ГЛАВА V
МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ

§ 24. Уравнения первого и высших приближений в методе усреднения

В начале настоящей книги мы вкратце останавливались на приведении нелинейного дифференциального уравнения, содержащего малый параметр, к стандартной форме и построении приближенного решения согласно принципу усреднения.

Остановимся теперь на этом вопросе более подробно.

Как известно, вид нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр, а также самый характер вхождения в них малого параметра может быть чрезвычайно разнообразным.

Однако во многих случаях с помощью простых замен переменных дифференциальные уравнения колебаний могут быть приведены к одной общей форме, в которой правые части пропорциональны малому параметру. Такую форму дифференциальных уравнений мы условились называть стандартной.

Приведение дифференциальных уравнений к стандартной форме с последующим применением принципа усреднения является эффективным методом в особенности при исследовании нелинейных колебательных систем со многими степенями свободы.

Так, например, в случае, если нелинейная колебательная система с N степенями свободы характеризуется следующими выражениями кинетической и потенциальной энергии:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k,\, j=1}^{N} a_{kj} \dot{q}_k \dot{q}_j, \quad V = \frac{1}{2} \sum_{k,\, j=1}^{N} b_{kj} q_k q_j, \tag{24.1}$$

где $q_1, q_2, \ldots, q_N$ — обобщенные координаты, a_{kj}, b_{kj} — постоянные и, кроме того, квадратичные формы T и V определенно-положительны, то, как известно, посредством линейного преобразования

$$q_j = \sum_{k=1}^{N} \varphi_{jk} x_k \tag{24.2}$$

можно ввести нормальные координаты $x_1, x_2, \ldots, x_N$, для которых

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \dot{x}_k^2, \qquad V = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \omega_k^2 x_k^2, \tag{24.3}$$

и уравнения Лангранжа для невозмущенного движения принимают следующий вид:

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \omega_k^2 x_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, N). \tag{24.4}$$

Допустим теперь, что на нашу систему действует малое возмущение вида

$$\varepsilon Q_k = \varepsilon \{Q_k^{(0)}(q_k, \dot{q}_k) + \sum_a [Q_{k1}^{(a)}(q_k, \dot{q}_k)\cos\Omega_a t + Q_{k2}^{(a)}(q_k, \dot{q}_k)\sin\Omega_a t], \quad (24.5)$$

где Ω_a — частоты возмущающих сил, ε — малый параметр.

Тогда, переходя в (24.5) также к нормальным координатам, получим следующую систему нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2x_k}{dt^2} + \omega_k^2 x_k = \varepsilon X_k(t, x_k, \dot{x}_k) \quad (k = 1, 2, \ldots, N), \quad (24.6)$$

где εX_k определяются из условия эквивалентности работ согласно формуле

$$X_k = \sum_{j=1}^{N} Q_j \varphi_{kj} \quad (k = 1, 2, \ldots, N). \quad (24.7)$$

Уравнения (24.6) путем замены переменных

$$x_k = z_k e^{i\omega_k t} + z_{-k} e^{-i\omega_k t}, \quad (24.8)$$

$$\dot{x}_k = i\omega_k z_k e^{i\omega_k t} - i\omega_k z_{-k} e^{-i\omega_k t}, \quad (24.9)$$

в которых z_k и z_{-k} — комплексно сопряженные неизвестные функции времени, могут быть приведены к стандартной форме.

Действительно, дифференцируя (24.8) и сравнивая с (24.9), имеем:

$$\dot{z}_k e^{i\omega_k t} + \dot{z}_{-k} e^{-i\omega_k t} = 0. \quad (24.10)$$

Дифференцируя (24.9) и подставляя в (24.6), получим:

$$i\omega_k \dot{z}_k e^{i\omega_k t} - i\omega_k \dot{z}_{-k} e^{-i\omega_k t} = \varepsilon X_k. \quad (24.11)$$

Полагая для упрощения записи

$$-\omega_{-k} = \omega_k, \qquad X_{-k} = X_k, \quad (24.12)$$

можем (24.6) представить в виде

$$\frac{dz_g}{dt} = \varepsilon Z_g(t, z_k) \begin{pmatrix} g = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N \\ k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N \end{pmatrix}. \quad (24.13)$$

К уравнениям типа (24.13) могут быть приведены также уравнения, описывающие колебания систем, находящихся под воздействием сил высокой частоты, и другие.

Итак, остановимся на изложении формального метода построения приближенных решений для уравнений в стандартной форме:

$$\frac{dx_k}{dt} = \varepsilon X_k(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \quad (24.14)$$

где ε — малый параметр, а X_k могут быть представлены с помощью сумм:

$$X_k(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_\nu e^{i\nu t} X_{k\nu}(x_1, x_2 \ldots, x_n) \quad (24.15)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n),$$

в которых ν — постоянные частоты.

Необходимо отметить, что уравнения (24.14) рассматриваются исключительно в вещественной области, и комплексная форма представления синусоидальных колебаний, примененная в (24.15), введена лишь для простоты обозначений.

Иногда при рассмотрении высших приближений целесообразно учитывать в дифференциальных уравнениях также члены высшего порядка по отношению к ε. При этом получаем, например:

$$\frac{dx_k}{dt} = \varepsilon X_k(t, x_1, \ldots, x_n) + \varepsilon^2 Y_k(t, x_1, \ldots, x_n) + \ldots \qquad (24.16)$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n),$$

где Y_k — функции того же вида, что и X_k. Этот тип уравнений также будем называть стандартным. При применении теории возмущений здесь не вносится никаких существенных изменений.

Прежде чем приступить к изложению этой теории, введем ряд сокращенных обозначений. Так, совокупность n величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ условимся обозначать одной буквой x. Тогда уравнения (24.14) запишутся в виде

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x), \qquad (24.17)$$

где

$$X(t, x) = \sum_{\nu} e^{i\nu t} X_\nu(x). \qquad (24.18)$$

Формулы дифференцирования сложных функций

$$\frac{dF_k(t, x_1, \ldots, x_n)}{dt} = \frac{\partial F_k}{\partial t} + \sum_{q=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial x_q} \frac{dx_q}{dt} \qquad (24.19)$$

в наших обозначениях будут:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \left(\frac{dx}{dt}\frac{\partial}{\partial x}\right) F, \qquad (24.20)$$

где, таким образом, $\frac{\partial F}{\partial x}$ трактуется как матрица

$$\left\| \frac{\partial F_k}{\partial x_q} \right\|,$$

приложенная к вектору $\frac{dx}{dt}$, и $\left(\frac{dx}{dt}\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — как операторное скалярное произведение

$$\sum_{q=1}^{n} \frac{dx_q}{dt} \frac{\partial}{\partial x_q}. \qquad (24.21)$$

Очевидно, что применение указанной матрично-векторной системы обозначений не требует особых пояснений и представляет значительное преимущество в отношении сокращения записи.

Пусть, далее, $F(t, x)$ является суммой вида

$$F(t, x) = \sum_{\nu} e^{i\nu t} F_\nu(x). \qquad (24.22)$$

Тогда, вводя обозначения

$$\left.\begin{aligned} &\underset{t}{M}\{F(t, x)\} = F_0(x), \\ &\widetilde{F}(t, x) = \sum_{\nu \neq 0} \frac{e^{i\nu t}}{i\nu} F_\nu(x), \\ &\widetilde{\widetilde{F}}(t, x) = \sum_{\nu \neq 0} \frac{e^{i\nu t}}{(i\nu)^2} F_\nu(x) \end{aligned}\right\} \qquad (24.23)$$

и т. д., получим тождественно:

$$\frac{\partial \widetilde{\widetilde{F}}}{\partial t} = \widetilde{F}, \quad \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial t} = F - \underset{t}{M}\{F\}. \tag{24.24}$$

Оператор $\sim$ будем называть интегрирующим оператором, $\underset{t}{M}$ — оператором усреднения при постоянных x или оператором усреднения по явно содержащемуся времени.

Рассмотрим теперь систему дифференциальных уравнений (24.17), где ε — малый параметр и где выражения X как функции времени t представляются суммами (24.18).

Заметим, что форма приближенного решения может быть найдена, или лучше сказать угадана, с помощью совершенно интуитивных соображений, а именно: так как первые производные $\frac{dx}{dt}$ пропорциональны малому параметру, естественно считать x медленно изменяющимися величинами. Представим x как суперпозицию плавно изменяющегося члена ξ и суммы малых вибрационных членов и ввиду малости этих последних в первом приближении положим $x = \xi$. Тогда

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x) = \varepsilon X(t, \xi) = \varepsilon \sum_{\nu} X_\nu(\xi) e^{i\nu t}, \tag{24.25}$$

т. е.

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \text{малые синусоидальные колебательные члены.} \tag{24.26}$$

Считая, что эти синусоидальные колебательные члены вызывают лишь малые вибрации x около ξ и не оказывают влияния на систематическое изменение x, приходим к уравнениям первого приближения в виде

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) = \varepsilon \underset{t}{M}\{X(t, \xi)\}. \tag{24.27}$$

Для получения второго приближения необходимо принять во внимание в выражении x также и вибрационные члены; учитывая в (24.26) член $\varepsilon e^{i\nu t} X_\nu(\xi)$, как вызывающий в x колебание вида

$$\frac{\varepsilon e^{i\nu t}}{i\nu} X_\nu(\xi),$$

приходим к следующему приближенному выражению:

$$x = \xi + \varepsilon \sum_{\nu \neq 0} \frac{e^{i\nu t}}{i\nu} X_\nu(\xi) = \xi + \varepsilon \widetilde{X}(t, \xi). \tag{24.28}$$

Подставляя (24.28) в уравнение (24.17), имеем:

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, \xi + \varepsilon \widetilde{X}), \tag{24.29}$$

т. е.

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon \underset{t}{M}\{X(t, \xi + \varepsilon \widetilde{X})\} + \text{малые синусоидальные колебательные члены},$$

откуда, пренебрегая влиянием синусоидальных колебательных членов на систематическое изменение ξ, получаем уравнения второго приближения

$$\frac{d\xi}{dt}=\varepsilon \underset{t}{M}\{X(t, \xi+\varepsilon\widetilde{X})\}=\varepsilon \underset{t}{M}\left\{X(t, \xi)+\varepsilon\left(\widetilde{X}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t, \xi)\right\} \tag{24.30}$$

и т. д.

Приведенные рассуждения, очевидно, не могут претендовать на какую-либо убедительность; против них может быть выдвинуто хотя бы то возражение, что при составлении приближенных уравнений (24.27) в уравнениях (24.17) отброшены члены того же порядка малости, что и оставленный член εX_0.

Нетрудно, однако, придать им более обоснованную форму.

Совершим для этого в уравнениях (24.17) замену переменных

$$x=\xi+\varepsilon\widetilde{X}(t, \xi), \tag{24.31}$$

где ξ рассматриваются как новые неизвестные.

Дифференцируя (24.31), имеем:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d\xi}{dt}+\varepsilon\frac{\partial\widetilde{X}(t, \xi)}{\partial\xi}\frac{d\xi}{dt}+\varepsilon\frac{\partial\widetilde{X}(t, \xi)}{\partial t}. \tag{24.32}$$

Но ввиду свойства (24.24) интегрирующего оператора

$$\frac{\partial\widetilde{X}(t, \xi)}{\partial t}=X(t, \xi)-X_0(\xi).$$

Подставляя (24.31) и (24.32) в уравнение (24.17), получаем:

$$\frac{d\xi}{dt}+\varepsilon\frac{\partial\widetilde{X}(t, \xi)}{\partial\xi}\frac{d\xi}{dt}+\varepsilon X(t, \xi)-\varepsilon X_0(\xi)=\varepsilon X\{t, \xi+\varepsilon\widetilde{X}(t, \xi)\}$$

или

$$\left\{1+\varepsilon\frac{\partial\widetilde{X}}{\partial\xi}\right\}\frac{d\xi}{dt}=\varepsilon X_0(\xi)+\varepsilon\{X(t, \xi+\varepsilon\widetilde{X})-X(t, \xi)\}, \tag{24.33}$$

где 1 рассматривается как единичная матрица.

Умножая (24.33) слева на

$$\left\{1+\varepsilon\frac{\partial\widetilde{X}}{\partial\xi}\right\}^{-1}, \tag{24.34}$$

замечаем, что новые неизвестные ξ удовлетворяют уравнениям вида

$$\frac{d\xi}{dt}=\varepsilon\left\{1+\varepsilon\frac{\partial\widetilde{X}}{\partial\xi}\right\}^{-1}X_0(\xi)+\varepsilon\left\{1+\varepsilon\frac{\partial\widetilde{X}}{\partial\xi}\right\}^{-1}\{X(t, \xi+\varepsilon\widetilde{X})-X(t, \xi)\}. \tag{24.35}$$

С другой стороны, разлагая (24.34) в ряд по степеням ε, имеем:

$$\left\{1+\varepsilon\frac{\partial\widetilde{X}}{\partial\xi}\right\}^{-1}=1-\varepsilon\frac{\partial\widetilde{X}(t, \xi)}{\partial\xi}+\varepsilon^2\ldots,$$

где вообще символ ε^m обозначает величины порядка малости ε^m. Поэтому уравнения (24.35) дают:

$$\frac{d\xi}{dt}=\varepsilon X_0(\xi)+\varepsilon^2\ldots, \tag{24.36}$$

или более подробно

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) - \varepsilon^2 \frac{\partial \widetilde{X}(t, \xi)}{\partial \xi} X_0(\xi) + \varepsilon \{X(t, \xi + \varepsilon \widetilde{X}) - X(t, \xi)\} + \varepsilon^3 \ldots =$$

$$= \varepsilon X_0(\xi) - \varepsilon^2 \frac{\partial \widetilde{X}(t, \xi)}{\partial \xi} X_0(\xi) + \varepsilon^2 \left(\widetilde{X} \frac{\partial}{\partial \xi}\right) X(t, \xi) + \varepsilon^3 \ldots \quad (24.37)$$

Итак, если ξ удовлетворяет уравнениям (24.36), правая часть которых отличается от правой части уравнения

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) \quad (24.38)$$

на величины второго порядка малости, то выражение

$$x = \xi + \varepsilon \widetilde{X}(t, \xi) \quad (24.39)$$

представляет точное решение рассматриваемых уравнений (24.17).

Поэтому можем принять в качестве первого приближения

$$x = \xi, \quad (24.40)$$

взяв за ξ решение уравнений первого приближения (24.38).

Выражение (24.39), в котором ξ удовлетворяет этим же уравнениям, будем называть улучшенным первым приближением.

Подставляя улучшенное первое приближение в точные уравнения (24.17), нетрудно убедиться, что это приближение удовлетворяет им с точностью до величин второго порядка малости.

Как видно, для эффективного построения приближенного решения необходимо предварительно решить уравнения первого приближения, и тот факт, что эти уравнения (так же, как и точные) являются дифференциальными, накладывает определенное ограничение на возможность применения изложенного метода. Однако следует подчеркнуть, что для весьма большого числа практически интересных случаев уравнения первого приближения оказываются гораздо более простыми и поддающимися исследованию. При этом во многих случаях, в которых общее решение не удается получить, можно найти, по крайней мере, важные частные решения, например, соответствующие установившимся колебательным процессам.

Так, например, при $n = 1$ уравнения первого приближения интегрируются в квадратурах; при $n = 2$ для их исследования может быть использована известная теория Пуанкаре.

При любом n, если $X_0(\xi)$ обращается в нуль в некоторой точке $\xi = \xi_0$, можем рассматривать «квазистатическое» решение

$$x = \xi_0$$

уравнений первого приближения. Для исследования устойчивости этого решения можно поступать обычным образом, составив уравнения для малых отклонений (уравнения в вариациях):

$$\frac{d\delta\xi}{dt} = \varepsilon \frac{\partial X_0(\xi_0)}{\partial \xi} \delta\xi. \quad (24.41)$$

Если все вещественные части корней характеристического уравнения

$$\mathrm{Det} \left| 1 \cdot p - \varepsilon \frac{\partial X_0(\xi_0)}{\partial \xi} \right| = 0 \quad (24.42)$$

отрицательны, то рассматриваемое квазистатическое решение оказывается устойчивым. Всякое решение уравнений первого приближения, исходящее из начальных значений, достаточно близких к ξ_0, будет при $t \to \infty$ экспоненциально приближаться к квазистатическому решению. Если хотя бы для одного из корней характеристического уравнения вещественная часть положительна, имеем случай неустойчивости. Может представиться также критический случай, когда все вещественные части равны нулю. Этот случай иногда можно свести к двум предыдущим с помощью рассмотрения высших приближений.

Как показывает улучшенное первое приближение для рассматриваемого квазистатического решения, x представляется в виде суммы постоянного члена и малых синусоидальных колебаний с «внешними» частотами ν. Высшие приближения выявили бы также наличие членов с комбинационными частотами, составленными из частот ν.

Эти заключения, сделанные при рассмотрении приближенных решений, могут быть подтверждены и для точных решений уравнений (24.17) на основе строгой математической теории. Так, в работе [7] показано, что в случае, когда вещественные части корней характеристического уравнения (24.42) не равны нулю, можно установить при весьма общих условиях, что точные уравнения (24.17) имеют почти периодическое решение $x = x(t)$ (с частотами из базиса ν), лежащее в окрестности точки $x = \xi$. Эта окрестность может быть взята сколь угодно малой при достаточно малом ε. Указанное почти периодическое решение устойчиво или неустойчиво в зависимости от знаков вещественных частей корней алгебраического уравнения (24.42).

Возвращаясь к уравнениям (24.38), заметим, что по самому определению оператора усреднения

$$X_0(\xi) = \underset{t}{M}\{X(t, \xi)\}$$

и, следовательно, уравнения первого приближения могут быть представлены в форме

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon \underset{t}{M}\{X(t, \xi)\}. \qquad (24.43)$$

Таким образом, уравнения первого приближения (24.43) получаются из точных уравнений (24.17) путем усреднения последних по явно содержащемуся времени t. При выполнении усреднения ξ трактуются как постоянные.

Этот формальный процесс, состоящий в замене точных уравнений усредненными, называется иногда принципом усреднения.

Как убедимся далее, для обоснования принципа усреднения не требуется, чтобы $X(t, \xi)$ могла быть представлена суммой (24.18); существенным здесь является лишь существование среднего значения

$$X_0(\xi) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, \xi)\, dt. \qquad (24.44)$$

Следует заметить, что в той или иной форме принцип усреднения уже давно применялся для получения приближенных решений. Так, еще в методе «секулярных возмущений», разработанном основоположниками небесной механики, применялся по существу тот же принцип усреднения. Однако проблемой обоснования этого принципа стали заниматься лишь в сравнительно недавнее время.

Перейдем теперь к построению второго приближения.

Заметим, что при построении первого приближения путем замены переменных (24.31) уравнения (24.17) были преобразованы к виду

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 \ldots$$

Для получения второго приближения найдем аналогичную замену переменных, преобразующую переменную x к ξ, удовлетворяющей уравнению вида

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 P(\xi) + \varepsilon^3 \ldots \tag{24.45}$$

Чтобы прийти к этой замене переменных наиболее естественным, по нашему мнению, путем, найдем выражение

$$x = \Phi(t, \xi, \varepsilon), \tag{24.46}$$

которое для ξ, удовлетворяющей уравнению типа

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 P(\xi), \tag{24.47}$$

удовлетворяло бы (24.17) с точностью до величин порядка малости ε^3.

Так как при ξ, определяемой из уравнения первого приближения

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi),$$

выражение

$$x = \xi + \varepsilon \sum_{\nu \neq 0} \frac{e^{i\nu t}}{i\nu} X_\nu(\xi) = \xi + \varepsilon \widetilde{X}(t, \xi)$$

удовлетворяет уравнению (24.17) с точностью до величин порядка малости ε^2, то решение (24.46) будем искать в форме

$$x = \xi + \varepsilon \widetilde{X}(t, \xi) + \varepsilon^2 F(t, \xi), \tag{24.48}$$

где F представляется суммами вида

$$F(t, \xi) = \sum_{\mu} e^{i\mu t} F_\mu(\xi). \tag{24.49}$$

Но для (24.48)

$$\varepsilon X(t, x) = \varepsilon X(t, \xi + \varepsilon \widetilde{X}) + \varepsilon^2 \ldots = \varepsilon X(t, \xi) + \varepsilon^2 \left(\widetilde{X} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X(t, \xi) + \varepsilon^3 \ldots \tag{24.50}$$

С другой стороны, при ξ, определяемой уравнением (24.47), дифференцированием выражения (24.48) находим:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial \widetilde{X}(t, \xi)}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon^2 \frac{\partial F(t, \xi)}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial \widetilde{X}(t, \xi)}{\partial t} +$$
$$+ \varepsilon^2 \frac{\partial F(t, \xi)}{\partial t} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 P(\xi) + \varepsilon^2 \frac{\partial \widetilde{X}(t, \xi)}{\partial \xi} X_0(\xi) +$$
$$+ \varepsilon \frac{\partial \widetilde{X}(t, \xi)}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial F(t, \xi)}{\partial t} + \varepsilon^3 \ldots,$$

откуда

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, \xi) + \varepsilon^2 P(\xi) + \varepsilon^2 \frac{\partial \widetilde{X}(t, \xi)}{\partial \xi} X_0(\xi) + \varepsilon^2 \frac{\partial F(t, \xi)}{\partial t} + \varepsilon^3 \ldots, \tag{24.51}$$

так как

$$\frac{\partial \widetilde{X}(t, \xi)}{\partial t} = X(t, \xi) - X_0(\xi).$$

Таким образом, выражение (24.50) будет равно (24.51) с точностью до величин порядка малости ε^3, если подобрать находящиеся в нашем распоряжении $P(\xi)$ и $F(t, \xi)$ так, чтобы было выполнено следующее соотношение:

$$\frac{\partial F(t, \xi)}{\partial t} = \left(\widetilde{X}\frac{\partial}{\partial \xi}\right) X(t, \xi) - \frac{\partial \widetilde{X}(t, \xi)}{\partial \xi} X_0(\xi) - P(\xi). \tag{24.52}$$

Но ввиду того, что

$$\widetilde{X}(t, \xi) = \sum_{\nu \neq 0} \frac{e^{i\nu t}}{i\nu} X_\nu(\xi); \quad X(t, \xi) = \sum_{\nu} e^{i\nu t} X_\nu(\xi), \tag{24.53}$$

мы можем написать:

$$\left(\widetilde{X}\frac{\partial}{\partial \xi}\right) X(t, \xi) - \frac{\partial \widetilde{X}(t, \xi)}{\partial \xi} X_0(\xi) = \sum_{\nu', \nu'' \, (\nu' \neq 0)} e^{i(\nu'+\nu'')t} \frac{1}{i\nu'} \times$$
$$\times \left(X_{\nu'}\frac{\partial}{\partial \xi}\right) X_{\nu''}(\xi) - \sum_{\nu \neq 0} \frac{e^{i\nu t}}{i\nu} \frac{\partial X_\nu(\xi)}{\partial \xi} X_0(\xi), \tag{24.54}$$

где в сумме

$$\sum_{\substack{\nu', \nu'' \\ (\nu' \neq 0)}}$$

суммирование распространено по всем парам (ν', ν'') частот ν, фигурирующих в суммах (24.53).

Выражение (24.54) можем представить, следовательно, суммой вида

$$\left(\widetilde{X}\frac{\partial}{\partial \xi}\right) X(t, \xi) - \frac{\partial \widetilde{X}(t, \xi)}{\partial \xi} X_0(\xi) = \sum_{\substack{\mu \\ (\mu = \nu, \, \nu'+\nu'')}} e^{i\mu t} \Phi_\mu(\xi),$$

и соотношение (24.52) будет выполнено, если принять

$$P(\xi) = \Phi_0(\xi) = \underset{t}{M}\left\{\left(\widetilde{X}\frac{\partial}{\partial \xi}\right) X(t, \xi) - \frac{\partial \widetilde{X}(t, \xi)}{\partial \xi} X_0(\xi)\right\} = \underset{t}{M}\left\{\left(\widetilde{X}\frac{\partial}{\partial \xi}\right) X(t, \xi)\right\}$$

и

$$F(t, \xi) = \sum_{\mu \neq 0} \frac{e^{i\mu t}}{i\mu} \Phi_\mu(\xi) = \widetilde{\left(\widetilde{X}\frac{\partial}{\partial \xi}\right) X(t, \xi)} - \frac{\partial \widetilde{\widetilde{X}}(t, \xi)}{\partial \xi} X_0(\xi). \tag{24.55}$$

Итак, резюмируя, можем утверждать, что при ξ, определяемой уравнением

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon \underset{t}{M}\{X(t, \xi)\} + \varepsilon^2 \underset{t}{M}\left\{\left(\widetilde{X}\frac{\partial}{\partial \xi}\right) X(t, \xi)\right\}, \tag{24.56}$$

выражение

$$x = \xi + \varepsilon \widetilde{X}(t, \xi) + \varepsilon^2 \widetilde{\left(\widetilde{X}\frac{\partial}{\partial \xi}\right) X(t, \xi)} - \varepsilon^2 \frac{\partial \widetilde{\widetilde{X}}(t, \xi)}{\partial \xi} X_0(\xi) \tag{24.57}$$

удовлетворяет уравнению (24.17) с точностью до величин порядка ε^3.

Покажем теперь, что если рассматривать полученное выражение (24.57) как формулу замены переменных, преобразующую неизвестную x, определяемую точным уравнением (24.17), к новой неизвестной ξ, то она будет удовлетворять уравнению вида

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon \underset{t}{M}\{X(t, \xi)\} + \varepsilon^2 \underset{t}{M}\left\{\left(X\frac{\partial}{\partial \xi}\right) X(t, \xi)\right\} + \varepsilon^3 \ldots \tag{24.58}$$

Для этой цели продифференцируем (24.57) и воспользуемся для сокращения обозначением (24.55).

Тогда получим:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d\xi}{dt}+\varepsilon\frac{\partial\widetilde{X}(t,\xi)}{\partial\xi}\frac{d\xi}{dt}+\varepsilon^2\frac{\partial F(t,\xi)}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial\widetilde{X}(t,\xi)}{\partial t}+\varepsilon^2\frac{\partial F(t,\xi)}{\partial t}=$$
$$=\left(1+\varepsilon\frac{\partial\widetilde{X}}{\partial\xi}+\varepsilon^2\frac{\partial F}{\partial\xi}\right)\frac{d\xi}{dt}+\varepsilon\frac{\partial\widetilde{X}(t,\xi)}{\partial t}+\varepsilon^2\frac{\partial F(t,\xi)}{\partial t}, \quad (24.59)$$

где 1 обозначает единичную матрицу.

Но по самому определению интегрирующего оператора имеем:

$$\varepsilon\frac{\partial\widetilde{X}(t,\xi)}{\partial t}+\varepsilon^2\frac{\partial F(t,\xi)}{\partial t}=\varepsilon X(t,\xi)-\varepsilon\underset{t}{M}\{X(t,\xi)\}+\varepsilon^2\left(\widetilde{X}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi)-$$
$$-\varepsilon^2\frac{\partial\widetilde{X}(t,\xi)}{\partial\xi}X_0(\xi)-\varepsilon^2\underset{t}{M}\left\{\left(\widetilde{X}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi)\right\},$$

и потому из (24.59) вытекает:

$$\frac{dx}{dt}=\left(1+\varepsilon\frac{\partial\widetilde{X}}{\partial\xi}+\varepsilon^2\frac{\partial F}{\partial\xi}\right)\frac{d\xi}{dt}+\varepsilon X(t,\xi)+$$
$$+\varepsilon^2\left(\widetilde{X}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi)-\varepsilon^2\frac{\partial\widetilde{X}(t,\xi)}{\partial\xi}X_0(\xi)-$$
$$-\varepsilon X_0(\xi)-\varepsilon^2\underset{t}{M}\left\{\left(\widetilde{X}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi)\right\}.$$

Заметим теперь, что в силу (24.17) это выражение должно быть равным следующему:

$$\varepsilon X(t,x)=\varepsilon X(t,\xi+\varepsilon\widetilde{X}+\varepsilon^2F)=\varepsilon X(t,\xi)+\varepsilon^2\left(\widetilde{X}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi)+\varepsilon^3\ldots$$

Таким образом, видим, что переменная ξ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\xi}{dt}=\left(1+\varepsilon\frac{\partial\widetilde{X}}{\partial\xi}+\varepsilon^2\frac{\partial F}{\partial\xi}\right)^{-1}\Big[\varepsilon X_0(\xi)+$$
$$+\varepsilon^2\frac{\partial\widetilde{X}(t,\xi)}{\partial\xi}X_0(\xi)+\varepsilon^2\underset{t}{M}\left\{\left(\widetilde{X}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi)\right\}+\varepsilon^3\ldots\Big]. \quad (24.60)$$

Но очевидно, что

$$\left(1+\varepsilon\frac{\partial\widetilde{X}}{\partial\xi}+\varepsilon^2\frac{\partial F}{\partial\xi}\right)^{-1}=1-\varepsilon\frac{\partial\widetilde{X}(t,\xi)}{\partial\xi}+\varepsilon^2\ldots,$$

и поэтому уравнение (24.60) может быть представлено в форме

$$\frac{d\xi}{dt}=\varepsilon X_0(\xi)+\varepsilon^2\underset{t}{M}\left\{\left(\widetilde{X}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi)\right\}+\varepsilon^3\ldots,$$

совпадающей с (24.58).

Итак, если ξ удовлетворяет уравнению (24.58), правая часть которого отличается от правой части уравнения (24.56) на величины порядка малости ε^3, то выражение (24.57) представляет точное решение уравнения (24.17).

Итак, в качестве второго приближения примем:

$$x=\xi+\varepsilon\widetilde{X}(t,\xi), \quad (24.61)$$

где ξ определяется уравнением (24.56). Иначе говоря, за второе приближение принимаем форму улучшенного первого приближения, в которой ξ удовлетворяет уравнению уже не первого, а второго приближения.

Выражение (24.57), в котором ξ определено из уравнений (24.56), назовем улучшенным вторым приближением.

Как мы видели, улучшенное второе приближение удовлетворяет точному уравнению (24.17) с погрешностью порядка малости ε^3.

Все сказанное непосредственно обобщается и на уравнения типа

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x) + \varepsilon^2 Y(t, x), \tag{24.62}$$

в которые входят члены второго порядка малости.

В этом случае уравнения второго приближения примут вид

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon \underset{t}{M}\{X(t, \xi)\} + \varepsilon^2 \underset{t}{M}\{Y(t, \xi)\} + \varepsilon^2 \underset{t}{M}\left\{\left(\widetilde{X}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t, \xi)\right\}, \tag{24.63}$$

а выражение второго приближения будет:

$$x = \xi + \varepsilon\widetilde{X}(t, \xi), \tag{24.64}$$

и наконец, для улучшенного второго приближения находим:

$$x = \xi + \varepsilon\widetilde{X}(t, \xi) + \varepsilon^2\widetilde{Y}(t, \xi) + \varepsilon^2\widetilde{\left(\widetilde{X}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t, \xi)} - \varepsilon^2\frac{\partial\widetilde{\widetilde{X}}}{\partial\xi}X_0(\xi). \tag{24.65}$$

Заметим теперь, что

$$\underset{t}{M}\{\varepsilon X(t, \xi + \varepsilon\widetilde{X}) + \varepsilon^2 Y(t, \xi + \varepsilon\widetilde{X})\} = \underset{t}{M}\{\varepsilon X(t, \xi + \varepsilon\widetilde{X}) + \varepsilon^2 Y(t, \xi)\} + \varepsilon^3 \ldots =$$

$$= \underset{t}{M}\{\varepsilon X(t, \xi) + \varepsilon^2\left(\widetilde{X}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t, \xi) + \varepsilon^2 Y(t, \xi)\} + \varepsilon^3 \ldots, \tag{24.66}$$

и поэтому, так как в уравнениях второго приближения члены порядка малости ε^3 не учитываются, (24.63) можно записывать безразлично в форме

$$\frac{d\xi}{dt} = \underset{t}{M}\{\varepsilon X(t, \xi + \varepsilon\widetilde{X}) + \varepsilon^2 Y(t, \xi)\} \tag{24.67}$$

или

$$\frac{d\xi}{dt} = \underset{t}{M}\{\varepsilon X(t, \xi + \varepsilon\widetilde{X}) + \varepsilon^2 Y(t, \xi + \varepsilon\widetilde{X})\}. \tag{24.68}$$

Таким образом, видим, что уравнения второго приближения могут быть получены непосредственно из точных уравнений (24.62), если в их правые части подставить вместо x форму улучшенного первого приближения (или, что то же самое, форму второго приближения) и усреднить по явно содержащемуся времени t, считая в процессе усреднения переменные ξ как бы постоянными, причем величины третьего порядка малости могут отбрасываться.

Этот принцип усреднения может быть также сформулирован следующим образом: уравнения второго приближения получаются усреднением точных уравнений (24.62), в обе части которых подставлено улучшенное первое приближение, по явно содержащемуся времени. В самом деле, уравнения второго приближения вытекают из соотношения

$$\underset{t}{M}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = \underset{t}{M}\{\varepsilon X(t, x) + \varepsilon^2 Y(t, x)\} \tag{24.69}$$

(где в обеих частях вместо x стоит $\xi + \varepsilon\widetilde{X}(t, \xi)$), причем в процессе усреднения $\frac{d\xi}{dt}$, ξ трактуются как постоянные и величины порядка малости ε^3 могут не приниматься во внимание. Для этого стоит лишь заметить, что при указанном истолковании операции $\underset{t}{M}$ имеем, очевидно:

$$\underset{t}{M}\left\{\frac{dx}{dt}\right\}=\underset{t}{M}\left\{\frac{d\xi}{dt}+\varepsilon\frac{\partial\widetilde{X}}{\partial\xi}\frac{d\xi}{dt}+\varepsilon\frac{\partial\widetilde{X}}{\partial t}\right\}=\frac{d\xi}{dt}+\varepsilon\underset{t}{M}\left\{\frac{\partial\widetilde{X}}{\partial\xi}\right\}\frac{d\xi}{dt}+\varepsilon\underset{t}{M}\left\{\frac{\partial\widetilde{X}}{\partial t}\right\}=\frac{d\xi}{dt},$$

и (24.69) переходит в (24.68).

В заключение сделаем некоторые замечания относительно образования высших приближений.

Пусть общее уравнение в стандартной форме будет:

$$\frac{dx}{dt}=\varepsilon X(t, x)+\varepsilon^2X_1(t, x)+\ldots+\varepsilon^mX_{m-1}(t, x), \tag{24.70}$$

где $X_k(t, x)$ — некоторые тригонометрические суммы того же типа, что и $X(t, x)$.

Тогда, чтобы образовать m-е приближение, рассмотрим выражение

$$x=\xi+\varepsilon F_1(t, \xi)+\ldots+\varepsilon^mF_m(t, \xi), \tag{24.71}$$

в котором $F_k(t, \xi)$ являются суммами вида

$$\sum_{\mu\neq 0}e^{i\mu t}F_{k\mu}(\xi)$$

и переменная ξ будет решением уравнения

$$\frac{d\xi}{dt}=\varepsilon P_1(\xi)+\varepsilon^2P_2(\xi)+\ldots+\varepsilon^mP_m(\xi). \tag{24.72}$$

Подставляя (24.71) в (24.70) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε до m-го порядка включительно, подберем $F_1, \ldots, F_m$ и $P_1, \ldots, P_m$ так, чтобы (24.71) удовлетворяло уравнению (24.70) с точностью до величин порядка малости ε^{m+1}.

При этом получим:

$$P_1(\xi)=\underset{t}{M}\{X(t, \xi)\};$$

$$P_2(\xi)=\underset{t}{M}\left\{\left(\widetilde{X}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t, \xi)+X_1(t, \xi)\right\}; \ldots; F_1(t, \xi)=\widetilde{X}(t, \xi);$$

$$F_2(t, \xi)=\widetilde{\left(\widetilde{X}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t, \xi)}-\frac{\partial\widetilde{\widetilde{X}}}{\partial\xi}\underset{t}{M}\{X(t, \xi\}+\widetilde{X}_1(t, \xi); \ldots$$

Если теперь, определив $F_1, \ldots, F_m$ и $P_1, \ldots, P_m$, мы будем рассматривать выражение (24.71) как некоторую формулу замены переменных, преобразующую неизвестную x к новой неизвестной ξ, то она определится уравнением вида

$$\frac{d\xi}{dt}=\varepsilon P_1(\xi)+\varepsilon^2P_2(\xi)+\ldots+\varepsilon^mP_m(\xi)+\varepsilon^{m+1}\ldots \tag{24.73}$$

Таким образом, если переменная ξ удовлетворяет уравнению (24.73), отличающемуся от уравнения (24.72) на величины порядка малости ε^{m+1}, то формула (24.71) представляет точное решение для (24.70).

Поэтому в качестве m-го приближения может быть принято выражение

$$x=\xi+\varepsilon F_1(t, \xi)+\ldots+\varepsilon^{m-1}F_{m-1}(t, \xi),$$

в котором ξ определяется уравнением m-го приближения (24.72). Для такого ξ формула (24.71) дает улучшенное m-е приближение, удовлетворяющее точному уравнению (24.70) с погрешностью порядка ε^{m+1}.

Заметим, что если нам известна форма улучшенного $(m-1)$-го приближения, то уравнения m-го приближения могут быть непосредственно получены из точных уравнений (24.70) при подстановке в них этой формы и при усреднении с помощью оператора $\underset{t}{M}$. В основном в приложениях вышеизложенной теории возмущений используется главным образом первое и иногда также второе приближение. Высшие приближения применяются редко ввиду быстрого возрастания сложности их фактического построения.

В качестве примера, иллюстрирующего изложенную теорию, рассмотрим колебания физического маятника, представляющего собой твердое тело, которое может свободно вращаться в определенной вертикальной плоскости вокруг своей точки подвеса. Пусть точка подвеса совершает в вертикальном направлении синусоидальные колебания с малой амплитудой a и высокой частотой ω таким образом, что*)

$$\omega > \omega_0 \frac{l}{a}; \quad \frac{a}{l} \ll 1. \tag{24.74}$$

Как оказывается, неустойчивое верхнее положение равновесия маятника может сделаться устойчивым.

Чтобы рассмотреть это интересное явление, составим уравнение колебаний маятника с вибрирующей точкой подвеса. Считая затухание пропорциональным скорости, имеем**):

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \lambda \frac{d\theta}{dt} + \frac{g - a\omega^2 \sin \omega t}{l} \sin \theta = 0, \tag{24.75}$$

где θ — угол отклонения, отсчитываемый от нижнего положения равновесия; $y = a \sin \omega t$ — вертикальное перемещение точки подвеса; λ — коэффициент затухания. В отношении величины затухания допустим, что при фиксированной точке подвеса движение маятника при малых отклонениях от нижнего положения равновесия имеет колебательный характер. Тогда, как известно,

$$\frac{\lambda^2}{4} < \omega^2. \tag{24.76}$$

Чтобы выявить в рассматриваемом уравнении (24.75) малый параметр, целесообразно ввести «безразмерное» время. Именно, вместо времени t, измеряемого в секундах, введем время τ, для которого единицей измерения будет отнесенный к 2π период колебаний точки подвеса,

---

*) Здесь l — приведенная длина маятника, $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ — собственная частота малых колебаний.

**) В самом деле, уравнение колебаний маятника с покоящейся точкой подвеса, как известно, будет:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \lambda \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0, \tag{α}$$

но с точки зрения принципа относительности движение маятника с вертикально вибрирующей точкой подвеса эквивалентно движению маятника с покоящейся точкой подвеса, находящемуся в поле «силы тяжести» с ускорением $g + y''$. Заменяя в (α) g на $g + y''$, в результате приходим к уравнению (24.75).

т. е. $\frac{1}{\omega}$. Имеем, очевидно,

$$\tau = \omega t; \quad \frac{d}{d\tau} = \frac{1}{\omega}\frac{d}{dt}; \quad \frac{d^2}{d\tau^2} = \frac{1}{\omega^2}\frac{d^2}{dt^2},$$

и потому из (24.75) следует:

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \frac{\lambda}{\omega}\frac{d\theta}{d\tau} + \left\{\frac{g}{l\omega^2} - \frac{a}{l}\sin\tau\right\}\sin\theta = 0. \qquad (24.77)$$

Положим для сокращения

$$k = \frac{\omega_0}{\omega} : \frac{a}{l}; \quad \alpha = \frac{\lambda}{2\omega_0}k. \qquad (24.78)$$

Тогда

$$\frac{g}{l\omega^2} = \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = k^2\left(\frac{a}{l}\right)^2; \quad \frac{\lambda}{\omega} = \frac{\lambda}{\omega_0}\frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\lambda}{\omega_0}k\frac{a}{l} = 2\alpha\frac{a}{l},$$

и уравнение (24.77) может быть записано в виде

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + 2\alpha\frac{a}{l}\frac{d\theta}{d\tau} + \left\{k^2\left(\frac{a}{l}\right)^2 - \frac{a}{l}\sin\tau\right\}\sin\theta = 0.$$

Принимая в качестве малого параметра ε отношение амплитуды колебаний точки подвеса к приведенной длине маятника, имеем окончательно:

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + 2\varepsilon\alpha\frac{d\theta}{d\tau} + \{k^2\varepsilon^2 - \varepsilon\sin\tau\}\sin\theta = 0, \qquad (24.79)$$

где согласно (24.74), (24.75) и (24.78) постоянные α и k будут меньше единицы:

$$\alpha < 1, \quad k < 1.$$

Так как полученное уравнение, содержащее малый параметр ε, не является уравнением в стандартной форме, то для непосредственного приложения ранее разработанной теории следует предварительно преобразовать его к этой форме.

Как оказывается, посредством простой замены переменных рассматриваемое дифференциальное уравнение второго порядка может быть преобразовано к двум уравнениям первого порядка в стандартной форме. Для этого введем вместо одной неизвестной функции времени θ две новые неизвестные φ и Ω с помощью формул

$$\theta = \varphi - \varepsilon\sin\tau\sin\varphi, \qquad (24.80)$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \varepsilon\Omega - \varepsilon\cos\tau\sin\varphi. \qquad (24.81)$$

Дифференцируя (24.80) и сравнивая с (24.81), имеем:

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{d\varphi}{d\tau} - \varepsilon\sin\tau\cos\varphi\frac{d\varphi}{d\tau} - \varepsilon\cos\tau\sin\varphi = \varepsilon\Omega - \varepsilon\cos\tau\sin\varphi,$$

откуда

$$(1 - \varepsilon\sin\tau\cos\varphi)\frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon\Omega. \qquad (24.82)$$

Дифференцируя (24.81) и подставляя в уравнение (24.79), получаем:

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} = \varepsilon\frac{d\Omega}{d\tau} - \varepsilon\cos\tau\cos\varphi\frac{d\varphi}{d\tau} + \varepsilon\sin\tau\sin\varphi = (\varepsilon\sin\tau - k^2\varepsilon^2)\sin\theta - 2\alpha\varepsilon\frac{d\theta}{d\tau},$$

и поэтому

$$\varepsilon\frac{d\Omega}{d\tau}=\varepsilon\cos\tau\cos\varphi\frac{d\varphi}{d\tau}+\varepsilon\sin\tau\{\sin(\varphi-\varepsilon\sin\tau\sin\varphi)-\sin\varphi\}-$$
$$-k^2\varepsilon^2\sin(\varphi-\varepsilon\sin\tau\sin\varphi)-2\alpha\varepsilon(\varepsilon\Omega-\varepsilon\cos\tau\sin\varphi),$$

откуда, сокращая на ε и принимая во внимание (24.82), получаем:

$$\frac{d\Omega}{d\tau}=\{\sin(\varphi-\varepsilon\sin\tau\sin\varphi)-\sin\varphi\}\sin\tau-$$
$$-k^2\varepsilon\sin(\varphi-\varepsilon\sin\tau\sin\varphi)+\frac{\varepsilon\Omega\cos\tau\cos\varphi}{1-\varepsilon\sin\tau\cos\varphi}-2\alpha\varepsilon(\Omega-\cos\tau\sin\varphi). \quad (24.83)$$

Таким образом, видим, что благодаря (24.82) и (24.83) переменные φ, Ω удовлетворяют дифференциальным уравнениям в стандартной форме:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\varphi}{d\tau}&=\varepsilon\Omega+\varepsilon^2\ldots,\\ \frac{d\Omega}{d\tau}&=\varepsilon\{-\sin^2\tau\sin\varphi\cos\varphi-k^2\sin\varphi+\\ &+\Omega\cos\tau\cos\varphi-2\alpha\Omega+2\alpha\cos\tau\sin\varphi\}+\varepsilon^2\ldots\end{aligned}\right\} \quad (24.84)$$

Применяя к ним принцип усреднения и учитывая тождественные соотношения

$$\underset{\tau}{M}\{\cos\tau\}=0,\quad \underset{\tau}{M}\{\sin^2\tau\}=\frac{1}{2},$$

получаем уравнения первого приближения в виде

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\varphi}{d\tau}&=\varepsilon\Omega,\\ \frac{d\Omega}{d\tau}&=-\varepsilon\left\{\frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi+k^2\sin\varphi+2\alpha\Omega\right\}.\end{aligned}\right\} \quad (24.85)$$

Эти два уравнения первого порядка (24.85), очевидно, эквивалентны одному уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2}+2\varepsilon\alpha\frac{d\varphi}{d\tau}+\varepsilon^2\left(k^2+\frac{1}{2}\cos\varphi\right)\sin\varphi=0. \quad (24.86)$$

Полученное уравнение первого приближения гораздо проще точного уравнения (24.79) хотя бы тем, что не содержит явно времени. Оно представляет собой уравнение колебаний системы, подобной маятнику с неподвижной точкой подвеса, у которой «восстанавливающая сила» пропорциональна не $\sin\varphi$, а $\left(k^2+\frac{1}{2}\cos\varphi\right)\sin\varphi$. Любопытно отметить, между прочим, что такого рода системами являются, например, некоторые гироскопы *).

При отсутствии затухания ($\alpha=0$) уравнение (24.86) полностью решается в эллиптических функциях. Однако для рассмотрения интересующего нас вопроса не требуется иметь выражения общего решения. Непосредственно из (24.86) видим, что это уравнение допускает квазистатическое решение $\varphi=\pi$, соответствующее верхнему положению равновесия маятника.

*) Б. В. Булгаков, Прикладная теория гироскопов, М., ГОНТИ, 1939, стр. 93, формула (10).

Для исследования устойчивости рассмотрим малые отклонения $\delta\varphi = \varphi - \pi$ от этого положения. Тогда уравнение в вариациях для $\delta\varphi$ примет вид

$$\frac{d^2\delta\varphi}{d\tau^2} + 2\varepsilon\alpha\frac{d\delta\varphi}{d\tau} + \varepsilon^2\left(\frac{1}{2} - k^2\right)\delta\varphi = 0. \tag{24.87}$$

Так как здесь $\varepsilon\alpha > 0$, то условие устойчивости будет:

$$\frac{1}{2} - k^2 > 0,$$

т. е., принимая во внимание определение k:

$$\omega > \sqrt{2}\,\omega_0\,\frac{l}{a}. \tag{24.88}$$

Итак, если частота вибраций точки подвеса достаточно велика, чтобы удовлетворить неравенство (24.88), то верхнее положение маятника становится устойчивым.

Пусть, например, $l = 40$ *см*, $a = 2$ *см*. В этом случае условие (24.88) дает:

$$\omega > \sqrt{2}\sqrt{\frac{981}{40}}\,20 \approx 140\,\frac{1}{сек}.$$

Верхнее положение маятника будет, следовательно, устойчивым, если число циклов колебаний точки подвеса больше, чем $\frac{\omega}{2\pi}$, т. е. больше 22,3 колебания в секунду.

Если рассмотрим аналогично квазистатическое решение $\varphi = 0$, соответствующее нижнему положению равновесия, то убедимся, что оно остается устойчивым при любых k и частота колебаний при малых отклонениях без учета затухания будет равна $\varepsilon\sqrt{\frac{1}{2} + k^2}$ для времени τ и соответственно

$$\varepsilon\omega\sqrt{\frac{1}{2} + k^2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{a\omega}{l}\right)^2 + \omega_0^2}$$

для времени t.

Таким образом, для рассмотренного выше конкретного примера при числе колебаний точки подвеса, равном 60 в секунду $\left(\omega = 377\,\frac{1}{сек}\right)$, частота малых колебаний маятника будет $\omega_\mu = 14{,}2\,\frac{1}{сек}$, тогда как в случае покоящейся точки подвеса эта частота равна $\omega_\nu = 4{,}94\,\frac{1}{сек}$. Эффективная восстанавливающая сила увеличивается здесь в $\left(\frac{\omega_\mu}{\omega_\nu}\right)^2 = 8{,}2$ раза. Эта сила при малых отклонениях будет, следовательно, такой же, как у соответствующего обычного маятника, в 8,2 раза более тяжелого.

Заметим, наконец, что уравнение первого приближения (24.86) дает нам возможность рассматривать вопрос об устойчивости не только при малых отклонениях, но также и при больших.

Перейдем к исследованию колебаний маятника во втором приближении. Нетрудно убедиться, что уравнения второго приближения совпадают с уравнениями первого приближения.

Поэтому при построении второго приближения будем исследовать другой возможный тип движения маятника. Оказывается, что маятник может синхронно вращаться с угловой скоростью ω, затрачивая работу на преодоление сопротивлений, если только последние не превзойдут известной величины. Здесь возможны колебания оси маятника около оси, вращающейся равномерно с угловой скоростью, точно равной ω.

Чтобы несколько упростить выкладки, исключим действие силы тяжести, допустив для этого, что движение маятника совершается в горизонтальной плоскости.

Тогда, положив в уравнении (24.79) $k=0$, получим:

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2}+2\varepsilon\alpha\frac{d\theta}{d\tau}-\varepsilon\sin\tau\sin\theta=0. \tag{24.89}$$

Угол θ измеряет отклонение оси маятника от некоторой неподвижной оси, и так как предполагается исследовать колебания маятника около оси, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω, то целесообразно ввести вместо угла θ угол ψ:

$$\psi=\theta-\omega t,$$

или для безразмерного времени τ, использованного в уравнении (24.89),

$$\psi=\theta-\tau.$$

Очевидно, что для угла ψ уравнение колебаний будет:

$$\frac{d^2\psi}{d\tau^2}+2\varepsilon\alpha\frac{d\psi}{d\tau}-\varepsilon\sin\tau\sin(\psi+\tau)+2\varepsilon\alpha=0. \tag{24.90}$$

Для приведения этого уравнения (24.90) к стандартной форме положим

$$\psi=\psi,\quad \frac{d\psi}{d\tau}=\sqrt{\varepsilon}\,\nu. \tag{24.91}$$

В результате получаем два уравнения первого порядка относительно неизвестных ψ и ν:

$$\frac{d\psi}{d\tau}=\sqrt{\varepsilon}\,\nu,$$

$$\frac{d\nu}{d\tau}=\sqrt{\varepsilon}\sin\tau\sin(\psi+\tau)-2\sqrt{\varepsilon}\,\alpha-2\left(\sqrt{\varepsilon}\right)^2\alpha\nu, \tag{24.92}$$

в которых за малый параметр может быть принят $\sqrt{\varepsilon}$.

Так как

$$\sin\tau\sin(\psi+\tau)=\frac{1}{2}\cos\psi-\frac{1}{2}\cos(\psi+2\tau),$$

улучшенное первое приближение (второе приближение) будет:

$$\psi=\psi,\quad \nu=\Omega-\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}\widetilde{\cos}(\psi+2\tau)=\Omega-\frac{\sqrt{\varepsilon}}{4}\sin(\psi+2\tau). \tag{24.93}$$

Подставляя (24.93) в правые части уравнений (24.92) и выполняя усреднение по τ с постоянными ψ, Ω, приходим к уравнениям второго приближения:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\psi}{d\tau}&=\sqrt{\varepsilon}\,\Omega,\\ \frac{d\Omega}{d\tau}&=\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}\cos\psi-2\sqrt{\varepsilon}\,\alpha-2\varepsilon\alpha\Omega,\end{aligned}\right\} \tag{24.94}$$

или

$$\frac{d^2\psi}{d\tau^2}+2\varepsilon\alpha\frac{d\psi}{d\tau}-\frac{\varepsilon\cos\psi}{2}+2\varepsilon\alpha=0.$$

Если возвратиться к времени t, измеряемому в секундах $\left(t=\frac{\tau}{\omega}\right)$, то полученное уравнение второго приближения может быть представлено в виде

$$\frac{d^2\psi}{dt^2}+\lambda\frac{d\psi}{dt}-\frac{a\omega^2}{2l}\cos\psi+\lambda\omega=0. \qquad (24.95)$$

Заметим, между прочим, что в принятых обозначениях уравнение первого приближения было бы

$$\frac{d^2\psi}{dt^2}-\frac{a\omega^2}{2l}\cos\psi+\lambda\omega=0. \qquad (24.96)$$

Оно отличается от уравнений второго приближения отсутствием в нем члена $\lambda\frac{d\psi}{dt}$, вызывающего затухание колебаний.

Рассматривая уравнение второго приближения, видим, что оно допускает квазистатические решения

$$\psi=\psi_0, \quad \text{где} \quad \frac{a\omega^2}{2l}\cos\psi_0=\lambda\omega, \qquad (24.97)$$

соответствующие вращению маятника $(\theta=\omega t+\psi_0)$ с постоянной угловой скоростью ω, если только

$$\lambda\omega<\frac{a\omega^2}{2l}. \qquad (24.98)$$

При

$$\lambda\omega>\frac{a\omega^2}{2l} \qquad (24.99)$$

такие квазистатические решения невозможны.

Для исследования устойчивости квазистатических решений (24.97) в случае (24.98) рассмотрим малые отклонения ψ от ψ_0:

$$\psi=\psi_0+\delta\psi.$$

Для малых отклонений уравнение (24.95) дает:

$$\frac{d^2\delta\psi}{dt^2}+\lambda\frac{d\delta\psi}{dt}+\frac{a\omega^2}{2l}\sin\psi_0\delta\psi=0. \qquad (24.100)$$

Исследуя соответствующее характеристическое уравнение

$$p^2+\lambda p+\frac{a\omega^2}{2l}\sin\psi_0=0, \qquad (24.101)$$

убеждаемся, что ввиду положительности коэффициента λ при $\frac{a\omega^2}{2l}\sin\psi_0>0$ вещественные части корней этого уравнения отрицательны; при $\frac{a\omega^2}{2l}\sin\psi_0<0$ это уравнение имеет корень с положительной вещественной частью.

Итак, решение (24.97) является устойчивым при $\sin\psi_0>0$ и неустойчивым при $\sin\psi_0<0$. Имеем, следовательно, одно устойчивое квазистатическое решение $0<\psi_0<\pi$ и одно неустойчивое $\pi<\psi_0<2\pi$.

Заметим, что если бы мы ограничились рассмотрением уравнения первого приближения (24.96), то в (24.100) не было бы члена $\lambda \frac{d\delta\psi}{dt}$ и характеристическое уравнение имело бы вид

$$p^2 + \frac{a\omega^2}{2l} \sin \psi_0 = 0.$$

Следовательно, при $\sin \psi_0 > 0$ его корни оказываются чисто мнимыми, с вещественной частью, равной нулю, и вопрос об устойчивости неясен. О возможности таких случаев было упомянуто выше. Как видим, при рассмотрении второго приближения вещественные части корней характеристического уравнения отличны от нуля, и поэтому возможно выяснить вопрос устойчивости.

Скажем в заключение несколько слов по поводу условия существования квазистатических решений (24.97).

Заметим, что если I обозначает момент инерции маятника, то $I\lambda\omega$ представит, очевидно, момент сил сопротивления для маятника, вращающегося с угловой скоростью ω.

Умножая на ω момент сил сопротивления, получим мощность N, расходуемую на преодоление этих сил:

$$N = I\lambda\omega^2.$$

Условие (24.98) показывает, что для возможности установившегося вращения маятника с угловой скоростью ω необходимо, чтобы мощность, расходуемая на преодоление сил сопротивления, не достигала бы некоторого предельного значения, а именно:

$$N < \frac{I}{2} \frac{a}{l} \omega^3. \tag{24.102}$$

Так, например, если момент инерции маятника $I = 0{,}5$ *кг см сек*^{2}, приведенная длина $l = 40$ *см* и точка подвеса совершает в секунду 60 колебаний $\left(\omega = 377 \frac{1}{сек}\right)$ с амплитудой $a = 2$ *см*, то

$$\frac{I}{2} \frac{a}{l} \omega^3 = \frac{(377)^3}{80} \text{ кг см сек}^{-1} = 6698 \text{ кг м сек}^{-1}.$$

В данном случае, следовательно, согласно условию (24.102) для возможности вращения маятника с угловой скоростью ω (60 оборотов в секунду) необходимо, чтобы мощность, расходуемая на преодоление сопротивлений, не превосходила бы 6698 *кг м сек*$^{-1}$.

§ 25. Случай быстро вращающейся фазы

В настоящем параграфе перейдем к обобщению метода усреднения на случай системы с быстро вращающейся фазой.

Соответствующее исследование было выполнено Д. Н. Зубаревым совместно с одним из авторов настоящей монографии [10].

Рассмотрим динамическую систему, состояние которой характеризуется угловой переменной α, r переменными $x_1, x_2, \ldots, x_r$ и описывается следующей системой уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_k}{dt} &= X_k(\alpha, x_1, \ldots, x_r) \quad (k = 1, 2, \ldots, r), \\ \frac{d\alpha}{dt} &= \lambda\omega(x_1 \ldots, x_r) + A(\alpha, x_1 \ldots, x_r), \end{aligned}\right\} \tag{25.1}$$