Находим:

$$m_1 = I_2 (\varphi_1^{(1)^2} + \varphi_2^{(1)^2}), \tag{22.41}$$

$$\delta_e^{(1)}(a) = \frac{a}{m_1}\left[\left(\frac{I_2}{I_3}+1\right)\varphi_2^{(1)^2} - \varphi_1^{(1)}\varphi_2^{(1)}\right], \tag{22.42}$$

$$\omega_e^{(1)}(a) = \omega_1 - \frac{\varepsilon\left[\varphi_2^{(1)} - \left(1-\frac{I_2}{I_1}\right)\varphi_1^{(1)}\right]}{2\pi m_1 \omega_1 a}\int_0^{2\pi} f(\varphi_1^{(1)} a\cos\psi)\cos\psi\, d\psi, \tag{22.43}$$

$$E^{(1)} = E(\varphi_1^{(1)} - \varphi_2^{(1)}). \tag{22.44}$$

Подставляя эти выражения в формулы (22.39), получаем зависимость, при помощи которой легко можно построить резонансную кривую.

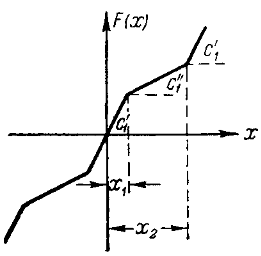

Рис. 119.

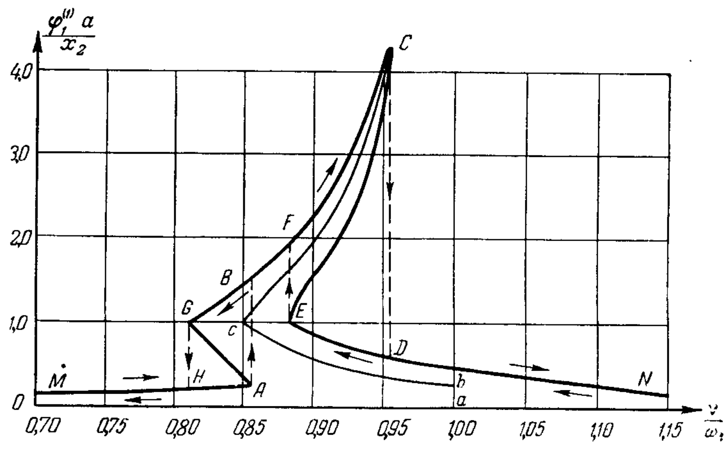

Рис. 120.

Так, например, в случае, если характеристика нелинейной упругой муфты имеет вид, представленный на рис. 119, то резонансная кривая будет такая, как на рис. 120.

§ 23. Исследование одночастотных колебаний в нелинейных системах со многими степенями свободы при наличии медленно меняющихся параметров

Как уже указывалось выше, во многих актуальных проблемах вибротехники мы встречаемся с колебательными системами со многими степенями свободы, в которых ряд параметров (эффективные собственные и внешние частоты, амплитуды вынуждающих сил и т. д.) медленно изменяются, причем медленно в указанном выше смысле — по сравнению с периодом собственных колебаний.

В настоящем параграфе мы остановимся на построении асимптотических разложений для дифференциальных уравнений, описывающих колебания в таких системах, в предположении, что в системе совершается одночастотный колебательный процесс.

Как и в предыдущих параграфах, систему дифференциальных уравнений будем рассматривать в таком виде, когда невозмущенная система соответствует обычной схеме теории малых колебаний.

Итак, рассмотрим колебательную систему с N степенями свободы, кинетическая и потенциальная энергия которой могут быть представлены в виде

$$T=\frac{1}{2}\sum_{r,\,s=1}^{N} a_{rs}(\tau)\dot{q}_r\dot{q}_s,\quad V=\frac{1}{2}\sum_{r,\,s=1}^{N} c_{rs}(\tau)q_rq_s, \tag{23.1}$$

где $q_1, q_2, \ldots, q_N$ — обобщенные координаты, $\tau=\varepsilon t$ — «медленное» время, ε, как и всегда, — малый положительный параметр, $a_{rs}(\tau)=a_{sr}(\tau)$, $c_{rs}(\tau)=c_{sr}(\tau)$ $(s,\ r=1,\ 2,\ \ldots,\ N)$ — некоторые функции «медленного» времени τ, обладающие производными любого порядка при всех конечных значениях τ.

Предположим также, что на конечном интервале $0\leqslant t\leqslant T$, где $T=\frac{L}{\varepsilon}$, причем L может быть сделано сколь угодно большим для сколь угодно малых ε, квадратичные формулы T и V определенно положительны.

Пусть исследуемая колебательная система находится под воздействием малого возмущения, определяемого обобщенными силами

$$\begin{gathered}Q_r(\tau,\ \theta,\ q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N,\ \varepsilon)=\varepsilon Q_r^{(1)}(\tau,\ \theta,\ q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N)+\\ +\varepsilon^2 Q_r^{(2)}(\tau,\ \theta,\ q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N)+\ldots \\ (r=1,\ 2,\ \ldots,\ N),\end{gathered} \tag{23.2}$$

периодическими по θ с периодом 2π и разлагающимися в конечные суммы Фурье, с коэффициентами, являющимися некоторыми полиномами по отношению к q_s, $\dot{q}_s$ $(s=1,\ 2,\ \ldots,\ N)$. Кроме того, будем полагать, что $\frac{d\theta}{dt}=\nu(\tau)$ и функции $\nu(\tau)$, $Q_r(\tau, \theta, q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N, \varepsilon)$ $(r=1, 2, \ldots, N)$ неограниченно дифференцируемы по τ на интервале $0\leqslant\tau\leqslant L$.

Тогда, согласно известным принципам механики, мы приходим к рассмотрению системы N нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\left\{\sum_{s=1}^{N} a_{rs}(\tau)\dot{q}_s\right\}+\sum_{s=1}^{N} c_{rs}(\tau)q_s=Q_r(\tau,\ \theta,\ q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1 \ldots, \dot{q}_N,\ \varepsilon)\\ (r=1,\ 2,\ \ldots,\ N).\end{gathered} \tag{23.3}$$

Одновременно с системой (23.3) рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\sum_{s=1}^{N} a_{rs}(\tau)\ddot{q}_s+\sum_{s=1}^{N} c_{rs}(\tau)q_s=0 \qquad (r=1,\ 2,\ \ldots,\ N), \tag{23.4}$$

для получения которой необходимо в (23.3) положить $\varepsilon=0$, а τ рассматривать не как εt, а как некоторый постоянный параметр.

В нашем случае вспомогательная система (23.4) играет такую же роль, как и система (23.3), и мы ее в дальнейшем будем называть системой дифференциальных уравнений невозмущенного движения или просто невозмущенной системой уравнений.

Как и в § 21, при помощи обычных методов можно для уравнений (23.4) построить решения, соответствующие нормальным колебаниям

$$q_s^{(k)}=\varphi_s^{(k)}(\tau)\,a\cos(\omega_k(\tau)t+\alpha_k) \qquad (s,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ N), \tag{23.5}$$

где $\omega_k(\tau)$ $(k=1, 2, \ldots, N)$ — собственные частоты, определяемые уравнением

$$D\,\|-a_{rs}(\tau)\,\omega^2+c_{rs}(\tau)\,\|=0, \tag{23.6}$$

а $\varphi_s^{(k)}(\tau)\,(s,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ N)$ — нормальные функции, являющиеся нетривиальными решениями систем однородных алгебраических уравнений

$$\sum_{s=1}^{N}\{-a_{rs}(\tau)\,\omega_k^2(\tau)+c_{rs}(\tau)\}\varphi_s^{(k)}(\tau)=0 \tag{23.7}$$

$$(r,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ N)$$

и обладающие свойством ортогональности

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{s,\,r=1}^{N} a_{rs}(\tau)\,\varphi_s^{(k)}(\tau)\,\varphi_r^{(l)}(\tau)=0,\\&\sum_{r,\,s=1}^{N} c_{rs}(\tau)\,\varphi_s^{(k)}(\tau)\,\varphi_r^{(l)}(\tau)=0\end{aligned}\right\} \tag{23.8}$$

$$(k\neq l).$$

Во всех последних формулах величины $\omega_k(\tau)$ и $\varphi_s^{(k)}(\tau)$ $(s,\ k=1,\ 2,\ \ldots$ $\ldots,\ N)$ зависят от τ как от параметра.

Если же теперь положить в (23.4) и (23.5) $\tau=\varepsilon t$, то функции (23.5) будут только приближенно (с точностью до величин порядка малости ε) удовлетворять уравнениям (23.4), представляя собой колебания с медленно меняющимися частотой и формой.

Прежде чем приступать к построению асимптотических решений системы (23.3), соответствующих одночастотным колебаниям, близким (при достаточно малом ε) к одному из нормальных невозмущенных колебаний (23.5) (для определенности опять будем полагать к первому нормальному колебанию), допустим, что для всех значений параметра τ, принадлежащих рассматриваемому интервалу $0\leqslant\tau\leqslant L$, выполняются условия, аналогичные условиям, приведенным в § 21 на стр. 261, т. е. допустим, что: 1) в невозмущенной системе, описываемой дифференциальными уравнениями (23.4), возможны незатухающие гармонические колебания с частотой $\omega_1(\tau)$, зависящие только от двух произвольных постоянных; 2) единственным решением системы (23.4), соответствующим равновесию, является тривиальное решение $q_1=q_2\ldots=q_N=0$; 3) частота $\omega_1(\tau)$, а также ни один из ее обертонов $2\omega_1(\tau)$, $3\omega_1(\tau)$, $\ldots$, $k\omega_1(\tau)$, $\ldots$ не равны собственным частотам $\omega_2(\tau)$, $\omega_3(\tau)$, $\ldots$, $\omega_N(\tau)$ невозмущенной системы.

При этих допущениях, естественно, согласно методике предыдущих параграфов и учитывая результаты, полученные в § 14, для системы с одной степенью свободы, искать решение возмущенных уравнений (23.3) в случае $p=q=1$, т. е. соответствующее основному резонансу (резонансу с собственной частотой $\omega_1(\tau)$) в виде асимптотических рядов *):

$$q_s=\varphi_s^{(1)}(\tau)\,a\cos(\theta+\vartheta)+\varepsilon u_s^{(1)}(\tau,\ a,\ \theta,\ \theta+\vartheta)+\varepsilon^2u_s^{(2)}(\tau,\ a,\ \theta,\ \theta+\vartheta)+\ldots\ ^{**}),$$

$$(s=1,\ 2,\ \ldots,\ N), \tag{23.9}$$

---

*) Как уже указывалось, все рассуждения могут быть без существенных изменений перенесены на общий случай $\omega_1(\tau)\approx\frac{p}{q}\nu(\tau)$, где p и q — некоторые взаимно простые числа.

**) В дальнейшем верхний индекс у q_s будем опускать, помня, что мы рассматриваем колебания, близкие к первому нормальному колебанию.

в которых $\tau=\varepsilon t$, функции $u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \theta+\vartheta)$, $u_s^{(2)}(\tau, a, \theta, \theta+\vartheta), \ldots$, $(s=1, 2, \ldots, N)$ — периодические по θ и $\theta+\vartheta$ с периодом 2π, а величины a и ϑ, как функции времени, определяются из системы дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(\tau, a, \vartheta)+\varepsilon^2 A_2(\tau, a, \vartheta)+\ldots, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_1(\tau)-\nu(\tau)+\varepsilon B_1(\tau, a, \vartheta)+\varepsilon^2 B_2(\tau, a, \vartheta)+\ldots, \end{aligned}\right\} \qquad (23.10)$$

где $\omega_1(\tau)$ — наименьший корень уравнения (23.6); $\varphi_s^{(1)}(\tau)$ $(s=1, 2, \ldots, N)$ — нетривиальные решения алгебраических уравнений (23.7).

Как и обычно, для решения нашей задачи необходимо найти такие выражения для функций:

$$u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \theta+\vartheta),\ u_s^{(2)}(\tau, a, \theta, \theta+\vartheta),\ \ldots \qquad (s=1, 2, \ldots, N) \qquad (23.11)$$

и

$$A_1(\tau, a, \vartheta),\ A_2(\tau, a, \vartheta),\ \ldots,\ B_1(\tau, a, \vartheta),\ B_2(\tau, a, \vartheta),\ \ldots, \qquad (23.12)$$

чтобы асимптотические ряды (23.9) после подстановки в них вместо a и ϑ функций времени, определяемых уравнениями (23.10), являлись решением системы (23.3).

Функции (23.11) и (23.12) можно найти, применив ту же методику, что и в предыдущих параграфах, т. е. воспользовавшись формальным правилом, полученным в § 20, и проводя аналогию с результатами, полученными для системы с одной степенью свободы. Однако при применении принципа гармонического баланса в рассматриваемом случае следует помнить, что у нас параметры не постоянны, а зависят от $\tau=\varepsilon t$, и поэтому при дифференцировании надо всегда помнить, что $\tau=\varepsilon t$, а при интегрировании τ считать постоянным параметром. Проведем подробные выкладки.

Дифференцируя ряды (23.9) с учетом того, что a и ϑ должны удовлетворять уравнениям (23.10), найдем выражения для q_s, $\dot{q}_s$ $(s=1, 2, \ldots, N)$. Подставим полученные выражения в систему уравнений (23.3), правые части которой тоже разложим в ряды по степеням ε. Приравнивая после этого коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим ряд систем:

$$\sum_{s=1}^{N}\left\{a_{rs}(\tau)\left[\omega_1^2(\tau)\frac{\partial^2 u_s^{(1)}}{\partial\psi^2}+2\nu(\tau)\omega_1(\tau)\frac{\partial^2 u_s^{(1)}}{\partial\theta\,\partial\psi}+\nu^2(\tau)\frac{\partial^2 u_s^{(1)}}{\partial\theta}\right]+\right.$$
$$\left.+c_{rs}(\tau)u_s^{(1)}\right\}=G_{r0}^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi) \qquad (23.13)$$
$$(r=1, 2, \ldots, N),$$

$$\sum_{s=1}^{N}\left\{a_{rs}(\tau)\left[\omega_1^2(\tau)\frac{\partial^2 u_s^{(2)}}{\partial\psi^2}+2\nu(\tau)\omega_1(\tau)\frac{\partial^2 u_s^{(2)}}{\partial\theta\,\partial\psi}+\nu^2(\tau)\frac{\partial^2 u_s^{(2)}}{\partial\theta^2}\right]+\right.$$
$$\left.+c_{rs}(\tau)u_s^{(2)}\right\}=G_{r0}^{(2)}(\tau, a, \theta, \psi) \qquad (23.14)$$
$$(r=1, 2, \ldots, N),$$

в которых введены обозначения:

$$G_{r0}^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi) = Q_{r0}^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi) -$$
$$-\sum_{s=1}^{N}\Big\{a_{rs}(\tau)\Big[\varphi_s^{(1)}(\tau)(\omega_1(\tau)-\nu(\tau))\frac{\partial A_1}{\partial\vartheta} - 2\varphi_s^{(1)}(\tau)\omega_1(\tau)aB_1\Big]\cos\psi -$$
$$-a_{rs}(\tau)\Big[\varphi_s^{(1)}(\tau)a(\omega_1(\tau)-\nu(\tau))\frac{\partial B_1}{\partial\vartheta} + 2\varphi_s^{(1)}(\tau)\omega_1(\tau)A_1\Big]\sin\psi -$$
$$-\Big[2\omega_1(\tau)\frac{d\varphi_s^{(1)}(\tau)}{d\tau}a_{rs}(\tau) + \frac{d\omega_1(\tau)}{d\tau}\varphi_s'(\tau)a_{rs}(\tau) + \omega_1(\tau)\varphi_s^{(1)}(\tau)\frac{da_{rs}(\tau)}{d\tau}\Big]a\sin\psi\Big\}. \tag{23.15}$$

$$G_{r0}^{(2)}(\tau, a, \theta, \psi) = \Phi_{r0}^{(2)}(\tau, a, \theta, \psi) - \sum_{s=1}^{N}\Big\{a_{rs}(\tau)\Big[\varphi_s^{(1)}(\tau)(\omega_1(\tau)-\nu(\tau))\frac{\partial A_2}{\partial\vartheta} -$$
$$-2\varphi_s^{(1)}(\tau)\omega_1(\tau)aB_2 + \varphi_s^{(1)}(\tau)\frac{\partial A_1}{\partial a}A_1 + \varphi_s^{(1)}(\tau)\frac{\partial A_1}{\partial\vartheta}B_1 + \varphi_s^{(1)}(\tau)\frac{\partial A_1}{\partial\tau} -$$
$$-\varphi_s^{(1)}(\tau)aB_1^2\Big]\cos\psi - a_{rs}(\tau)\Big[\varphi_s^{(1)}(\tau)(\omega_1(\tau)-\nu(\tau))a\frac{\partial B_2}{\partial\vartheta} + 2\varphi_s^{(1)}(\tau)\omega_1(\tau)A_2 +$$
$$+2\varphi_s^{(1)}(\tau)A_1B_1 + \varphi_s^{(1)}(\tau)a\frac{\partial B_1}{\partial a}A_1 + \varphi_s^{(1)}(\tau)a\frac{\partial B_1}{\partial\vartheta}B_1 + \varphi_s^{(1)}(\tau)\frac{\partial B_1}{\partial\tau}\Big]\sin\psi +$$
$$+\Big[a_{rs}(\tau)\frac{d^2\varphi_s^{(1)}(\tau)}{d\tau^2}a + \frac{d\varphi_s^{(1)}(\tau)}{d\tau}\frac{da_{rs}(\tau)}{d\tau}a + \varphi_s^{(1)}(\tau)\frac{da_{rs}(\tau)}{d\tau}A_1\Big]\cos\psi -$$
$$-\Big[2\frac{d\varphi_s^{(1)}(\tau)}{d\tau}a_{rs}(\tau)B_1 + \varphi_s^{(1)}(\tau)\frac{da_{rs}(\tau)}{d\tau}B_1\Big]a\sin\psi\Big\}, \tag{23.16}$$

. . . .

$$(r = 1, 2, \ldots, N),$$

где также обозначено:

$$Q_{r0}^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi) = Q_r^{(1)}(\tau, \theta, q_{10}, \ldots, q_{N0}, \dot q_{10}, \ldots, \dot q_{N0}),$$

$$\Phi_{r0}^{(2)}(\tau, a, \theta, \psi) = Q_{r0}^{(2)}(\tau, \theta, q_{10}, \ldots, q_{N0}, \dot q_{10}, \ldots, \dot q_{N0}) + \sum_{s=1}^{N}\Big[\frac{\partial Q_r^{(1)}}{\partial q_s}u_s^{(1)} +$$
$$+\frac{\partial Q_r^{(1)}}{\partial \dot q_s}\Big(\frac{d\varphi_s^{(1)}(\tau)}{d\tau}a\cos\psi + \varphi_s^{(1)}(\tau)\cos\psi A_1 - \varphi_s^{(1)}(\tau)a\sin\psi B_1\Big) + \frac{\partial u_s^{(1)}}{\partial\theta}\nu(\tau) +$$
$$+\frac{\partial u_s^{(1)}}{\partial\psi}\omega_1(\tau)\Big] - \sum_{s=1}^{N}\Big\{a_{rs}(\tau)\Big[2\frac{\partial^2 u_s^{(1)}}{\partial\tau\,\partial\psi}\omega_1(\tau) + 2\frac{\partial^2 u_s^{(1)}}{\partial\tau\,\partial\theta}\nu(\tau) + 2\frac{\partial^2 u_s^{(1)}}{\partial a\,\partial\theta}\nu(\tau)A_1 +$$
$$+2\frac{\partial^2 u_s^{(1)}}{\partial\theta\,\partial\psi}\nu(\tau)B_1 + 2\frac{\partial^2 u_s^{(1)}}{\partial\psi^2}\omega_1(\tau)B_1 + 2\frac{\partial^2 u_s^{(1)}}{\partial a\,\partial\psi}\omega_1(\tau)A_1 +$$
$$+\frac{\partial u_s^{(1)}}{\partial\psi}(\omega_1(\tau)-\nu(\tau))\frac{\partial B_1}{\partial\vartheta} + \frac{\partial u_s^{(1)}}{\partial a}(\omega_1(\tau)-\nu(\tau))\frac{\partial A_1}{\partial\vartheta} + \frac{\partial u_s^{(1)}}{\partial\theta}\frac{d\nu(\tau)}{d\tau} +$$
$$+\frac{\partial u_s^{(1)}}{\partial\psi}\frac{d\omega_1(\tau)}{d\tau}\Big] + \frac{da_{rs}(\tau)}{d\tau}\frac{\partial u_s^{(1)}}{\partial\theta}\nu(\tau) + \frac{da_{rs}(\tau)}{d\tau}\frac{\partial u_s^{(1)}}{\partial\psi}\omega_1(\tau)\Big\}$$
$$(r = 1, 2, \ldots, N),$$

. . . .

$$\psi = \theta + \vartheta, \quad q_{s0} = \varphi_s^{(1)}(\tau)a\cos\psi, \quad \dot q_{s0} = -\varphi_s^{(1)}(\tau)\omega_1(\tau)a\sin\psi$$
$$(s = 1, 2, \ldots, N).$$

Определим из системы (23.13) $u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi)$ $(s=1, 2, \ldots, N)$. Для этого правые части системы (23.13) как периодические функции θ и ψ целесообразно разложить в ряды Фурье:

$$G_{r0}^{(1)}(\tau,a,\theta,\psi)=\sum_{n,\, m} g_{n,\, m}^{(r,\, 1)}(\tau, a)\, e^{i(n\theta+m\psi)}, \tag{23.17}$$

где

$$g_{n,\, m}^{(r,\, 1)}(\tau, a)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} G_{r0}^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi)\, e^{-i(n\theta+m\psi)}\, d\theta\, d\psi \tag{23.18}$$

$$(r=1, 2, \ldots, N).$$

Искомые функции $u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi)$ $(s=1, 2, \ldots, N)$ также естественно представить в виде рядов

$$u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi)=\sum_{n,\, m} k_{n,\, m}^{(s)}(\tau, a)\, e^{i(n\theta+m\psi)} \tag{23.19}$$

$$(s=1, 2, \ldots, N).$$

Подставляя значения $u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi)$ $(s=1, 2, \ldots, N)$ и $G_{r0}^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi)$ $(r=1, 2, \ldots, N)$ (при подстановке считаем, что τ — параметр) в уравнения (23.13) и приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках, получаем для определения коэффициентов $k_{n,\, m}^{(s)}(\tau, a)$ систему алгебраических уравнений:

$$\sum_{s=1}^{N}\{a_{rs}(\tau)[-\omega_1^2(\tau)m^2-2\nu(\tau)\omega_1(\tau)mn-\nu^2(\tau)n^2]+c_{rs}(\tau)\}\, k_{n,\, m}^{(s)}(\tau, a)= \\ =g_{n,\, m}^{(r,\, 1)}(\tau, a) \tag{23.20}$$

$$(r=1, 2, \ldots, N).$$

Решая эту систему, как и в предыдущем параграфе, с помощью введения нормальных координат находим:

$$k_{n,\, m}^{(s)}(\tau, a)=\sum_{j=1}^{N}\varphi_s^{(j)}(\tau)\frac{\sum\limits_{r=1}^{N} g_{n,\, m}^{(r,\, 1)}(\tau, a)\,\varphi_r^{(j)}(\tau)}{m_j(\tau)\,[\omega_j^2(\tau)-(\omega_1(\tau)m+\nu(\tau)n)^2]} \tag{23.21}$$

и, следовательно, для $u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi)$ $(s=1, 2, \ldots, N)$ получаем следующие выражения:

$$u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi)=\sum_{n,\, m}\sum_{j=1}^{N}\varphi_s^{(j)}(\tau)\frac{\sum\limits_{r=1}^{N} g_{n,\, m}^{(r,\, 1)}(\tau, a)\,\varphi_r^{(j)}(\tau)\, e^{i(n\theta+m\psi)}}{m_j(\tau)\,[\omega_j^2(\tau)-(\omega_1(\tau)m+\nu(\tau)n)^2]} \tag{23.22}$$

$$(s=1, 2, \ldots, N).$$

Для того чтобы $u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi)$ $(s=1, 2, \ldots, N)$ были конечны, необходимо, чтобы для любых τ на интервале $0\leqslant\tau\leqslant L$ знаменатели в правых частях (23.22) не обращались в нуль. Однако знаменатели могут обратиться в нуль для тех n и m, для которых выполняются равенства:

$$m\omega_1(\tau)+n\nu(\tau)=\pm\,\omega_1(\tau) \tag{23.23}$$

или

$$n+m\pm 1=0, \tag{23.24}$$

так как ввиду того, что мы рассматриваем основной резонанс, при некотором $\tau\,(0\leqslant\tau\leqslant L)$ возможно $\omega_1(\tau)=\nu(\tau)$.

Поэтому условие конечности для $u_s^{(1)}(\tau,\ a,\ \theta,\ \psi)$ $(s=1,\ 2,\ \ldots,\ N)$ принимает следующий вид:

$$\sum_{\substack{r=1\\(n+m\pm 1=0)}}^{N} g_{n,\ m}^{(r,\ 1)}(\tau,\ a)\,\varphi_r^{(1)}(\tau)\,e^{i(n\theta+m\psi)}=0. \tag{23.25}$$

Принимая во внимание (23.18), (23.22) и (23.25), после ряда преобразований получаем «регуляризированное» выражение для $u_s^{(1)}(\tau,\ a,\ \theta,\ \psi)$ $(s=1,\ 2,\ \ldots,\ N)$:

$$u_s^{(1)}(\tau,\ a,\ \theta,\ \psi)=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{\substack{n,\ m\\ \left(\substack{nq+p(m\pm 1)\neq 0\\ \text{для } j=1}\right)}}\ \sum_{j=1}^{N}\varphi_s^{(j)}(\tau)\,\times$$

$$\times\frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sum\limits_{r=1}^{N}Q_{r0}^{(1)}(\tau,\ a,\ \theta,\ \psi)\,\varphi_r^{(j)}(\tau)\,e^{-i(n\theta+m\psi)}d\theta\,d\psi}{m_j(\tau)\,[\omega_j^2(\tau)-(\omega_1(\tau)\,m+\nu(\tau)\,n)^2]}\,e^{i(n\theta+m\psi)}-$$

$$-\,2\omega_1(\tau)\,a\sum_{j=2}^{N}\frac{\sum\limits_{r=1}^{N}\dfrac{d}{d\tau}\left[\dfrac{\partial T(\dot q)}{\partial\dot q_r}\right]_{\dot q_s=\varphi_s^{(1)}(\tau)}\varphi_r^{(j)}(\tau)}{m_j(\tau)\,[\omega_j^2(\tau)-\omega_1^2(\tau)]}\sin\psi \tag{23.26}$$

$$(s=1,\ 2,\ \ldots,\ N),$$

где

$$m_j(\tau)=\sum_{r,\ s=1}^{N}a_{rs}(\tau)\,\varphi_r^{(j)}(\tau)\,\varphi_s^{(j)}(\tau)=2T\,[\dot\varphi^{(j)}(\tau)]$$

и, следовательно,

$$\left[\frac{\partial T(\dot q)}{\partial\dot q_r}\right]_{\dot q_s=\varphi_s^{(1)}(\tau)}=\sum_{s=1}^{N}a_{rs}(\tau)\,\varphi_s^{(1)}(\tau)\qquad(r=1,\ 2,\ \ldots,\ N).$$

Не представляет затруднений сформулировать правило составления «регуляризированных» выражений для $u_s^{(1)}(\tau,\ a,\ \theta,\ \psi)$ $(s=1,\ 2,\ \ldots,\ N)$, исходя непосредственно из выражений возмущающих сил и выражений для кинетической и потенциальной энергии.

Заметим, что сумма $\sum\limits_{r=1}^{N}Q_{r0}^{(1)}(\tau,\ a,\ \theta,\ \psi)\,\varphi_r^{(j)}(\tau)$ представляет собой обобщенную силу, действующую на j-ю нормальную координату. Выражение $\sum\limits_{r=1}^{N}\dfrac{d}{d\tau}\left[\dfrac{\partial T(\dot q)}{\partial\dot q_r}\right]_{\dot q_s=\varphi_s^{(1)}(\tau)}\varphi_r^{(j)}(\tau)$ также можно интерпретировать как обобщенную силу, действующую на j-ю нормальную координату. Наличие этой дополнительной силы объясняется появлением (в результате зависимости инерционных коэффициентов a_{ij} от «медленного» времени τ) «силы» $\frac{d}{d\tau}\left[\frac{\partial T(\dot q)}{\partial \dot q_r}\right]_{\dot q_s=\varphi_s^{(1)}(\tau)}$.

Таким образом, для получения функций $u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi)$ $(s=1, 2, \ldots, N)$ надо подставить в функции $Q_r^{(1)}(\tau, \theta, q_1, \ldots, q_N, \dot q_1, \ldots, \dot q_N)$ $(r=1, 2, \ldots N)$ нулевые приближения q_s, $\dot q_s$ $(s=1, 2, \ldots, N)$ и найти (n, m)-й член в ряде Фурье для обобщенной силы, действующей на j-ю нормальную координату; далее, надо найти производную кинетической энергии по скорости, заменить в ней $\dot q_s$ на $\varphi_s^{(1)}(\tau)$ $(s=1, 2, \ldots, N)$, после чего полученные выражения подставить в формулу (23.26). Величины $m_j(\tau)$ $(j=1, 2, \ldots, N)$ представляют собой удвоенные формы кинетической энергии, в которых скорости $\dot q_s$ $(s=1, 2, \ldots, N)$ заменены «нормальными» функциями $\varphi_s^{(j)}(\tau)$ $(s, j=1, 2, \ldots, N)$.

Перейдем к определению функций $A_1(\tau, a, \vartheta)$ и $B_1(\tau, a, \vartheta)$, которые, как и обычно, определяются так, чтобы выполнялось условие конечности (23.25).

Вводя обозначения $n=-\sigma$, $m\pm 1=\sigma$, условие (23.25) представляем в виде

$$\sum_{r=1}^{N} g^{(r,1)}_{-\sigma p,\,\sigma q\pm 1}(\tau, a)\,\varphi_r^{(1)}(\tau)\,e^{\pm i\psi+i\sigma q\vartheta}=0 \tag{23.27}$$

$$(-\infty<\sigma<\infty).$$

Подставляя сюда значения $g^{(r,1)}_{-\sigma,\,\sigma\pm 1}(\tau, a)$ согласно (23.18) и приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках, получаем систему уравнений для $A_1(\tau, a, \vartheta)$ и $B_1(\tau, a, \vartheta)$, аналогичную системе (19.8):

$$\left.\begin{aligned}
&(\omega_1(\tau)-\nu(\tau))\frac{\partial A_1}{\partial\vartheta}-2a\omega_1(\tau)B_1=\\
&=\frac{1}{2\pi^2 m_1(\tau)}\sum_{\sigma} e^{i\sigma\vartheta}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{r=1}^{N} Q_{r0}^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi)\,\varphi_r^{(1)}(\tau)\,e^{-i\sigma\vartheta'}\cos\psi\,d\theta\,d\psi;\\
&(\omega_1(\tau)-\nu(\tau))\,a\frac{\partial B_1}{\partial\vartheta}+2\omega_1(\tau)A_1=-\frac{a}{m_1(\tau)}\frac{d(m_1(\tau)\,\omega_1(\tau))}{d\tau}-\\
&-\frac{1}{2\pi^2 m_1(\tau)}\sum_{\sigma} e^{i\sigma\vartheta}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{r=1}^{N} Q_{r0}^{(1)}(\tau, a, \vartheta, \psi)\,\varphi_r^{(1)}(\tau)\,e^{-i\sigma\vartheta'}\sin\psi\,d\theta\,d\psi\\
&\qquad(\vartheta'=\psi-\theta).
\end{aligned}\right\} \tag{23.28}$$

После того как нами найдены выражения для $u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi)$ $(s=1, 2, \ldots, N)$, $A_1(\tau, a, \vartheta)$ и $B_1(\tau, a, \vartheta)$, становятся известными правые части уравнений (23.14), из которых находим функции $u_s^{(2)}(\tau, a, \theta, \psi)$ $(s=1, 2, \ldots, N)$, а из условий конечности

$$\sum_{\substack{r=1\\(n+m\pm 1=0)}}^{N} g^{(r,2)}_{n,\,m}(\tau, a)\,\varphi_r^{(1)}(\tau)\,e^{i(n\theta+m\psi)}=0 \tag{23.29}$$

находим $A_2(\tau, a, \vartheta)$ и $B_2(\tau, a, \vartheta)$. После ряда выкладок получаем для определения $A_2(\tau, a, \vartheta)$ и $B_2(\tau, a, \vartheta)$ систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&(\omega_1(\tau)-\nu(\tau))\frac{\partial A_2}{\partial\vartheta}-2a\omega_1(\tau)B_2=-\left\{\frac{\partial A_1}{\partial a}A_1+\frac{\partial A_1}{\partial\vartheta}B_1+\frac{\partial A_1}{\partial\tau}-aB_1^2+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{dm_1(\tau)}{d\tau}\frac{A_1}{m_1(\tau)}-\frac{\gamma(\tau)a}{m_1(\tau)}\right\}+\\
&+\frac{1}{2\pi^2m_1(\tau)}\sum_\sigma e^{i\sigma\vartheta}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{r=1}^{N}\Phi_{r0}^{(2)}(\tau, a, \theta, \psi)\varphi_r^{(j)}(\tau)e^{-i\sigma\vartheta'}\cos\psi\,d\theta\,d\psi,\\
&(\omega_1(\tau)-\nu(\tau))a\frac{\partial B_2}{\partial\vartheta}+2\omega_1(\tau)A_2=-\left\{a\frac{\partial B_1}{\partial a}A_1+a\frac{\partial B_1}{\partial\vartheta}B_1+\right.\\
&\qquad\left.+a\frac{\partial B_1}{\partial\tau}+2A_1B_1+\frac{dm_1(\tau)}{d\tau}a\frac{B_1}{m_1(\tau)}\right\}-\\
&-\frac{1}{2\pi^2m_1(\tau)}\sum_\sigma e^{i\sigma\vartheta}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{r=1}^{N}\Phi_{r0}^{(2)}(\tau, a, \theta, \psi)e^{-i\sigma\vartheta'}\sin\psi\,d\theta\,d\psi,
\end{aligned}\right\}\tag{23.30}$$

где обозначено:

$$\gamma(\tau)=\sum_{j=1}^{N}\frac{d}{d\tau}\left[\frac{\partial T(\dot q)}{\partial\dot q_j}\right]_{\dot q_i=\varphi_i^{(1)}(\tau)}\varphi_j^{(1)}(\tau).\tag{23.31}$$

После того как нами найдены функции $u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi)$ $(s=1, 2, \ldots, N)$, $A_1(\tau, a, \vartheta)$, $A_2(\tau, a, \vartheta)$, $B_1(\tau, a, \vartheta)$, $B_2(\tau, a, \vartheta)$, мы можем построить решения уравнений (23.3), соответствующие одночастотному режиму, как в первом, так и во втором приближении.

Резюмируя изложенное, приведем схему построения первого и второго приближения для частных двупараметрических решений системы (23.3), соответствующих одночастотному режиму.

Заметим, что эта схема при $\tau=\text{const}$ может быть также применена и к результатам предыдущего параграфа, в котором ради краткости мы не останавливались на приведении такой схемы.

Итак, прежде всего выделяем невозмущенную систему (23.4) и проверяем, возможны ли в ней при любых значениях параметра τ $(0\leqslant\tau\leqslant L)$ незатухающие гармонические собственные колебания с частотой $\omega_1(\tau)$, зависящие от двух произвольных постоянных; проверяем также, отсутствуют ли нетривиальные статические решения и внутренний резонанс. Далее, находим собственные частоты $\omega_k(\tau)$ $(k=1, 2, \ldots, N)$ и собственные функции $\varphi_s^{(1)}(\tau)$ $(s=1, 2, \ldots, N)$, причем при определении их считаем, что коэффициенты соответствующих алгебраических уравнений зависят от τ как от некоторого постоянного параметра.

После этого в качестве первого приближения берем выражения

$$q_s=\varphi_s^{(1)}(\tau)\,a\cos(\theta+\vartheta)\qquad(s=1, 2, \ldots, N),\tag{23.32}$$

в которых a и ϑ являются некоторыми функциями времени, определяемыми из уравнений первого приближения:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{da}{dt}&=\varepsilon A_1(\tau, a, \vartheta),\\
\frac{d\vartheta}{dt}&=\omega_1(\tau)-\nu(\tau)+\varepsilon B_1(\tau, a, \vartheta),
\end{aligned}\right\}\tag{23.33}$$

где $A_1(\tau, a, \vartheta)$ и $B_1(\tau, a, \vartheta)$ — частные периодические по ϑ решения системы (23.28).

В качестве второго приближения принимаем выражения:

$$q_s = \varphi_s^{(1)}(\tau)\, a\cos(\theta + \vartheta) + \varepsilon u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \theta + \vartheta) \qquad (s = 1, 2, \ldots, N), \tag{23.34}$$

где a и ϑ определяются из уравнений второго приближения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(\tau, a, \vartheta) + \varepsilon^2 A_2(\tau, a, \vartheta), \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_1(\tau) - \nu(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a, \vartheta) + \varepsilon^2 B_2(\tau, a, \vartheta), \end{aligned}\right\} \tag{23.35}$$

в которых $A_1(\tau, a, \vartheta)$, $B_1(\tau, a, \vartheta)$, $A_2(\tau, a, \vartheta)$, $B_2(\tau, a, \vartheta)$ находим из систем (23.28) и (23.30), а $u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \theta + \vartheta)$ $(s = 1, 2, \ldots, N)$ по формулам (23.26).

Итак, интегрирование системы (23.3) сведено нами к интегрированию уравнений (23.33) или (23.35), которые, как уже указывалось в общем случае, не интегрируются в замкнутом виде, и их приходится интегрировать численными методами. В § 19 указывалось на преимущество численного интегрирования системы уравнений, определяющей a и ϑ, по сравнению с численным интегрированием непосредственно уравнений движения. В данном же случае это преимущество во много раз увеличивается ввиду того, что мы при численном интегрировании рассматриваем не систему N уравнений второго порядка, а только два уравнения первого порядка.

Рассмотрим некоторые частные случаи системы нелинейных дифференциальных уравнений (23.3), для которых уравнения первого приближения принимают особенно простой вид.

В качестве первого частного случая рассмотрим «свободные» одночастотные колебания системы со многими степенями свободы и медленно меняющимися параметрами, т. е. когда правые части уравнений (23.3) не зависят от θ и имеют следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_{s=1}^{N} a_{rs}(\tau)\dot{q}_s\right\} + \sum_{s=1}^{N} c_{rs}(\tau) q_s = Q_r(\tau, q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N, \varepsilon) \qquad (r = 1, 2, \ldots, N). \tag{23.36}$$

В этом случае приближенное двупараметрическое частное решение в первом приближении будет:

$$q_s = \varphi_s^{(1)}(\tau)\, a\cos\psi \qquad (s = 1, 2, \ldots, N), \tag{23.37}$$

где a и ψ должны быть определены из системы уравнений первого приближения:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon a}{2m_1(\tau)\,\omega_1(\tau)}\,\frac{d\,(m_1(\tau)\,\omega_1(\tau))}{d\tau} - \frac{\varepsilon}{2\pi m_1(\tau)\,\omega_1(\tau)}\int_0^{2\pi}\sum_{r=1}^{N} Q_{r0}^{(1)}(\tau, a, \psi)\,\varphi_r^{(1)}(\tau)\sin\psi\, d\psi, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_1(\tau) - \frac{\varepsilon}{2\pi m_1(\tau)\,\omega_1(\tau)\, a}\int_0^{2\pi}\sum_{r=1}^{N} Q_{r0}^{(1)}(\tau, a, \psi)\,\varphi_r^{(1)}(\tau)\cos\psi\, d\psi, \end{aligned} \tag{23.38}$$

которую получаем непосредственно из соотношений (23.28), в которых полагаем, что A_1 и B_1 зависят только от a и τ.

Введем по аналогии с § 19 обозначения:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_e^{(1)}(a, \tau) &= \frac{\varepsilon}{\omega_1(\tau)} \frac{d(m_1(\tau)\,\omega_1(\tau))}{d\tau} + \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{\pi a \omega_1(\tau)} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^{N} Q_{r0}^{(1)}(\tau, a, \psi)\,\varphi_r^{(1)}(\tau) \sin\psi\, d\psi, \\ \omega_e^{(1)}(a, \tau) &= \omega_1(\tau) - \frac{\varepsilon}{\pi a m_1(\tau)\,\omega_1(\tau)} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^{N} Q_{r0}^{(1)}(\tau, a, \psi)\,\varphi_r^{(1)}(\tau) \cos\psi\, d\psi; \end{aligned}\right\} \tag{23.39}$$

тогда уравнения первого приближения можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\delta_e^{(1)}(a, \tau)\, a, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_e^{(1)}(a, \tau), \end{aligned}\right\} \tag{23.40}$$

где $\delta_e^{(1)}(a, \tau) = \dfrac{\lambda_e^{(1)}(a, \tau)}{2m_1(\tau)}$.

Таким образом, уравнения первого приближения для системы N дифференциальных уравнений (23.36) будут такими же, как и для системы с одной степенью свободы, описываемой уравнением

$$m_1(\tau)\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_1^2(\tau)\,x\right) = \varepsilon \sum_{r=1}^{N} Q_{r0}^{(1)}(\tau, \varphi_1^{(1)}x, \ldots, \varphi_N^{(1)}x, \varphi_1^{(1)}\dot{x}, \ldots, \varphi_N^{(1)}\dot{x})\,\varphi_r^{(1)}(\tau). \tag{23.41}$$

Рассмотрим теперь случай, когда внешние возмущающие силы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} Q_r(\tau, \theta, q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N, \varepsilon) &= \varepsilon Q_r(\tau, q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N, \varepsilon) + \\ &+ \varepsilon E_r(\tau) \sin\theta \qquad (r = 1, 2, \ldots, N), \end{aligned} \tag{23.42}$$

где $\dfrac{d\theta}{dt} = \nu(\tau)$.

Тогда система дифференциальных уравнений (23.3) будет:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left\{\sum_{s=1}^{N} a_{rs}(\tau)\,\dot{q}_s\right\} + \sum_{s=1}^{N} c_{rs}(\tau)\,q_s &= \varepsilon Q_r(\tau, q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N, \varepsilon) + \\ &+ \varepsilon E_r(\tau) \sin\theta \qquad (r = 1, 2, \ldots, N). \end{aligned} \tag{23.43}$$

В случае рассматриваемого нами основного резонанса ($p = 1$, $q = 1$) в первом приближении решения системы (23.43), соответствующие одночастотным колебаниям, близким к одному из нормальных, будут:

$$q_s = \varphi_s^{(1)}(\tau)\, a \cos(\theta + \vartheta) \qquad (s = 1, 2, \ldots, N), \tag{23.44}$$

где функции времени a и ϑ должны быть определены из системы уравнений первого приближения:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon a}{2m_1(\tau)\,\omega_1(\tau)}\frac{d\,(m_1(\tau)\,\omega_1(\tau))}{d\tau} - \frac{\varepsilon}{2\pi m_1(\tau)\,\omega_1(\tau)}\times \\
&\times \int_0^{2\pi}\sum_{r=1}^{N} Q_{r0}^{(1)}(\tau, a, \psi)\,\varphi_r^{(1)}(\tau)\sin\psi\,d\psi - \frac{\sum\limits_{r=1}^{N}\varepsilon E_r(\tau)\,\varphi_r^{(1)}(\tau)}{m_1(\tau)\,(\omega_1(\tau)-\nu(\tau))}\cos\vartheta, \\
\frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_1(\tau) - \nu(\tau) - \frac{\varepsilon}{2\pi m_1(\tau)\,\omega_1(\tau)\,a}\times \\
&\times \int_0^{2\pi}\sum_{r=1}^{N} Q_{r0}^{(1)}(\tau, a, \psi)\,\varphi_r^{(1)}(\tau)\cos\psi\,d\psi + \frac{\sum\limits_{r=1}^{N}\varepsilon E_r(\tau)\,\varphi_r^{(1)}(\tau)}{m_1(\tau)\,a\,(\omega_1(\tau)-\nu(\tau))}\sin\vartheta,
\end{aligned}\right\} \tag{23.45}$$

которую, учитывая введенные обозначения (23.39), можно представить в виде:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= -\delta_e^{(1)}(a, \tau)\,a - \frac{E(\tau)}{m_1(\tau)\,(\omega_1(\tau)-\nu(\tau))}\cos\vartheta, \\
\frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_e^{(1)}(a, \tau) - \nu(\tau) + \frac{E(\tau)}{m_1(\tau)\,a\,(\omega_1(\tau)-\nu(\tau))}\sin\vartheta,
\end{aligned}\right\} \tag{23.46}$$

где обозначено:

$$E(\tau) = \varepsilon\sum_{r=1}^{N} E_r(\tau)\,\varphi_r^{1)}(\tau).$$

Итак, для того чтобы составить уравнения первого приближения для системы с N степенями свободы при наличии одночастотного режима, мы должны воспользоваться правилом, приведенным в § 19 для колебательной системы с одной степенью свободы, описываемой следующим дифференциальным уравнением с медленно меняющимися коэффициентами:

$$m_1(\tau)\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_1^2(\tau)\,x\right) = \sum_{r=1}^{N}\varepsilon Q_r^{(1)}(\tau, \varphi_1^{(1)}x, \ldots, \varphi_N^{(1)}x, \varphi_1^{(1)}\dot{x}, \ldots, \varphi_N^{(1)}\dot{x})\varphi_r^{(1)}(\tau) + E(\tau)\sin\theta. \tag{23.47}$$

Проиллюстрируем изложенную методику на простом примере. В качестве такого примера рассмотрим, как и в § 22, крутильные колебания вала, схематически изображенного на рис. 118, причем для упрощения предположим, что все параметры, характеризующие нашу колебательную систему, такие же, как и в § 22, и только внешний крутящий момент, действующий на среднюю массу, имеет вид

$$M = E\sin\theta, \tag{23.48}$$

где $\frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau)$.

Тогда наша задача, как и в § 22, сводится к построению приближенного решения системы дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
I_1I_2\ddot{x} + c_1(I_1+I_2)\,x - c_2I_1y &= -(I_1+I_2)\,\varepsilon f(x) + \alpha I_1\dot{y} + EI_1\sin\theta, \\
I_2I_3\ddot{y} - c_1I_3x + c_2(I_2+I_3)\,y &= I_3\varepsilon f(x) - \alpha(I_2+I_3)\,\dot{y} - I_3E\sin\theta,
\end{aligned}\right\} \tag{23.49}$$

где $\frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau)$.

Предположим, что частота внешней силы $\nu(\tau)$, которая медленно изменяется со временем, находится вблизи значений собственной частоты ω_1. В этом случае представляет интерес рассмотреть нестационарные колебания системы, соответствующие возбуждению гармоник с частотой, близкой к ω_1.

Приближенные решения ищем в виде

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi_1^{(1)} a \cos(\theta + \vartheta), \\ y &= \varphi_2^{(1)} a \cos(\theta + \vartheta), \end{aligned}\right\} \tag{23.50}$$

где $\varphi_1^{(1)}$, $\varphi_2^{(1)}$ — нетривиальные решения системы алгебраических уравнений (22.39), ω_1 — наименьший корень уравнения (22.40), а a и ϑ как функции времени должны быть определены из уравнений первого приближения. Для составления этих уравнений можем воспользоваться правилом и формулами, приведенными в § 19 для колебательной системы с одной степенью свободы. Для этого вместо системы (23.49) рассматриваем эквивалентное ей при одночастотном режиме одно уравнение второго порядка:

$$m_1\left(\frac{d^2z}{dt^2} + \omega_1^2 z\right) = Q\left(z, \frac{dz}{dt}\right) + E_1 \sin\theta, \tag{23.51}$$

где введены обозначения:

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= I_2 (\varphi_1^{(1)2} + \varphi_2^{(1)2}) \\ E_1 &= E (I_1\varphi_1^{(1)} - I_2\varphi_2^{(1)}), \\ Q\left(z, \frac{dz}{dt}\right) &= [I_3\varphi_2^{(1)} - (I_1 + I_2)\varphi_1^{(1)}]\varepsilon f(\varphi_1^{(1)} z) + \\ &\quad + \alpha[(I_2 + I_3)\varphi_2^{(1)} - I_1\varphi_1^{(1)}\varphi_2^{(1)}]\frac{dz}{dt}. \end{aligned}\right\} \tag{23.52}$$

Подставляя значения m_1, E_1 и $Q\left(z, \frac{dz}{dt}\right)$ $(z = a\cos\psi)$ непосредственно в формулы (19.22), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\alpha}{m_1}[(I_2 + I_3)\varphi_2^{(1)2} - I_1\varphi_1^{(1)}\varphi_2^{(1)}]a - \frac{E(I_1\varphi_1^{(1)} - I_2\varphi_2^{(1)})}{m_1(\omega_1 + \nu(\tau))}\cos\vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_1 - \nu(\tau) - \frac{[I_3\varphi_2^{(1)} - (I_1 + I_2)\varphi_1^{(1)}]}{m_1\omega_1 a}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varepsilon f(\varphi_1^{(1)} a\cos\psi)\cos\psi\, d\psi - \\ &\quad - \frac{E(I_1\varphi_1^{(1)} - I_2\varphi_2^{(1)})}{m_1 a(\omega_1 + \nu(\tau))}\sin\vartheta. \end{aligned} \tag{23.53}$$

Полагая, что нелинейность упругой связи определяется той же самой характеристикой, что в примере § 22, вычисляя интеграл, стоящий в правой части второго уравнения системы (23.53), и после этого численно интегрируя систему (23.53) при различных скоростях изменения частоты внешнего крутящего момента $\nu(\tau)$, получаем ряд кривых, приведенных на рис. 121, характеризующих изменение величины a в зависимости от изменения $\nu(\tau)$.

Заканчивая настоящую главу, посвященную исследованию одночастотных колебаний в нелинейных системах со многими степенями свободы, заметим, что изложенная методика может быть без особого затруднения применена к исследованию более сложных колебательных систем, например к исследованию колебательных систем с N степенями свободы, для которых функция Лагранжа может быть представлена в виде

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\left\{\sum_{r,s=1}^{N} a_{rs}(\tau)\dot{q}_s\dot{q}_r+2\sum_{s,r=1}^{N} g_{sr}(\tau)\,q_r\dot{q}_s-\sum_{r,s=1}^{N} c_{rs}(\tau)\,q_sq_r\right\}, \tag{23.54}$$

где, как и выше, $q_1, q_2, \ldots, q_N$ — обобщенные координаты, $\tau=\varepsilon t$, ε — малый положительный параметр, $a_{rs}(\tau)=a_{sr}(\tau)$, $c_{rs}(\tau)=c_{sr}(\tau)$ и $g_{sr}(\tau)$ $(s, r=1, 2, \ldots, N)$ имеют достаточное число производных при всех конечных τ.

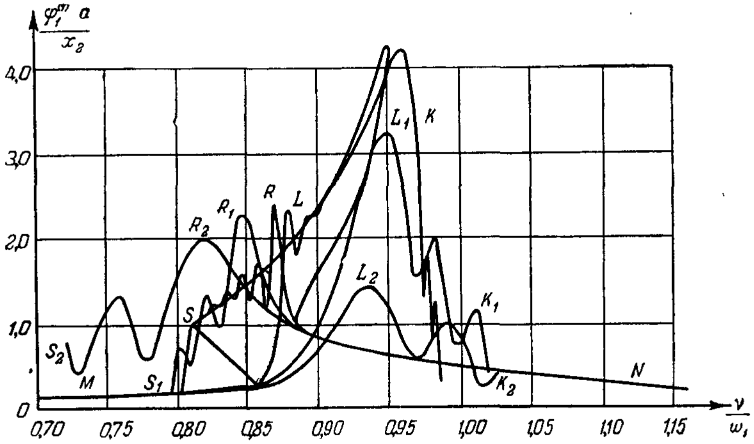

Рис. 121.

(Рассматривая τ как постоянный параметр, мы получаем, что a_{sr}, g_{sr}, и c_{sr} $(s, r=1, 2, \ldots, N)$ — постоянные и, следовательно, приходим к более общему случаю по сравнению с рассматриваемыми в §§ 21—22; если же $\tau=\varepsilon t$, то рассматриваемый случай будет более общим также и по сравнению с системами, рассмотренными в настоящем параграфе.)

Будем предполагать, что полная энергия рассматриваемой колебательной системы

$$H=\sum_{s=1}^{N}\dot{q}_s\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_s}-\mathscr{L} \tag{23.55}$$

является определенно-положительной квадратичной формой для любых τ на интервале $0\leqslant\tau\leqslant L$, а сама система находится под воздействием внешних возмущающих сил типа (23.2). Тогда мы приходим к исследованию следующей системы нелинейных дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами:

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_{s=1}^{N} a_{sr}(\tau)\,\dot{q}_s\right\}+\sum_{s=1}^{N} b_{sr}(\tau)\,\dot{q}_s+\sum_{s=1}^{N} c_{sr}(\tau)\,q_s=$$

$$=Q_r(\tau, \theta, q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N, \varepsilon)-\varepsilon\sum_{s=1}^{N}\frac{dg_{rs}(\tau)}{d\tau}q_s \tag{23.56}$$

$$(r=1, 2, \ldots, N),$$

в которой $b_{sr}(\tau) = g_{sr}(\tau) - g_{rs}(\tau)$ и, следовательно,

$$b_{sr}(\tau) = -b_{rs}(\tau) \qquad (s,\ r = 1,\ 2,\ \ldots,\ N).$$

Предположим, что для системы (23.56) выполняются все условия, приведенные на стр. 283 настоящего параграфа. Для построения приближенных асимптотических решений системы (23.56), зависящих от двух произвольных постоянных и соответствующих одночастотному режиму, мы можем либо воспользоваться общей методикой, разработанной в § 20, с соответствующими уточнениями, как это было сделано в начале § 23, либо непосредственно результатами § 23.

Для применения результатов § 20 необходимо систему N уравнений второго порядка (23.56) свести к системе $2N$ уравнений первого порядка. Для этого, как и обычно, вводим новые переменные по формулам:

$$q_{N+s} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_s} \qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ N) \tag{23.57}$$

или в развернутом виде

$$q_{N+s} = \sum_{r=1}^{N} a_{rs}(\tau)\,\dot{q}_r + \sum_{r=1}^{N} g_{rs}(\tau)\,q_r \qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ N). \tag{23.58}$$

Воспользовавшись обозначением (23.57), имеем:

$$H = \sum \dot{q}_s q_{N+s} - \mathcal{L}. \tag{23.59}$$

После этого систему (23.3), согласно известным принципам механики, можно заменить системой $2N$ уравнений:

$$\frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial \widehat{H}}{\partial q_{N+s}}, \quad \frac{dq_{N+s}}{dt} = -\frac{\partial \widehat{H}}{\partial q_s} + \widehat{Q}_s, \tag{23.60}$$

где $\widehat{H}$ и $\widehat{Q}_s$ $(s = 1,\ 2,\ \ldots,\ N)$ являются так называемыми союзными выражениями для функций H (23.55) и Q_s $(s = 1,\ 2,\ \ldots,\ N)$ (23.2), получающимися после замены в последних скоростях $\dot{q}_s$ $(s = 1,\ 2,\ \ldots,\ N)$ их значениями, выраженными из системы (23.58) через значения q_r $(r = 1,\ 2,\ \ldots,\ N)$.

Подставляя $\dot{q}_s$ $(s = 1,\ 2,\ \ldots,\ N)$ в выражение (23.59), получим:

$$\widehat{H} = \frac{1}{2}\sum_{s,\,r=1}^{N} \alpha_{sr}(\tau)\,q_s q_r + \sum_{s,\,r=1}^{N} \gamma_{sr}(\tau)\,q_s q_{N+r} + \frac{1}{2}\sum_{s,\,r=1}^{N} \beta_{sr}(\tau)\,q_{N+s} q_{N+r}, \tag{23.61}$$

причем $\alpha_{sr}(\tau) = \alpha_{rs}(\tau)$, $\beta_{sr}(\tau) = \beta_{rs}(\tau)$ и $\gamma_{sr}(\tau)$ $(s,\ r = 1,\ 2,\ \ldots,\ N)$ имеют достаточное число производных на интервале $0 \leqslant \tau \leqslant L$.

После этого система уравнений (23.60) может быть записана в явном виде следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{r=1}^{N} \alpha_{sr}(\tau)\,q_s + \sum_{r=1}^{N}\left[\gamma_{sr}(\tau)\,q_{N+r} + \frac{dq_{N+s}}{dt}\right] = \widehat{Q}_s,\\
&\sum_{r=1}^{N}\left[\gamma_{rs}(\tau)\,q_r - \frac{dq_s}{dt}\right] + \sum_{r=1}^{N} \beta_{sr}(\tau)\,q_{N+s} = 0\\
&\qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ N).
\end{aligned}\right\} \tag{23.62}$$

Система (23.62) имеет такой же вид, как и рассмотренная в § 20 система уравнений (20.1), и следовательно, мы можем построить асимптотические решения, воспользовавшись результатами § 20 (разумеется, с учетом того, что в данном случае коэффициенты уравнений, а также правые части зависят еще от «медленного» времени τ).

Однако можно и не приводить систему уравнений (23.56) к системе $2N$ уравнений первого порядка, а построить непосредственно для нее асимптотические решения, несколько обобщив результаты, полученные в § 20 и в настоящем параграфе.

Мы должны будем в этом случае вместо вспомогательной системы (23.4) рассматривать следующую:

$$\sum_{s=1}^{N} a_{rs}(\tau)\ddot{q}_{sr} + \sum_{s=1}^{N} b_{rs}(\tau)\dot{q}_s + \sum_{s=1}^{N} c_{sr}(\tau) q_s = 0 \tag{23.63}$$

$$(r = 1, 2, \ldots, N).$$

Решение системы (23.56), соответствующее одночастотному режиму, ищем в виде рядов

$$q_s = u_s^{(0)}(\tau, a, \psi) + \varepsilon u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi) + \varepsilon^2 u_s^{(2)}(\tau, a, \theta, \psi) + \ldots \tag{23.64}$$
$$(s = 1, 2, \ldots, N),$$

где

$$u_s^{(0)}(\tau, a, \psi) = \varphi_s^{(1)}(\tau) a e^{i\psi} + \varphi_s^{*(1)}(\tau) a e^{-i\psi} \quad \left(\psi = \frac{p}{q}\nu(\tau) + \vartheta\right)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, N),$$

$\varphi_s^{(1)}(\tau)$ — фундаментальные функции, являющиеся нетривиальными решениями системы однородных алгебраических уравнений:

$$\sum_{r=1}^{N} \{-a_{sr}(\tau)\omega_1^2(\tau) + i b_{sr}(\tau)\omega_1(\tau) + c_{sr}(\tau)\}\varphi_r^{(1)}(\tau) = 0 \tag{23.65}$$
$$(s = 1, 2, \ldots, N),$$

$\varphi_s^{*(1)}(\tau)$ — сопряженные с $\varphi_s^{(1)}(\tau)$ $(s = 1, 2, \ldots, N)$, а $\omega_1(\tau)$ определяется из уравнения

$$D\,\| -a_{sr}(\tau)\omega^2 + i b_{rs}(\tau)\omega + c_{sr}(\tau)\| = 0. \tag{23.66}$$

Для составления же уравнений, определяющих величины a и ϑ и имеющих такой же вид, как и уравнения (23.10), поступаем как и обычно, т. е. находим вначале «регуляризированное» выражение для $u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi)$ $(s = 1, 2, \ldots, N)$, а из условий конечности, которые в нашем случае будут иметь такой же вид, как и условия (23.25), находим $A_1(\tau, a, \vartheta)$ и $B_1(\tau, a, \vartheta)$ и т. д.