_{r=1}^{N}\varphi_r^{(1)}Q_{r0}^{(1)}(a,\ \theta,\ \psi)\cos\psi\,d\theta\,d\psi,\end{aligned}\right\}\qquad(22.7)$$

где введены обозначения:

$$\varepsilon Q_{r0}^{(1)}(a,\ \theta,\ \psi) = \varepsilon Q_r^{(1)}(\theta,\ \varphi_1^{(1)}a\cos\psi,\ \ldots,\ \varphi_N^{(1)}a\cos\psi,\ -\varphi_1^{(1)}a\omega_1\sin\psi,\ \ldots,\ \ldots,\ -\varphi_N^{(1)}a\omega_1\sin\psi)\qquad(22.8)$$

$$(r = 1, 2, \ldots, N).$$

Далее, находим $u_s^{(1)}(a,\ \psi,\ \nu t)\,(s = 1,\ 2,\ \ldots, N)$ как вынужденные «регуляризированные» колебания, возбуждаемые в невозмущенной системе (22.3) силами (22.8), которые представляем в виде сумм Фурье (т. е. внешними обобщенными силами в первом приближении, взятыми в режиме синусоидальных колебаний: $q_r = \varphi_r^{(1)}a\cos\psi$, $\dot{q}_r = -\varphi_r^{(1)}a\omega_1\sin\psi$ $(r = 1,\ 2,\ \ldots,\ N)$:

$$\varepsilon Q_{r0}^{(1)}(a,\ \nu t,\ \psi) = \varepsilon\sum_{n,m} Q_{r0}^{(1)}(a)\,e^{i(n\nu t + m\psi)}\qquad(22.9)$$

$$(r = 1,\ 2,\ \ldots,\ N),$$

где

$$Q_{r0}^{(1)}(a) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} Q_{r0}^{(1)}(a,\ \theta,\ \psi)\,e^{-i(n\theta + m\psi)}d\theta\,d\psi\qquad(22.10)$$

$$(r = 1,\ 2,\ \ldots,\ N).$$

Итак, $u_s^{(1)}(a,\ \nu t,\ \psi)$ $(s = 1,\ 2,\ \ldots,\ N)$ должны быть определены как вынужденные колебания из системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\sum_{s=1}^{N}\left(a_{rs}\frac{d^2 u_s^{(1)}}{dt^2} + c_{rs}u_s^{(1)}\right) = \varepsilon\sum_{n,m} Q_{r0}^{(1)}(a)\,e^{i(n\nu t + m\psi)}\qquad(22.11)$$

$$(r = 1,\ 2,\ \ldots,\ N).$$

Здесь $\psi = \omega_1 t + \vartheta$.

Искомые функции $u_s^{(1)}(a,\ \nu t,\ \psi)$ $(s = 1,\ 2,\ \ldots,\ N)$ ищем в виде рядов

$$u_s^{(1)}(a,\ \nu t,\ \psi) = \sum_{n,\ m} k_{n,\ m}^{(s)}(a)\,e^{i(n\nu t + m\psi)}\qquad(22.12)$$

$$(s = 1,\ 2,\ \ldots,\ N),$$

в которых коэффициенты $k_{n,\ m}^{(s)}(a)$ подлежат определению.

Подставляя значения $u_s^{(1)}(a,\ \nu t,\ \psi)$ $(s = 1,\ 2,\ \ldots,\ N)$ (22.12) в уравнения (22.11) и приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках, получаем для определения коэффициентов $k_{n,\ m}^{(s)}(a)$ $(s = 1,\ 2,\ \ldots,\ N)$

систему алгебраических уравнений:

$$\sum_{s=1}^{N}\{a_{rs}[-\omega_1^2 m - 2\nu\omega_1 mn - \nu^2 n^2] + c_{rs}\}\, k_{n,m}^{(s)}(a) = Q_{r0}^{(1)}(a) \tag{22.13}$$

$$(r = 1, 2, \ldots, N),$$

для решения которой воспользуемся нормальными координатами.

Будем искать выражение для $k_{n,m}^{(s)}(a)$ в виде суммы

$$k_{n,m}^{(s)}(a) = \sum_{k=1}^{N} c_k \varphi_s^{(k)} \qquad (s = 1, 2, \ldots, N), \tag{22.14}$$

где $\varphi_s^{(k)}$ — нормальные функции, а c_k — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Подставляя (22.14) в систему уравнений (22.13) и учитывая, что $\varphi_s^{(k)}$ $(s, k = 1, 2, \ldots, N)$ удовлетворяют системе однородных алгебраических уравнений

$$\sum_{s=1}^{N}[-a_{rs}\omega_k^2 + c_{rs}]\,\varphi_s^{(k)} = 0 \tag{22.15}$$

$$(r = 1, 2, \ldots, N),$$

получим:

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N} a_{sr}\,[\omega_k^2 - (\omega_1 m + n\nu)^2]\, c_k \varphi_s^{(k)} = Q_{r0}^{(1)}(a)$$

$$(r = 1, 2, \ldots, N).$$

Умножая эти уравнения соответственно на $\varphi_1^{(k_1)}, \varphi_2^{(k_1)}, \ldots, \varphi_N^{(k_1)}$ и суммируя результат по r, находим:

$$\sum_{k=1}^{N} c_k\,[\omega_k^2 - (\omega_1 m + n\nu)^2] \sum_{s=1}^{N}\sum_{r=1}^{N} a_{sr}\varphi_s^{(k)}\varphi_r^{(k_1)} = \sum_{r=1}^{N} Q_{r0}^{(1)}(a)\,\varphi_r^{(k_1)}. \tag{22.16}$$

Принимая во внимание ортогональность нормальных функций (выражения (21.9)) и обозначение (21.14), находим:

$$c_k = \frac{\sum\limits_{r=1}^{N} Q_{r0}^{(1)}(a)\,\varphi_r^{(k)}}{m_k\,[\omega_k^2 - (\omega_1 m + \nu n)^2]} \qquad (k = 1, 2, \ldots, N). \tag{22.17}$$

Подставляя значения c_k $(k = 1, 2, \ldots, N)$ (22.17) в (22.14) и результат подстановки в (22.12), получаем выражения для $u_s^{(1)}(a, \nu t, \psi)$ $(s = 1, 2, \ldots, N)$:

$$\varepsilon u_s^{(1)}(a, \nu t, \psi) = \sum_{n,m}\sum_{k=1}^{N}\varphi_s^{(k)}\,\frac{\sum\limits_{r=1}^{N}\varphi_r^{(k)} Q_{r0}^{(1)}(a)\, e^{i(n\nu t + m\psi)}}{m_k\,[\omega_k^2 - (n\nu + m\omega_1)^2]} \tag{22.18}$$

$$(s = 1, 2, \ldots, N).$$

Для «регуляризации» выражений (22.18) заметим, что их правые части могут сделаться неограниченными, если n и m таковы, что

$$\pm\,\omega_1 = n\nu + m\omega_1,$$

а последнее равенство ввиду того, что мы рассматриваем нерезонансный случай, эквивалентно равенству

$$n^2+(m^2-1)^2=0, \quad \text{или} \quad n=0, \quad m=\pm 1.$$

Таким образом, для «регуляризации» выражений (22.18) необходимо, чтобы при $k=1$ отсутствовали члены с гармониками $e^{\pm i\psi}$, а они как раз и будут отсутствовать благодаря нашему выбору функции (22.7).

Итак, для $u_s^{(1)}(a_1, \nu t, \psi)$ $(s=1, 2, \ldots, N)$ получаем выражения:

$$u_s^{(1)}(a, \nu t, \psi)=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{\substack{n,\, m\\ (n\neq 0,\, m\neq\pm 1 \text{ для } k=1)}}\sum_{k=1}^{N}\varphi_s^{(k)}\frac{\left\{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sum\limits_{r=1}^{N}\varphi_r^{(k)}Q_{r0}^{(1)}(a, \theta, \psi)\, e^{-i(n\theta+m\psi)}\, d\theta\, d\psi\right\} e^{i(n\nu t+m\psi)}}{m_k\left[\omega_k^2-(n\nu+m\omega_1)^2\right]} \tag{22.19}$$

$$(s=1, 2, \ldots, N).$$

Для определения функций $A_2(a)$ и $B_2(a)$ можем либо воспользоваться непосредственно формулами § 13 (формулы (13.37)), либо составить уравнения гармонического баланса, выражающие равенство коэффициентов при первой гармонике угла ψ в левой и правой частях уравнения (22.6) после подстановки в него значений $x=a\cos\psi$, $q_s=\varphi_s^{(1)}a\cos\psi+\varepsilon u_s^{(1)}(a, \nu t, \psi)$ $(s=1, 2, \ldots, N)$ с учетом, разумеется, того, что a и ψ определяются уравнениями (22.5), причем все вычисления следует вести с точностью до величин второго порядка малости включительно.

После элементарных выкладок получаем для $A_2(a)$ и $B_2(a)$ следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} A_2(a) &= -\frac{1}{2\omega_1 m_1}\left[\frac{dB_1(a)}{da}aA_1(a)+2A_1(a)B_1(a)\right]-\\ &\quad -\frac{1}{4\pi^2\omega_1 m_1}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sum_{r=1}^{N}\varphi_r^{(1)}\overline{Q}_r^{(2)}(a, \theta, \psi)\sin\psi\, d\theta\, d\psi,\\ B_2(a) &= \frac{1}{2\omega_1 m_1 a}\left[\frac{dA_1(a)}{da}A_1(a)-aB_1^2(a)\right]-\\ &\quad -\frac{1}{4\pi^2\omega_1 m_1 a}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sum_{r=1}^{N}\varphi_r^{(1)}\overline{Q}_r^{(2)}(a, \theta, \psi)\cos\psi\, d\theta\, d\psi, \end{aligned}\right\} \tag{22.20}$$

где обозначено:

$$\begin{aligned} \overline{Q}_r^{(2)}(a, \theta, \psi) &= Q_r^{(2)}(\theta, \varphi_1^{(1)}a\cos\psi, \ldots, \varphi_N^{(1)}a\cos\psi, -\\ &\quad -\varphi_1^{(1)}a\omega_1\sin\psi, \ldots, -\varphi_N^{(1)}a\omega_1\sin\psi)+\sum_{s=1}^{N}\left\{\frac{\partial Q_r^{(1)}}{\partial q_s}u_s^{(1)}(a, \theta, \psi)+\right.\\ &\quad \left.\left.+\frac{\partial Q_r^{(1)}}{\partial \dot q_s}\left[\varphi_s^{(1)}A_1(a)\cos\psi-\varphi_s^{(1)}aB_1(a)\sin\psi+\frac{\partial u_s^{(1)}}{\partial\psi}\omega_1+\frac{\partial u_s^{(1)}}{\partial t}\right]\right\}\right|_{\substack{q_s=\varphi_s^{(1)}a\cos\psi\\ \dot q_s=-\varphi_s^{(1)}a\omega_1\sin\Psi}} \end{aligned} \tag{22.21}$$

$$(r=1, 2, \ldots, N).$$

Перейдем к рассмотрению резонансного случая.

Ради простоты изложения вместо общего случая, когда

$$\omega_1\approx\frac{p}{q}\nu,$$

где p и q — некоторые взаимно простые числа, рассмотрим случай, называемый главным резонансным, когда $p = q = 1$. При этом заметим, что все рассуждения могут быть перенесены и на общий случай без существенных изменений.

Как уже нами выше указывалось, при рассмотрении резонансного случая, в зависимости от характера стоящей перед нами задачи, могут возникнуть два подхода к ее решению — исследование непосредственно резонансной области и изучение, помимо резонансной области, также подходов к ней из нерезонансной области.

Здесь мы рассмотрим второй, как наиболее общий случай, причем для нахождения соответствующих асимптотических формул опять воспользуемся результатами, полученными для системы с одной степенью свободы, в § 14.

Исходя из рассуждений, приведенных на стр. 176, приближенные решения будем искать в виде рядов

$$q_s = \varphi_s^{(1)} a \cos(\nu t + \vartheta) + \varepsilon u_s^{(1)}(a, \nu t, \psi) + \varepsilon^2 u_s^{(2)}(a, \nu t, \psi) + \ldots \qquad (22.22)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, N),$$

где $\psi = \nu t + \vartheta$, $u_s^{(1)}(a, \theta, \psi)$, $u_s^{(2)}(a, \theta, \psi)$, ... $(s = 1, 2, \ldots, N)$ периодические функции по обеим угловым переменным θ и ψ с периодом 2π, а a и ϑ должны быть определены как функции времени из системы дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a, \vartheta) + \varepsilon^2 A_2(a, \vartheta) + \ldots, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_1 - \nu + \varepsilon B_1(a, \vartheta) + \varepsilon^2 B_2(a, \vartheta) + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (22.23)$$

Для построения первого и второго приближения нам необходимо найти выражения для $A_1(a, \vartheta)$, $B_1(a, \vartheta)$, $A_2(a, \vartheta)$, $B_2(a, \vartheta)$ и $u_s^{(1)}(a, \nu t, \psi)$ $(s = 1, 2, \ldots, N)$.

Для определения $A_1(a, \vartheta)$ и $B_1(a, \vartheta)$ сразу же составляет систему, аналогичную уравнениям (14.34).

Для этого в уравнениях (14.34) необходимо заменить ω на ω_1, учесть наличие обобщенной массы m_1 и вместо $f_0(a, \theta, \psi)$ подставить $\sum_{r=1}^{N} \varphi_r^{(1)} Q_{r0}^{(1)}(a, \theta, \psi)$, где

$$Q_{r0}^{(1)}(a, \theta, \psi) = Q_r^{(1)}(\theta, \varphi_1^{(1)} a \cos\psi, \ldots, -\varphi_1^{(1)} a\omega_1 \sin\psi, \ldots).$$

В результате получаем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} &(\omega_1 - \nu)\frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} - 2a\omega_1 B_1 = \\ &\quad = \frac{1}{2\pi^2 m_1} \sum_{\sigma} e^{i\sigma q\vartheta} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^{N} \varphi_r^{(1)} Q_{r0}^{(1)}(a, \theta, \psi) e^{-i\sigma q\vartheta'} \cos\psi \, d\theta \, d\psi, \\ &(\omega_1 - \nu) a \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta} + 2\omega_1 A_1 = \\ &\quad = -\frac{1}{2\pi^2 m_1} \sum_{\sigma} e^{i\sigma q\vartheta} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^{N} \varphi_r^{(1)} Q_{r0}^{(1)}(a, \theta, \psi) e^{-i\sigma q\vartheta'} \sin\psi \, d\theta \, d\psi \\ &\qquad (\vartheta' = \psi - \theta), \end{aligned}\right\} \qquad (22.24)$$

из которой не представляет затруднений найти частные периодические по ϑ значения $A_1(a, \vartheta)$, $B_1(a, \vartheta)$, как об этом уже упоминалось выше.

Для построения асимптотических формул во втором приближении определяем $u_s^{(1)}(a, \nu t, \nu t+\vartheta)$ $(s=1, 2, \ldots, N)$ как вынужденные «регуляризированные» колебания, возбуждаемые в невозмущенной системе внешними возмущающими силами, взятыми в режиме синусоидальных колебаний, причем при «регуляризации» в отличие от нерезонансного случая в соответствующих суммах должны отсутствовать члены, для которых могут выполняться соотношения между индексами n, m типа $nq+(m\pm 1)p=0$ (для слагаемых, в знаменателе которых присутствует ω_1).

Таким образом, «регуляризированное» выражение для $u_s^{(1)}(a, \nu t, \nu t+\vartheta)$ $(s=1, 2, \ldots, N)$ будет иметь вид

$$u_s^{(1)}(a, \nu t, \nu t+\vartheta)=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{\substack{n,\, m \\ \left(\substack{nq+(m\pm 1)p\neq 0 \\ \text{для } k=1}\right)}}\sum_{k=1}^{N}\varphi_s^{(k)}\frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sum\limits_{r=1}^{N}\varphi_r^{(1)}Q_{r0}^{(1)}(a, \theta, \psi)\, e^{-i(n\theta+m\psi)}\, d\theta\, d\psi}{m_k\left[\omega_k^2-(\omega_1 m+\nu n)^2\right]}\times$$

$$\times e^{i[n\nu t+m(\nu t+\vartheta)]} \quad (s=1, 2, \ldots, N). \qquad (22.25)$$

Для составления уравнений, определяющих $A_2(a, \vartheta)$ и $B_2(a, \vartheta)$, воспользуемся соответствующими формулами, выведенными в § 14 для системы с одной степенью свободы, либо уравнениями гармонического баланса. Вывод этих уравнений в явном виде предоставляем читателю.

Остановимся еще на рассмотрении частного случая системы (22.2), часто встречающегося при решении практически важных задач, когда возмущающие обобщенные силы имеют вид:

$$Q_r(\theta, q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N, \varepsilon)=$$
$$=\varepsilon Q_r(q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N, \varepsilon)+\varepsilon E_r\sin\theta \qquad (22.26)$$
$$(r=1, 2, \ldots, N),$$

и, следовательно, колебания описываются системой дифференциальных уравнений:

$$\sum_{s=1}^{N}(a_{rs}\ddot{q}_s+c_{rs}q_r)=\varepsilon Q_r(q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N, \varepsilon)+\varepsilon E_r\sin\theta \qquad (22.27)$$
$$(r=1, 2, \ldots, N).$$

Будем рассматривать основной резонанс $(p=1, q=1)$, причем для упрощения остановимся на исследовании только первого приближения.

Согласно общему методу, изложенному выше, частным решением системы (22.27), соответствующим одночастотным колебаниям, близким к первому нормальному, в первом приближении будет:

$$q_s=\varphi_s^{(1)}a\cos(\theta+\vartheta) \qquad (22.28)$$
$$(s=1, 2, \ldots, N),$$

где функции времени a и ϑ должны быть определены из системы уравнений первого приближения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{1}{2\pi m_1\omega_1}\int_0^{2\pi}\sum_{r=1}^{N}\varepsilon Q_{r0}^{(1)}(a,\ \psi)\varphi_r^{(1)}\sin\psi\,d\psi - \\ &\qquad -\frac{\sum\limits_{r=1}^{N}\varepsilon E_r\varphi_r^{(1)}}{m_1(\omega_1+\nu)}\cos\vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_1-\nu-\frac{1}{2\pi m_1\omega_1 a}\int_0^{2\pi}\sum_{r=1}^{N}\varepsilon Q_{r0}^{(1)}(a,\ \psi)\varphi_r^{(1)}\cos\psi\,d\psi + \\ &\qquad +\frac{\sum\limits_{r=1}^{N}\varepsilon E_r\varphi_r^{(1)}}{m_1 a(\omega_1+\nu)}\sin\vartheta, \end{aligned}\right\} \tag{22.29}$$

в которой, как и выше, ω_1 — собственная частота невозмущенной системы, $\varphi_r^{(1)}$ $(r=1,\ 2,\ \ldots,\ N)$ — нетривиальные решения системы однородных алгебраических уравнений (22.15), а

$$Q_{r0}^{(1)}(a,\ \psi)=Q_{r0}^{(1)}(\varphi_1^{(1)}a\cos\psi,\ \ldots,\ -\varphi_1^{(1)}a\omega_1\sin\psi,\ \ldots)$$
$$(\theta+\vartheta=\psi)\quad (r=1,\ 2,\ \ldots,\ N).$$

Упростим несколько систему (22.29). Для этого по аналогии с § 15 введем обозначения:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_e^{(1)}(a) &= \frac{1}{\pi a\omega_1}\int_0^{2\pi}\sum_{r=1}^{N}\varepsilon Q_{r0}^{(1)}(a,\ \psi)\varphi_r^{(1)}\sin\psi\,d\psi, \\ \omega_e^{(1)}(a) &= \omega_1-\frac{1}{2\pi a m_1\omega_1}\int_0^{2\pi}\sum_{r=1}^{N}\varepsilon Q_{r0}^{(1)}(a,\ \psi)\varphi_r^{(1)}\cos\psi,\,d\psi, \\ E^{(1)} &= \sum_{r=1}^{N}\varepsilon E_r\varphi_r^{(1)}. \end{aligned}\right\} \tag{22.30}$$

Тогда уравнения первого приближения (22.29) могут быть записаны в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\delta_e^{(1)}(a)\,a-\frac{E^{(1)}}{m_1(\omega_1+\nu)}\cos\vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_e^{(1)}(a)-\nu+\frac{E^{(1)}}{m_1 a(\omega_1+\nu)}\sin\vartheta, \end{aligned}\right\} \tag{22.31}$$

где $\delta_e^{(1)}(a)=\dfrac{\lambda_e^{(1)}(a)}{2m_1}$.

Введенные здесь параметры $\lambda_e^{(1)}(a)$ и $\omega_e^{(1)}(a)$ представляют собой соответственно эквивалентный коэффициент затухания и полную эквивалентную собственную частоту колебательной системы, описываемой уравнением вида

$$m_1\left(\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_1^2x\right)=\sum_{r=1}^{N}\varepsilon Q_{r0}^{(1)}\varphi_r^{(1)},$$

аналогия с которым уже проводилась нами выше.

Таким образом, и в этом частном случае уравнения первого приближения (можно показать то же самое и для уравнений высшего приближения), составленные при исследовании резонансного случая в системах с N степенями свободы, будут такими же, как и для системы с одной степенью свободы (с массой m_1 и собственной частотой ω_1), находящейся под воздействием возмущающей силы $\sum_{r=1}^{N} \varepsilon Q_{r0}^{(1)} \varphi_r^{(1)}$ (обобщенной силы, действующей на первую нормальную координату) и возмущающей синусоидальной силы с амплитудой $\sum_{r=1}^{N} \varepsilon E_r \varphi_r^{(1)}$ (см. формулу (15.7)).

Остановимся на исследовании стационарных режимов колебаний с постоянными амплитудами и фазами.

Приравнивая правые части уравнений первого приближения (22.25) нулю, получим для определения стационарных значений амплитуды a и фазы ϑ систему

$$\left.\begin{aligned} \delta_e^{(1)}(a)\, a + \frac{E^{(1)}}{m_1(\omega_1+\nu)} \cos\vartheta = 0, \\ \omega_e^{(1)}(a) - \nu + \frac{E^{(1)}}{m_1 a(\omega_1+\nu)} \sin\vartheta = 0. \end{aligned}\right\} \tag{22.32}$$

Исключая из этих уравнений ϑ, находим с точностью до величин второго порядка малости зависимость между амплитудой a и частотой внешних сил ν:

$$m_1^2 a^2 \left[\left(\omega_e^{(1)^2}(a) - \nu^2\right)^2 + 4\delta_e^{(1)^2}(a)\,\nu^2\right] = E^{(1)^2}. \tag{22.33}$$

Полученное уравнение совпадает по своей структуре с уравнением (15.10), составленным для нелинейной системы с одной степенью свободы, и потому в нашем случае для составления уравнения (22.33) мы можем воспользоваться правилом, сформулированным в § 15. В нашем случае это правило будет заключаться в следующем.

Пусть колебания некоторой системы, имеющей N степеней свободы, описываются системой нелинейных дифференциальных уравнений типа (22.27), и пусть частота внешних сил ν близка к основной собственной частоте невозмущенной системы ω_1. Требуется найти значения амплитуды и фазы стационарных одночастотных колебаний. Для этого рассматриваем колебательную систему с одной степенью свободы, с массой m_1 и собственной частотой ω_1, находящуюся под воздействием силы $\sum_{r=1}^{N} \varepsilon Q_r^{(1)} \varphi_r^{(1)}$ (обобщенной силы, действующей на первую нормальную координату). Линеаризируя эту систему, определяем эквивалентный декремент затухания $\delta_e^{(1)}(a)$ и эквивалентную частоту собственных колебаний $\omega_e^{(1)}(a)$ как функции амплитуды и найденные значения подставляем в классические соотношения линейной теории вынужденных колебаний (22.32) и (22.33), причем амплитуда вынуждающей синусоидальной силы находится по формуле $E^{(1)} = \sum_{r=1}^{N} \varepsilon E_r^{(1)} \varphi_r^{(1)}$, т. е. опять-таки она является обобщенной силой, действующей на первую нормальную координату.

Для определения стационарных значений фазы колебания из соотношений (22.32) получаем формулу

$$\vartheta = \operatorname{arctg} \frac{\omega_e^{(1)}(a) - \nu}{2\nu\delta_e^{(1)}(a)}. \tag{22.34}$$

При помощи соотношения (22.33) мы можем построить резонансную кривую, характеризующую резонансные колебания, возникающие в нашей системе со многими степенями свободы в результате воздействия внешней синусоидальной силы, частота которой близка к одной из собственных частот системы.

Для определения устойчивых и неустойчивых участков этой резонансной кривой мы получаем правила, аналогичные правилам, приведенным в § 15.

Так, условиями устойчивости (с точностью до величин первого порядка малости включительно) будут неравенства

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} > 0, \quad \text{если} \quad \omega_e^{(1)}(a) > \nu, \\ \frac{da}{dt} < 0, \quad \text{если} \quad \omega_e^{(1)}(a) < \nu. \end{aligned}\right\} \tag{22.35}$$

В качестве примера применения полученных результатов остановимся на исследовании вынужденных колебаний в конкретной механической системе со многими степенями свободы.

Рассмотрим приведенную систему коленчатого вала, изображенную на рис. 118, где на участке между первой и второй массами имеется нелинейная связь. Предположим для упрощения, что на среднюю массу действует периодический крутящий момент типа

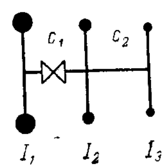

Рис. 118.

$$M = E \sin\theta,$$

где $E = \text{const}$, $\frac{d\theta}{dt} = \nu$ — частота момента, пропорциональная числу оборотов двигателя, а моменты, действующие на массы, расположенные на концах приведенного вала, равны нулю.

Обозначим моменты инерции масс двигателя через I_1, I_2, I_3, а углы отклонения от равномерного вращения через φ_1, φ_2, φ_3.

Тогда жесткость участка вала между первой и второй массами зависит от характеристики нелинейной муфты. Жесткость участка вала между второй и третьей массами обозначим через c_2. Упругий момент, зависящий от разности углов поворота прилегающих масс, для первого участка будет:

$$F(\varphi_2 - \varphi_1) = c_1'(\varphi_2 - \varphi_1) + \varepsilon f(\varphi_2 - \varphi_1),$$

где функция $\varepsilon f(\varphi_2 - \varphi_1)$ определяется конкретно заданной характеристикой нелинейной муфты, а c_1' — некоторая постоянная; для второго участка упругий момент будет:

$$c_2(\varphi_3 - \varphi_2).$$

Предположим также, что на втором участке вала учитывается внутреннее трение, которое будем считать пропорциональным скорости (с коэффициентом пропорциональности α).

Тогда уравнения крутильных колебаний рассматриваемой системы будут:

$$\left.\begin{aligned}
&I_1\ddot{\varphi}_1 - F(\varphi_2-\varphi_1) = 0,\\
&I_2\ddot{\varphi}_2 + F(\varphi_2-\varphi_1) - c_2(\varphi_3-\varphi_1) = M + \alpha(\dot{\varphi}_3-\dot{\varphi}_2),\\
&I_3\ddot{\varphi}_3 + c_2(\varphi_3-\varphi_2) = -\alpha(\dot{\varphi}_3-\dot{\varphi}_2).
\end{aligned}\right\} \qquad (22.36)$$

Вводя обозначения:

$$\varphi_2-\varphi_1=q_1, \quad \varphi_3-\varphi_2=q_2,$$

уравнения (22.36) можно привести к следующей системе двух уравнений второго порядка (одну степень свободы — вращение, мы исключаем из рассмотрения):

$$\left.\begin{aligned}
&I_2\ddot{q}_1 + c_1'\left(1+\frac{I_2}{I_1}\right)q_1 - c_2q_2 = -\left(1+\frac{I_2}{I_1}\right)\varepsilon f(q_1) + \alpha\dot{q}_2 + E\sin\theta,\\
&I_2\ddot{q}_2 - c_1'q_1 + c_2\left(1+\frac{I_2}{I_3}\right)q_2 = \varepsilon f(q_1) - \alpha\left(1+\frac{I_2}{I_3}\right)\dot{q}_2 - E\sin\theta.
\end{aligned}\right\} \qquad (22.37)$$

Допустим, что нелинейность, коэффициент трения и амплитуда внешнего момента малы, а также, что для системы (22.37) выполняются условия, приведенные в § 21 (стр. 261).

Предположим также, что частота внешней синусоидальной силы ν близка к первой собственной частоте ω_1; в этом случае, естественно, в системе будут возбуждаться колебания, соответствующие первому нормальному колебанию с частотой, близкой к ω_1, в то время как колебания с частотой ω_2, находясь вне резонанса, из-за наличия трения будут затухать.

Тогда согласно (22.28) частным решением системы (22.37), соответствующим одночастотному режиму, близкому к первому нормальному колебанию, будет:

$$\left.\begin{aligned}
q_1 &= \varphi_1^{(1)}a\cos(\theta+\vartheta),\\
q_2 &= \varphi_2^{(1)}a\cos(\theta+\vartheta),
\end{aligned}\right\} \qquad (22.38)$$

где $\varphi_1^{(1)}$ и $\varphi_2^{(1)}$ — фундаментальные функции, являющиеся нетривиальными решениями системы однородных алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\left[c_1'\left(1+\frac{I_2}{I_1}\right) - \omega_1^2I_2\right]\varphi_1^{(1)} - c_2\varphi_2^{(1)} = 0,\\
&-c_1'\varphi_1^{(1)} + \left[c_2\left(1+\frac{I_2}{I_3}\right) - \omega_1^2I_2\right]\varphi_2^{(1)} = 0;
\end{aligned}\right\} \qquad (22.39)$$

ω_1 — корень частотного уравнения «невозмущенной» системы:

$$\begin{vmatrix}
c_1'\left(1+\frac{I_2}{I_1}\right) - \omega^2I_2 & -c_2\\
-c_1' & c_2\left(1+\frac{I_2}{I_3}\right) - \omega^2I_2
\end{vmatrix} = 0, \qquad (22.40)$$

а a и ϑ должны быть определены или из уравнений первого приближения, или для стационарного режима по формулам типа (22.33) и (22.34), которые мы сейчас и составим, воспользовавшись схемой, приведенной на стр. 278.

Находим:

$$m_1 = I_2 (\varphi_1^{(1)^2} + \varphi_2^{(1)^2}), \tag{22.41}$$

$$\delta_e^{(1)}(a) = \frac{a}{m_1} \left[\left(\frac{I_2}{I_3} + 1 \right) \varphi_2^{(1)^2} - \varphi_1^{(1)} \varphi_2^{(1)} \right], \tag{22.42}$$

$$\omega_e^{(1)}(a) = \omega_1 - \frac{\varepsilon \left[\varphi_2^{(1)} - \left(1 - \frac{I_2}{I_1} \right) \varphi_1^{(1)} \right]}{2\pi m_1 \omega_1 a} \int_0^{2\pi} f(\varphi_1^{(1)} a \cos\psi) \cos\psi \, d\psi, \tag{22.43}$$

$$E^{(1)} = E(\varphi_1^{(1)} - \varphi_2^{(1)}). \tag{22.44}$$

Подставляя эти выражения в формулы (22.39), получаем зависимость, при помощи которой легко можно построить резонансную кривую.

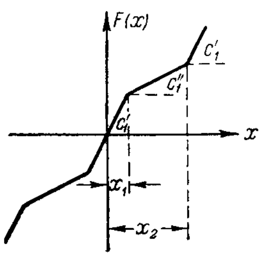

Рис. 119.

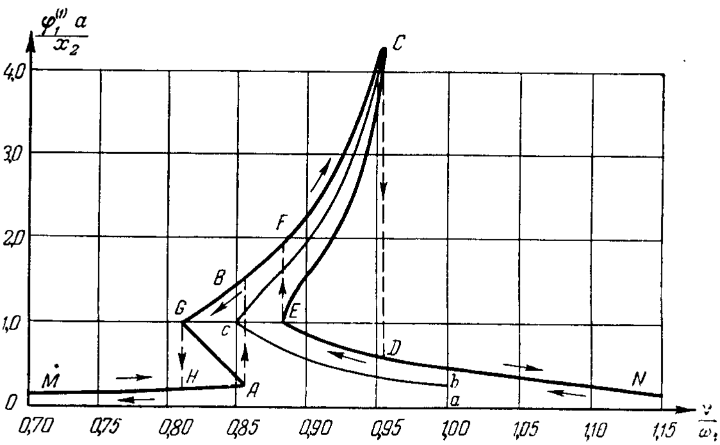

Рис. 120.

Так, например, в случае, если характеристика нелинейной упругой муфты имеет вид, представленный на рис. 119, то резонансная кривая будет такая, как на рис. 120.

§ 23. Исследование одночастотных колебаний в нелинейных системах со многими степенями свободы при наличии медленно меняющихся параметров

Как уже указывалось выше, во многих актуальных проблемах вибротехники мы встречаемся с колебательными системами со многими степенями свободы, в которых ряд параметров (эффективные собственные и внешние частоты, амплитуды вынуждающих сил и т. д.) медленно изменяются, причем медленно в указанном выше смысле — по сравнению с периодом собственных колебаний.

В настоящем параграфе мы остановимся на построении асимптотических разложений для дифференциальных уравнений, описывающих колебания в таких системах, в предположении, что в системе совершается одночастотный колебательный процесс.

Как и в предыдущих параграфах, систему дифференциальных уравнений будем рассматривать в таком виде, когда невозмущенная система соответствует обычной схеме теории малых колебаний.