Заметим, что если бы мы ограничились рассмотрением уравнения первого приближения (24.96), то в (24.100) не было бы члена $\lambda \frac{d\delta\psi}{dt}$ и характеристическое уравнение имело бы вид

$$p^2 + \frac{a\omega^2}{2l} \sin \psi_0 = 0.$$

Следовательно, при $\sin \psi_0 > 0$ его корни оказываются чисто мнимыми, с вещественной частью, равной нулю, и вопрос об устойчивости неясен. О возможности таких случаев было упомянуто выше. Как видим, при рассмотрении второго приближения вещественные части корней характеристического уравнения отличны от нуля, и поэтому возможно выяснить вопрос устойчивости.

Скажем в заключение несколько слов по поводу условия существования квазистатических решений (24.97).

Заметим, что если I обозначает момент инерции маятника, то $I\lambda\omega$ представит, очевидно, момент сил сопротивления для маятника, вращающегося с угловой скоростью ω.

Умножая на ω момент сил сопротивления, получим мощность N, расходуемую на преодоление этих сил:

$$N = I\lambda\omega^2.$$

Условие (24.98) показывает, что для возможности установившегося вращения маятника с угловой скоростью ω необходимо, чтобы мощность, расходуемая на преодоление сил сопротивления, не достигала бы некоторого предельного значения, а именно:

$$N < \frac{I}{2} \frac{a}{l} \omega^3. \tag{24.102}$$

Так, например, если момент инерции маятника $I = 0{,}5$ *кг см сек*^{2}, приведенная длина $l = 40$ *см* и точка подвеса совершает в секунду 60 колебаний $\left(\omega = 377 \frac{1}{сек}\right)$ с амплитудой $a = 2$ *см*, то

$$\frac{I}{2} \frac{a}{l} \omega^3 = \frac{(377)^3}{80} \text{ кг см сек}^{-1} = 6698 \text{ кг м сек}^{-1}.$$

В данном случае, следовательно, согласно условию (24.102) для возможности вращения маятника с угловой скоростью ω (60 оборотов в секунду) необходимо, чтобы мощность, расходуемая на преодоление сопротивлений, не превосходила бы 6698 *кг м сек*$^{-1}$.

§ 25. Случай быстро вращающейся фазы

В настоящем параграфе перейдем к обобщению метода усреднения на случай системы с быстро вращающейся фазой.

Соответствующее исследование было выполнено Д. Н. Зубаревым совместно с одним из авторов настоящей монографии [10].

Рассмотрим динамическую систему, состояние которой характеризуется угловой переменной α, r переменными $x_1, x_2, \ldots, x_r$ и описывается следующей системой уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_k}{dt} &= X_k(\alpha, x_1, \ldots, x_r) \quad (k = 1, 2, \ldots, r), \\ \frac{d\alpha}{dt} &= \lambda\omega(x_1 \ldots, x_r) + A(\alpha, x_1 \ldots, x_r), \end{aligned}\right\} \tag{25.1}$$

где λ — большой параметр, $\lambda\omega$ соответствует частоте вращения α; $X_k(\alpha, x_1, \ldots, x_r)$, $A(\alpha, x_1 \ldots, x_r)$ — периодические функции угловой переменной α с периодом 2π.

Заметим, что в частном случае, когда $\omega = \text{const}$, а $A(\alpha, x_1 \ldots, x_r) = 0$, система (25.1) может быть непосредственно приведена к стандартной форме.

В самом деле, в данном случае имеем:

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k(\lambda\omega t + \varphi, x_1, \ldots, x_r) \quad (\varphi = \text{const}),$$

откуда, вводя новую независимую переменную

$$\lambda\omega t = \tau,$$

получим уравнения типа (24.14), где

$$\varepsilon = \frac{1}{\lambda\omega}.$$

В общем случае системы (25.1) мы также можем воспользоваться основной идеей метода усреднения.

Покажем, что переменную α можно исключить из правых частей уравнений (25.1) с любой степенью точности в разложении по степеням $\frac{1}{\lambda}$. Для этого найдем замену переменных:

$$\left.\begin{aligned} x_k &= \bar{x}_k + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} \xi_k^{(n)}(\bar{\alpha}, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_r) \\ &\qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots, r), \\ \alpha &= \bar{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} U_n(\bar{\alpha}, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_r), \end{aligned}\right\} \tag{25.2}$$

с помощью которой систему (25.1) можно привести к виду

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\bar{x}_k}{dt} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} X_k^{(n)}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_r), \\ \frac{d\bar{\alpha}}{dt} &= \lambda\omega(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_r) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} \Omega_n(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_r) \end{aligned}\right\} \tag{25.3}$$

так, чтобы коэффициенты в уравнении (25.3) уже не зависели от угловой переменной $\bar{\alpha}$.

Физический смысл преобразования (25.2) заключается в разложении действительного движения, описываемого переменными $x_1, x_2, \ldots, x_r, \alpha$, на усредненное движение с координатами $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_r$ и «дрожание», описываемое углом $\bar{\alpha}$ и функциями

$$U_n(\bar{\alpha}, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_r) \quad \text{и} \quad \xi_k(\bar{\alpha}, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_r).$$

Определение функций, входящих в уравнение (25.2), вообще говоря, неоднозначно ввиду произвола, с которым можно относить различные члены разложения или к основному, или к высшим членам ряда. Указанное обстоятельство уже неоднократно отмечалось.

В случае, если имеем какое-нибудь конкретное разложение (25.2), всегда можно совершить замену переменных вида

$$\bar{x}_k = \bar{\bar{x}}_k + \varepsilon f_k(\bar{\bar{x}}_1, \ldots, \bar{\bar{x}}_r) + \varepsilon^2 \ldots,$$

в результате чего получим другую возможную форму разложений, поскольку $\bar{\bar{x}}_k$ с тем же правом может быть принято за новую $\bar{x}_k$.

Для получения определенных однозначных выражений коэффициентов (25.2) необходимо задать какие-либо дополнительные условия. Допустим, что U_n и $\xi_k^{(n)}$ не должны содержать нулевых гармоник по $\bar{\alpha}$, считая тем самым, что в $\bar{x}_k$ и $\bar{\alpha}$ включено все усредненное движение.

Можно было бы наложить и другие дополнительные условия. Так, например, если бы система была канонической, можно было бы потребовать, чтобы уравнения усредненного движения (25.3) также были каноническими. Поскольку указанная неоднозначность имеет тривиальный характер, мы не будем детально останавливаться на возможных случаях.

Подставляя (25.2) в (25.1) и приравнивая члены при λ, λ^0, λ^{-1}, получим систему четырех уравнений для определения шести функций: Ω_0, Ω_1, $X_k^{(0)}$, $X_k^{(1)}$, $\xi_k^{(1)}$, U_1

$$\left.\begin{aligned}
&X_k^{(0)} + \frac{\partial \xi_k^{(1)}}{\partial \bar{\alpha}}\omega = X_k \quad (k = 1, 2, \ldots, r),\\
&X_k^{(1)} + \frac{\partial \xi_k^{(2)}}{\partial \bar{\alpha}}\omega + \frac{\partial \xi_k^{(1)}}{\partial \bar{\alpha}}\Omega_0 + \sum_{q=1}^{r} \frac{\partial \xi_k^{(1)}}{\partial \bar{x}_q} X_q^{(0)} = \frac{\partial X_k}{\partial \bar{\alpha}} U_1 + \sum_{q=1}^{r} \frac{\partial X_k}{\partial \bar{x}_q}\xi_q^{(1)},\\
&\Omega_1 + \frac{\partial U_2}{\partial \bar{\alpha}}\omega + \frac{\partial U_1}{\partial \bar{\alpha}}\Omega_0 + \sum_{q=1}^{r} \frac{\partial U_1}{\partial \bar{x}_q} X_q^{(0)} =\\
&\quad = \sum_{p=1}^{r} \frac{\partial \omega}{\partial \bar{x}_p}\xi_p^{(2)} + \frac{1}{2}\sum_{p,q} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \bar{x}_p\,\partial \bar{x}_q}\xi_p^{(1)}\xi_q^{(1)} + \frac{\partial A}{\partial \bar{\alpha}} U_1 + \sum_{q=1}^{r} \frac{\partial A}{\partial \bar{x}_q}\xi_q^{(1)},\\
&\Omega_0 + \frac{\partial U_1}{\partial \bar{\alpha}}\omega = \sum_{q=1}^{r} \frac{\partial \omega}{\partial \bar{x}_q}\xi_q^{(1)} + A.
\end{aligned}\right\} \tag{25.4}$$

В системе (25.4) число неизвестных больше числа уравнений, что вполне согласуется со сделанным выше замечанием о неоднозначности. Недостающие уравнения получаются из условия отсутствия нулевых гармоник у $\xi_k^{(n)}$ и U_n, т. е.

$$\tilde{\xi}_k^{(n)} = 0, \quad \tilde{U}_n = 0 \tag{25.5}$$

(волнистой чертой обозначено усреднение по $\bar{\alpha}$).

Разложим функции $A(\bar{\alpha}, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_r)$, $X_k(\bar{\alpha}, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_r)$ в ряды Фурье:

$$\left.\begin{aligned}
A(\bar{\alpha}, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_r) &= \sum_{-\infty<m<\infty} A_m e^{im\bar{\alpha}},\\
X_k(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{x}_r) &= \sum_{-\infty<m<\infty} X_{km} e^{im\bar{\alpha}}.
\end{aligned}\right\} \tag{25.6}$$

Усредняя уравнения (25.4) по $\bar{\alpha}$, найдем:

$$X_k^{(0)} = X_{k,0}, \tag{25.7}$$

$$\xi_k^{(0)} = \frac{1}{\omega} \sum_{n \neq 0} X_{k,m} \frac{e^{in\bar{\alpha}}}{in}, \tag{25.8}$$

$$\Omega_0 = A_0, \tag{25.9}$$

$$U_1 = \sum_{n \neq 0} \frac{A_n e^{in\bar{\alpha}}}{in\omega} - \sum_{n \neq 0} \sum_{q=1}^{r} \frac{\partial \omega}{\partial \bar{x}_q} \frac{X_{q,n}}{n^2\omega^2} e^{in\bar{\alpha}}, \tag{25.10}$$

$$\Omega_1 = \frac{1}{2} \sum_{p,q} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \bar{x}_p \partial \bar{x}_q} \widetilde{\xi_p^{(1)} \xi_q^{(1)}} + \widetilde{\frac{\partial A}{\partial \bar{\alpha}} U_1} + \sum_{q=1}^{r} \widetilde{\frac{\partial A}{\partial \bar{x}_q} \xi_q^{(1)}}, \tag{25.11}$$

$$X_k^{(1)} = \widetilde{\frac{\partial X_k}{\partial \bar{\alpha}} U_1} + \sum_{q=1}^{r} \widetilde{\frac{\partial X_k}{\partial \bar{x}_q} \xi_q^{(1)}}. \tag{25.12}$$

С помощью (25.8), (25.10) уравнения (25.11), (25.12) приводятся к виду

$$\Omega_1 = \frac{1}{2} \sum_{\substack{p,q,n \\ (n \neq 0)}} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \bar{x}_p \partial \bar{x}_q} \frac{1}{\omega^2 n^2} X_{p,n} X_{q,-n} + \sum_{\substack{q,n \\ (n \neq 0)}} \frac{\partial \omega}{\partial \bar{x}_q} \frac{1}{i\omega^2 n} A_n X_{q,-n} -$$
$$- \sum_{n \neq 0} \frac{1}{\omega} A_k A_{-n} - \sum_{\substack{q,n \\ (n \neq 0)}} \frac{1}{i\omega n} \frac{\partial A_n}{\partial \bar{x}_q} X_{q,-n}, \tag{25.13}$$

$$X_k^{(1)} = - \sum_{(n \neq 0)} \frac{1}{\omega} X_{k,n} A_{-n} - \sum_{\substack{n,q \\ (n \neq 0)}} \frac{1}{in\omega} \frac{\partial X_{k,n}}{\partial \bar{x}_q} X_{q,-n} +$$
$$+ \sum_{\substack{n,q \\ (n \neq 0)}} \frac{\partial \omega}{\partial \bar{x}_q} \frac{1}{i\omega^2 n} X_{k,n} X_{q,-n}. \tag{25.14}$$

Выражения (25.7) — (25.10), (25.13), (25.14) дают искомое решение системы (25.4).

Перейдем от комплексных рядов Фурье (25.6) к действительным рядам:

$$\left.\begin{aligned} A &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{f_n \cos n\bar{\alpha} + g_n \sin n\bar{\alpha}\}, \\ X_k &= X_{k,0} + \sum_{n=1}^{\infty} \{F_{k,n} \cos n\bar{\alpha} + G_{k,n} \sin n\bar{\alpha}\}. \end{aligned}\right\} \tag{25.15}$$

Представим формулы для замены переменных (25.2) с помощью уравнений (25.8), (25.10), (25.15) в виде

$$\left.\begin{aligned} x_k &= \bar{x}_k + \frac{1}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\omega}\{-G_{k,n}\cos n\bar{\alpha} + F_{k,n}\sin n\bar{\alpha}\} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \\ \alpha &= \bar{\alpha} + \frac{1}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\omega}\{-g_n\cos n\bar{\alpha} + f_n\sin n\bar{\alpha}\} - \\ &\quad -\frac{1}{\lambda}\sum_{\substack{n,q\\(n\neq 0)}}\frac{1}{n^2\omega^2}\frac{\partial\omega}{\partial\bar{x}_q}\{F_{q,n}\cos n\bar{\alpha} + G_{q,n}\sin n\bar{\alpha}\} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \end{aligned}\right\} \quad (25.16)$$

Система уравнений (25.3) после подстановки найденных коэффициентов из (25.7) — (25.10), (25.13), (25.14) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}_k}{dt} &= X_{k,0} - \frac{1}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\omega}\{F_{k,n}f_n + G_{k,n}g_n\} - \\ &\quad -\frac{1}{\lambda}\sum_{\substack{n,q\\(n\neq 0)}}\frac{1}{2n\omega}\left\{\frac{\partial F_{k,n}}{\partial\bar{x}_q}G_{q,n} - \frac{\partial G_{k,n}}{\partial\bar{x}_q}F_{q,n}\right\} + \\ &\quad +\frac{1}{\lambda}\sum_{\substack{q,n\\(n\neq 0)}}\frac{1}{2\omega^2 n}\frac{\partial\omega}{\partial\bar{x}_q}\{F_{k,n}G_{q,n} - G_{q,n}F_{q,n}\} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \end{aligned} \quad (25.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\alpha}}{dt} &= \lambda\omega + A_0 + \frac{1}{\lambda}\sum_{\substack{n,p,q\\(n\neq 0)}}\frac{1}{4\omega^2 n^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial\bar{x}_p\partial\bar{x}_q}\{F_{p,n}F_{q,n} + G_{p,n}G_{q,n}\} - \\ &\quad -\frac{1}{\lambda}\sum_{\substack{n,q\\(n\neq 0)}}\frac{1}{2\omega^2 n}\frac{\partial\omega}{\partial\bar{x}_q}\{g_nF_{q,n} - f_nG_{q,n}\} + \\ &\quad +\frac{1}{\lambda}\sum_{\substack{n,q\\(n\neq 0)}}\frac{1}{2\omega n}\left\{\frac{\partial g_n}{\partial\bar{x}_q}F_{q,n} - \frac{\partial f_n}{\partial\bar{x}_q}G_{q,n}\right\} - \\ &\quad -\frac{1}{\lambda}\sum_{n}\frac{1}{2\omega}\{f_n^2 + g_n^2\} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \end{aligned} \quad (25.18)$$

Система уравнений (25.17), (25.18) дает решение поставленной в начале параграфа задачи с точностью до величин первого порядка малости включительно относительно параметра $\frac{1}{\lambda}$. Первая группа уравнений этой системы (25.17) выражает систематическое движение. Уравнение (25.18) для $\bar{\alpha}$ выражает «дрожание». Таким образом, систематическое движение отделено от «дрожания» с точностью до членов порядка $\frac{1}{\lambda^2}$.

Рассмотрим в качестве примера движение заряженной частицы в магнитном поле. Эта задача представляет интерес для ряда вопросов теоретической физики.

Например, в космической электродинамике возникает задача об исследовании траекторий космических частиц в неоднородных полях. Эта же задача возникает в теории некоторых электротехнических приборов, применяемых в радиотехнике, аналогичных магнетрону.

Точное интегрирование уравнений движения заряженной частицы в неоднородном электрическом и магнитном поле затруднительно и в большинстве случаев может быть выполнено лишь численными методами. Однако и это не всегда оказывается практически возможным. В частности, трудности численного счета становятся почти непреодолимыми в том случае, если частица делает за время своего движения большое количество оборотов по ларморовской окружности. Но именно в этом случае можно воспользоваться только что изложенным методом асимптотического приближения, который позволяет обойти трудности при вычислении.

Допустим, что магнитное поле мало меняется на длине ларморовского радиуса:

$$R_L \frac{1}{H}\frac{dH}{dx} \ll 1, \tag{25.19}$$

где $R_L = \frac{w}{\omega_H}$ — радиус ларморовской окружности; $\omega_H = \frac{eH}{mc}$ — ларморовская частота, w — скорость частицы в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю.

Тогда заряженная частица движется в основном по спирали вдоль магнитной силовой линии, вращаясь вокруг нее на расстоянии ларморовского радиуса, и «дрейфует» в направлении, перпендикулярном к магнитному полю. Воспользовавшись этим обстоятельством, можно построить упрощенные усредненные уравнения для движения центра тяжести ларморовской окружности.

Выполнению условия (25.19) способствуют большая величина и однородность магнитного поля и малая величина скорости частицы. Однако условие (25.19) может быть выполнено и при большой скорости частицы, если поле достаточно велико и однородно, а также при малом магнитном поле, если скорость частицы достаточно мала и поле достаточно однородно.

В данном примере займемся исследованием движения заряженной частицы в неоднородном электрическом и магнитном поле в предположении, что магнитное поле мало меняется на длине ларморовского радиуса.

Уравнения движения заряженной частицы в магнитном и электрическом поле в нерелятивистском приближении имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} &= \boldsymbol{F} + \frac{e}{mc}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}], \quad \boldsymbol{F} = \frac{e\boldsymbol{E}}{m}, \\ \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} &= \boldsymbol{v}. \end{aligned}\right\} \tag{25.20}$$

Выберем криволинейную систему координат с ортами $\boldsymbol{\tau}_0$, $\boldsymbol{\tau}_1$, $\boldsymbol{\tau}_2$ в направлении линий магнитного поля и двух к нему перпендикулярных:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_0 &= \frac{\boldsymbol{H}}{H}, \\ \boldsymbol{\tau}_1 &= [\boldsymbol{\tau}_2\boldsymbol{\tau}_0], \\ \boldsymbol{\tau}_2 &= [\boldsymbol{\tau}_0\boldsymbol{\tau}_1], \\ \boldsymbol{\tau}_0 &= [\boldsymbol{\tau}_1\boldsymbol{\tau}_2]. \end{aligned}\right\} \tag{25.21}$$

Уравнения (25.20) запишем в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} &= \boldsymbol{F} + \omega_H [\boldsymbol{v}\boldsymbol{\tau}_0], \\ \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} &= \boldsymbol{v}, \end{aligned}\right\} \qquad (25.22)$$

где $\omega_H = \frac{eH(\boldsymbol{r})}{mc}$ — ларморовская частота.

Представим уравнения (25.22) в такой форме, чтобы явно выделить вращение частицы с угловой частотой ω_H. Для этого разложим вектор скорости частицы $\boldsymbol{v}$ по ортам $\boldsymbol{\tau}_0$, $\boldsymbol{\tau}_1$, $\boldsymbol{\tau}_2$:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v} = u\boldsymbol{\tau}_0 + w\{\boldsymbol{\tau}_1 \cos\alpha + \boldsymbol{\tau}_2 \sin\alpha\} \\ (v^2 = w^2 + u^2), \end{aligned}\right\} \qquad (25.23)$$

где u — параллельная и w — перпендикулярная к полю составляющие скорости.

С помощью (25.23) уравнение (25.22) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}\boldsymbol{\tau}_0 + u\frac{d\boldsymbol{\tau}_0}{dt} + \frac{dw}{dt}\{\boldsymbol{\tau}_1\cos\alpha + \boldsymbol{\tau}_2\sin\alpha\} + \\ + w\left\{\frac{d\boldsymbol{\tau}_1}{dt}\cos\alpha + \frac{d\boldsymbol{\tau}_2}{dt}\sin\alpha\right\} + w\{-\boldsymbol{\tau}_1\sin\alpha + \boldsymbol{\tau}_2\cos\alpha\}\frac{d\alpha}{dt} = \\ = \boldsymbol{F} + \omega_H w\{\boldsymbol{\tau}_1\sin\alpha - \boldsymbol{\tau}_2\cos\alpha\}. \quad (25.24) \end{aligned}$$

Умножая уравнение (25.24) последовательно на $\boldsymbol{\tau}_0$, $\boldsymbol{\tau}_1\cos\alpha + \boldsymbol{\tau}_2\sin$ и $\boldsymbol{\tau}_2\cos\alpha - \boldsymbol{\tau}_1\sin\alpha$, получим уравнения для $\frac{du}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$, $\frac{d\alpha}{dt}$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= (\boldsymbol{F}\boldsymbol{\tau}_0) - w\left\{\boldsymbol{\tau}_0\frac{d\boldsymbol{\tau}_1}{dt}\cos\alpha + \boldsymbol{\tau}_0\frac{d\boldsymbol{\tau}_2}{dt}\sin\alpha\right\}, \\ \frac{dw}{dt} &= (\boldsymbol{F}\boldsymbol{\tau}_1)\cos\alpha + (\boldsymbol{F}\boldsymbol{\tau}_2)\sin\alpha - u(\boldsymbol{\tau}_1\cos\alpha + \boldsymbol{\tau}_2\sin\alpha)\frac{d\boldsymbol{\tau}_0}{dt}, \\ w\frac{d\alpha}{dt} &= -\omega_H w + F\{\boldsymbol{\tau}_2\cos\alpha - \boldsymbol{\tau}_1\sin\alpha\} - \\ &- \{\boldsymbol{\tau}_2\cos\alpha - \boldsymbol{\tau}_1\sin\alpha\}\left\{u\frac{d\boldsymbol{\tau}_0}{dt} + w\left(\frac{d\boldsymbol{\tau}_1}{dt}\cos\alpha + \frac{d\boldsymbol{\tau}_2}{dt}\sin\alpha\right)\right\}. \end{aligned}\right\} \qquad (25.25)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\tau}_i}{dt} = \frac{\partial\boldsymbol{\tau}_i}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{\tau}_i = \frac{\partial\boldsymbol{\tau}_i}{\partial t} + u(\boldsymbol{\tau}_0\nabla)\boldsymbol{\tau}_i + \\ + w\{(\boldsymbol{\tau}_1\nabla)\boldsymbol{\tau}_i\cos\alpha + (\boldsymbol{\tau}_2\nabla)\boldsymbol{\tau}_i\sin\alpha\} \quad (i = 0,\ 1,\ 2) \quad (25.26) \end{aligned}$$

и

$$\boldsymbol{\tau}_0(\boldsymbol{\tau}_0\nabla) + \boldsymbol{\tau}_1(\boldsymbol{\tau}_1\nabla) + \boldsymbol{\tau}_2(\boldsymbol{\tau}_2\nabla) = \nabla. \qquad (25.27)$$

Положим $\frac{\partial\boldsymbol{\tau}_i}{\partial t} = 0$, т. е. будем считать, что магнитное поле не зависит от времени, хотя этого ограничения можно было бы не делать. Тогда с помощью соотношений (25.26), (25.27) уравнения (25.25) принимают вид

$$\frac{du}{dt}=(\boldsymbol{F}\boldsymbol{\tau}_0)+\frac{w^2}{2}\operatorname{div}\boldsymbol{\tau}_0+uw\{\boldsymbol{\tau}_1(\boldsymbol{\tau}_0\nabla)\boldsymbol{\tau}_0\cos\alpha+\boldsymbol{\tau}_2(\boldsymbol{\tau}_0\nabla)\boldsymbol{\tau}_0\sin\alpha\}+$$
$$+\frac{w^2}{2}\{\boldsymbol{\tau}_1(\boldsymbol{\tau}_1\nabla)\boldsymbol{\tau}_0-\boldsymbol{\tau}_2(\boldsymbol{\tau}_2\nabla)\boldsymbol{\tau}_0\}\cos 2\alpha+\frac{w^2}{2}\{\boldsymbol{\tau}_1(\boldsymbol{\tau}_2\nabla)\boldsymbol{\tau}_0+\boldsymbol{\tau}_2(\boldsymbol{\tau}_1\nabla)\boldsymbol{\tau}_0\}\sin 2\alpha, \quad (25.28)$$

$$\frac{dw}{dt}=-\frac{uw}{2}\operatorname{div}\boldsymbol{\tau}_0+\{(\boldsymbol{F}\boldsymbol{\tau}_1)-u^2\boldsymbol{\tau}_1(\boldsymbol{\tau}_0\nabla)\boldsymbol{\tau}_0\}\cos\alpha+$$
$$+\{(\boldsymbol{F}\boldsymbol{\tau}_2)-u^2\boldsymbol{\tau}_2(\boldsymbol{\tau}_0\nabla)\boldsymbol{\tau}_0\}\sin\alpha-\frac{uw}{2}\{\boldsymbol{\tau}_1(\boldsymbol{\tau}_1\nabla)\boldsymbol{\tau}_0-\boldsymbol{\tau}_2(\boldsymbol{\tau}_2\nabla)\boldsymbol{\tau}_0\}\cos 2\alpha-$$
$$-\frac{uw}{2}\{\boldsymbol{\tau}_1(\boldsymbol{\tau}_2\nabla)\boldsymbol{\tau}_0+\boldsymbol{\tau}_2(\boldsymbol{\tau}_1\nabla)\boldsymbol{\tau}_0\}\sin 2\alpha, \quad (25.29)$$

$$\frac{d\alpha}{dt}=-\omega_H-\frac{u}{2}\{\boldsymbol{\tau}_2(\boldsymbol{\tau}_1\nabla)\boldsymbol{\tau}_0-\boldsymbol{\tau}_1(\boldsymbol{\tau}_2\nabla)\boldsymbol{\tau}_0+2\boldsymbol{\tau}_2(\boldsymbol{\tau}_0\nabla)\boldsymbol{\tau}_1\}+$$
$$+\frac{1}{w}\{[\boldsymbol{F}\boldsymbol{\tau}_2)-u^2\boldsymbol{\tau}_2(\boldsymbol{\tau}_0\nabla)\boldsymbol{\tau}_0+w^2\boldsymbol{\tau}_1(\boldsymbol{\tau}_1\nabla)\boldsymbol{\tau}_2\}\cos\alpha+$$
$$+\frac{1}{w}\{-(\boldsymbol{F}\boldsymbol{\tau}_1)+u^2\boldsymbol{\tau}_1(\boldsymbol{\tau}_0\nabla)\boldsymbol{\tau}_0-w^2\boldsymbol{\tau}_2(\boldsymbol{\tau}_2\nabla)\boldsymbol{\tau}_1\}\sin\alpha-$$
$$-\frac{u}{2}\{\boldsymbol{\tau}_1(\boldsymbol{\tau}_2\nabla)\boldsymbol{\tau}_0+\boldsymbol{\tau}_2(\boldsymbol{\tau}_1\nabla)\boldsymbol{\tau}_0\}\cos 2\alpha+\frac{u}{2}\{\boldsymbol{\tau}_1(\boldsymbol{\tau}_1\nabla)\boldsymbol{\tau}_0-\boldsymbol{\tau}_2(\boldsymbol{\tau}_2\nabla)\boldsymbol{\tau}_0\}\sin 2\alpha. \quad (25.30)$$

К этим уравнениям нужно еще добавить второе из уравнений (25.22)

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=u\boldsymbol{\tau}_0+w\{\boldsymbol{\tau}_1\cos\alpha+\boldsymbol{\tau}_2\sin\alpha\}. \quad (25.31)$$

Уравнения движения заряженной частицы в неоднородных полях в форме (25.28)—(25.31) удобны для применения вышеизложенного метода асимптотического приближения в случае магнитных полей, мало отклоняющихся от однородных и удовлетворяющих условию (25.19).

Произведем в системе (25.28)—(25.31) замену переменных, аналогичную замене (25.16):

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{r}&=\bar{\boldsymbol{r}}+\frac{w}{\omega_H}(\boldsymbol{\tau}_2\cos\bar{\alpha}-\boldsymbol{\tau}_1\sin\bar{\alpha}),\\
\alpha&=\bar{\alpha}+\frac{1}{\omega_H}(g_1\cos\bar{\alpha}-f_1\sin\bar{\alpha})+\frac{w}{\omega^2}(\boldsymbol{\tau}_1\cos\bar{\alpha}+\boldsymbol{\tau}_2\sin\bar{\alpha})\nabla\omega_H+\\
&\qquad+\frac{1}{2\omega_H}(g_2\cos 2\bar{\alpha}-f_2\sin 2\bar{\alpha}),\\
u&=\bar{u}-\frac{1}{\omega_H}\sum_{n=1,2}\frac{1}{n}\{-G_{4n}\cos n\bar{\alpha}+F_{4n}\sin n\bar{\alpha}\},\\
w&=\bar{w}-\frac{1}{\omega_H}\sum_{n=1,2}\frac{1}{n}\{-G_{5n}\cos n\bar{\alpha}+F_{5n}\sin n\bar{\alpha}\},
\end{aligned}\right\} \quad (25.32)$$

где u и w соответствуют переменным x_4, x_5 системы (25.1) и $\omega_H=-\lambda\omega$; f_n, g_n, F_{4n}, G_{4n}, F_{5n}, G_{5n} — коэффициенты при соответствующих гармониках в уравнениях (25.28) — (25.31):

$$\left.\begin{aligned}
f_1 &= \frac{1}{w}\{(\boldsymbol{F}\boldsymbol{\tau}_2) - u^2\boldsymbol{\tau}_2(\boldsymbol{\tau}_0\nabla)\boldsymbol{\tau}_0 + w^2\boldsymbol{\tau}_1(\boldsymbol{\tau}_1\nabla)\boldsymbol{\tau}_2\},\\
g_1 &= \frac{1}{w}\{-(\boldsymbol{F}\boldsymbol{\tau}_1) + u^2\boldsymbol{\tau}_1(\boldsymbol{\tau}_0\nabla)\boldsymbol{\tau}_0 - w^2\boldsymbol{\tau}_2(\boldsymbol{\tau}_2\nabla)\boldsymbol{\tau}_1\},\\
f_2 &= -\frac{u}{2}\{\boldsymbol{\tau}_1(\boldsymbol{\tau}_2\nabla)\boldsymbol{\tau}_0 + \boldsymbol{\tau}_2(\boldsymbol{\tau}_1\nabla)\boldsymbol{\tau}_0\},\\
g_2 &= \frac{u}{2}\{\boldsymbol{\tau}_1(\boldsymbol{\tau}_1\nabla)\boldsymbol{\tau}_0 - \boldsymbol{\tau}_2(\boldsymbol{\tau}_2\nabla)\boldsymbol{\tau}_0\}.\\
F_{41} &= uw\boldsymbol{\tau}_1(\boldsymbol{\tau}_0\nabla)\boldsymbol{\tau}_0, \quad F_{42} = \frac{w^2}{2}\{\boldsymbol{\tau}_1(\boldsymbol{\tau}_1\nabla)\boldsymbol{\tau}_0 - \boldsymbol{\tau}_2(\boldsymbol{\tau}_2\nabla)\boldsymbol{\tau}_0\},\\
F_{51} &= (\boldsymbol{\tau}_1\boldsymbol{F}) - u^2\boldsymbol{\tau}_1(\boldsymbol{\tau}_0\nabla)\boldsymbol{\tau}_0,\\
F_{52} &= -\frac{uw}{2}[\boldsymbol{\tau}_1(\boldsymbol{\tau}_1\nabla)\boldsymbol{\tau}_0 - \boldsymbol{\tau}_2(\boldsymbol{\tau}_2\nabla)\boldsymbol{\tau}_0],\\
G_{41} &= uw\boldsymbol{\tau}_2(\boldsymbol{\tau}_0\nabla)\boldsymbol{\tau}_0,\\
G_{42} &= \frac{w^2}{2}\{\boldsymbol{\tau}_1(\boldsymbol{\tau}_2\nabla)\boldsymbol{\tau}_0 + \boldsymbol{\tau}_2(\boldsymbol{\tau}_1\nabla)\boldsymbol{\tau}_0\},\\
G_{51} &= (\boldsymbol{\tau}_2\boldsymbol{F}) - u^2\boldsymbol{\tau}_2(\boldsymbol{\tau}_0\nabla)\boldsymbol{\tau}_0,\\
G_{52} &= -\frac{uw}{2}[\boldsymbol{\tau}_1(\boldsymbol{\tau}_2\nabla)\boldsymbol{\tau}_0 + \boldsymbol{\tau}_2(\boldsymbol{\tau}_1\nabla)\boldsymbol{\tau}_0].
\end{aligned}\right\}\qquad(25.33)$$

Первая формула системы (25.32) выражает вращение частицы по ларморовской окружности вокруг среднего положения, вторая, третья и четвертая формулы описывают влияние неоднородностей поля и внешней силы на угол вращения α и компоненты скорости u и w.

Уравнения (25.28) — (25.31) в результате преобразования (25.32) уже не будут содержать угловой переменной α. В дальнейшем изложении будем всюду опускать знаки усреднения при переменных, обозначая $\bar{\boldsymbol{r}}$, $\bar{u}$, $\bar{w}$ просто $\boldsymbol{r}$, u, w, что не может привести к путанице, так как далее мы будем иметь дело лишь с усредненными переменными.

Все расчеты будем вести с точностью до членов, пропорциональных $\frac{1}{\omega_H}$. Тогда в приближенных уравнениях для $\frac{du}{dt}$ и $\frac{dw}{dt}$, как будет ясно из дальнейшего, достаточно сохранить лишь члены нулевого порядка относительно $\frac{1}{\omega_H}$.

В нулевом приближении уравнения (25.28) и (25.29) дают:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= (\boldsymbol{F}\boldsymbol{\tau}_0) + \frac{w^2}{2}\operatorname{div}\boldsymbol{\tau}_0,\\
\frac{dw}{dt} &= -\frac{uw}{2}\operatorname{div}\boldsymbol{\tau}_0,
\end{aligned}\right\}\qquad(25.34)$$

так как

$$\left.\begin{aligned}
X_{40} &= (\boldsymbol{F}\boldsymbol{\tau}_0) + \frac{w^2}{2}\operatorname{div}\boldsymbol{\tau}_0,\\
X_{50} &= -\frac{uw}{2}\operatorname{div}\boldsymbol{\tau}_0.
\end{aligned}\right\}\qquad(25.35)$$

Из системы (25.34) следует закон сохранения энергии для усредненного движения. В самом деле, умножая первое уравнение системы (25.34) на u, а второе на w и складывая, получим:

$$u\frac{du}{dt}+w\frac{dw}{dt}=u\,(\boldsymbol{F}\boldsymbol{\tau}_0)=-\frac{1}{m}\frac{dV}{dt},$$

где V — потенциальная энергия частицы.

Следовательно,

$$\frac{1}{2}(u^2+w^2)+\frac{V}{m}=\mathrm{const}. \tag{25.36}$$

Найдем из второго уравнения системы (25.34) адиабатический инвариант. Имеем:

$$\frac{dw}{dt}=-\frac{uw}{2}\left(\boldsymbol{H}\nabla\left(\frac{1}{H}\right)\right)=-\frac{Hw}{2}\left(\boldsymbol{u}\nabla\left(\frac{1}{H}\right)\right)=$$
$$=-\frac{Hw}{2}\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\nabla\left(\frac{1}{H}\right)\right)=-\frac{Hw}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{H}\right), \tag{25.37}$$

так как $\operatorname{div}\boldsymbol{H}=0$ и $u\boldsymbol{\tau}_0\approx\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$.

В результате интегрирования уравнения (25.37) получим:

$$\frac{w^2}{H}=\mathrm{const}. \tag{25.38}$$

Таким образом, величина $\frac{w^2}{H}$ является адиабатическим инвариантом, т. е. сохраняется не точно, а лишь с точностью до членов порядка $\frac{1}{\omega_H}$.

Можно было бы дополнить выражение (25.38) высшими членами по $\frac{1}{\omega_H}$, начиная с первого, и получить явное выражение для приближенного интеграла движения, сохраняющего свое значение с любой наперед заданной точностью.

Физический смысл адиабатической инвариантности величины $\frac{w^2}{H}$ состоит в том, что магнитный поток через ларморовскую окружность является величиной постоянной с точностью до членов порядка малости $\frac{1}{\omega_H}$.

Уравнение (25.31) в результате преобразования (25.32) принимает вид

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=u\boldsymbol{\tau}_0+\frac{w}{2\omega_H}(\boldsymbol{\tau}_1f_1+\boldsymbol{\tau}_2g_1)+$$
$$+\frac{w^2}{2\omega_H}((\boldsymbol{\tau}_2\nabla)\boldsymbol{\tau}_1-(\boldsymbol{\tau}_1\nabla)\boldsymbol{\tau}_2)+\frac{1}{2\omega_H}(\boldsymbol{\tau}_1G_{51}-\boldsymbol{\tau}_2F_{51})-$$
$$-\frac{w^2}{2\omega_H^2}(\boldsymbol{\tau}_1(\boldsymbol{\tau}_2\nabla\omega_H)-\boldsymbol{\tau}_2(\boldsymbol{\tau}_1\nabla\omega_H))+O\left(\frac{1}{\omega_H^2}\right) \tag{25.39}$$

с учетом

$$w(\boldsymbol{\tau}_1f_1+\boldsymbol{\tau}_2g_1)+\boldsymbol{\tau}_1G_{51}-\boldsymbol{\tau}_2F_{51}=$$
$$=\boldsymbol{\tau}_1\{2(\boldsymbol{\tau}_2F)-2u^2\boldsymbol{\tau}_2(\boldsymbol{\tau}_0\nabla)\boldsymbol{\tau}_0+w^2\boldsymbol{\tau}_1(\boldsymbol{\tau}_1\nabla)\boldsymbol{\tau}_2\}+$$
$$+\boldsymbol{\tau}_2\{-2(\boldsymbol{\tau}_1F)+2u^2\boldsymbol{\tau}_1(\boldsymbol{\tau}_0\nabla)\boldsymbol{\tau}_0-w^2\boldsymbol{\tau}_2(\boldsymbol{\tau}_2\nabla)\boldsymbol{\tau}_1\}.$$

Уравнение (25.39) перепишем в виде

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=u\boldsymbol{\tau}_0+\frac{1}{\omega_H}\{\boldsymbol{\tau}_1(\boldsymbol{F}\boldsymbol{\tau}_2)-\boldsymbol{\tau}_2(\boldsymbol{F}\boldsymbol{\tau}_1)\}-\frac{u^2}{\omega_H}\{\boldsymbol{\tau}_1\boldsymbol{\tau}_2(\boldsymbol{\tau}_0\nabla)\boldsymbol{\tau}_0-\boldsymbol{\tau}_2\boldsymbol{\tau}_1(\boldsymbol{\tau}_0\nabla)\boldsymbol{\tau}_0\}+$$
$$+\frac{w^2}{2\omega_H}\{\boldsymbol{\tau}_1\boldsymbol{\tau}_1(\boldsymbol{\tau}_1\nabla)\boldsymbol{\tau}_2-\boldsymbol{\tau}_2\boldsymbol{\tau}_2(\boldsymbol{\tau}_2\nabla)\boldsymbol{\tau}_1\}+\frac{w^2}{2\omega_H}\{(\boldsymbol{\tau}_2\nabla)\boldsymbol{\tau}_1-(\boldsymbol{\tau}_1\nabla)\boldsymbol{\tau}_2\}-$$
$$-\frac{w^2}{2\omega_H}\{\boldsymbol{\tau}_1(\boldsymbol{\tau}_2\nabla\omega_H)-\boldsymbol{\tau}_2(\boldsymbol{\tau}_1\nabla\omega_H)\}+O\left(\frac{1}{\omega_H^2}\right), \tag{25.40}$$

или

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{\tau}_0\left\{u+\frac{w^2}{2\omega_H}(\boldsymbol{\tau}_0\operatorname{rot}\boldsymbol{\tau}_0)\right\}+\boldsymbol{\tau}_0\times\left\{-\frac{1}{\omega_H}\boldsymbol{F}+\frac{w^2}{2\omega_H^2}\nabla\omega_H+\frac{u^2}{\omega_H}(\boldsymbol{\tau}_0\nabla)\boldsymbol{\tau}_0\right\},\quad(25.41)$$

так как

$$\boldsymbol{\tau}_1(\boldsymbol{F}\boldsymbol{\tau}_2)-\boldsymbol{\tau}_2(\boldsymbol{F}\boldsymbol{\tau}_1)=[\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{\tau}_0],$$

$$\boldsymbol{\tau}_1\boldsymbol{\tau}_2(\boldsymbol{\tau}_0\nabla)\boldsymbol{\tau}_0-\boldsymbol{\tau}_2\boldsymbol{\tau}_1(\boldsymbol{\tau}_0\nabla)\boldsymbol{\tau}_0=[(\boldsymbol{\tau}_0\nabla)\boldsymbol{\tau}_0\times\boldsymbol{\tau}_0],$$

$$(\boldsymbol{\tau}_2\nabla)\boldsymbol{\tau}_1-(\boldsymbol{\tau}_1\nabla)\boldsymbol{\tau}_2=\boldsymbol{\tau}_0(\boldsymbol{\tau}_0\operatorname{rot}\boldsymbol{\tau}_0)-\boldsymbol{\tau}_1\boldsymbol{\tau}_1(\boldsymbol{\tau}_1\nabla)\boldsymbol{\tau}_2+\boldsymbol{\tau}_2\boldsymbol{\tau}_2(\boldsymbol{\tau}_2\nabla)\boldsymbol{\tau}_1.$$

В уравнении (25.41) можно пренебречь малой поправкой

$$\frac{w^2}{2\omega}(\boldsymbol{\tau}_0\operatorname{rot}\boldsymbol{\tau}_0)\boldsymbol{\tau}_0$$

к главному продольному члену $u\boldsymbol{\tau}_0$.

Нетрудно видеть, что в уравнении (25.41) в принятом приближении члены, перпендикулярные к полю $\boldsymbol{H}$, начинаются с членов порядка $\frac{1}{\omega_H}$, а параллельные полю $\boldsymbol{H}$ определены лишь с точностью до $\frac{1}{\omega_H}$. Сохраняя ту же точность, к этому уравнению можно добавить величины типа $\boldsymbol{\tau}_0\frac{c}{\omega_H}$. В самом деле, если от нашего $\boldsymbol{r}$ перейдем к другому (см. замечание о «неоднозначности») заменой

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_{\text{нов}}+\frac{\boldsymbol{\tau}_0}{\omega_H^2}f(\alpha,\boldsymbol{r}),\quad(25.42)$$

смещающей $\boldsymbol{r}$ вдоль линии магнитного поля на величину порядка $\frac{1}{\omega_H^2}$, пренебрегаемую в принятой степени точности, то при дифференцировании (25.42), кроме несущественных членов порядка $\frac{1}{\omega_H^2}$, добавятся еще члены $\frac{\boldsymbol{\tau}_0}{\omega_H}f'_\alpha$.

Воспользуемся указанным произволом и определим, например, u так, чтобы оно точно равнялось компоненте скорости $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ центра ларморовской окружности, параллельной магнитному полю. Тогда новое u будет равняться старому u плюс $\frac{L}{\omega_H}$. В уравнениях (25.41) можно заменить просто u старое на u новое, ибо разность между этими величинами по порядку величины меньше, чем члены, удержанные в (25.41).

Таким образом, окончательно мы получаем следующую систему уравнений, определяющих движение центра ларморовской окружности:

$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{dt}&=(\boldsymbol{F}\boldsymbol{\tau}_0)+\frac{w^2}{2}\operatorname{div}\boldsymbol{\tau}_0,\\ \frac{dw}{dt}&=-\frac{uw}{2}\operatorname{div}\boldsymbol{\tau}_0,\\ \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}&=\boldsymbol{\tau}_0u+\boldsymbol{\tau}_0\times\left\{-\frac{1}{\omega_H}\boldsymbol{F}+\frac{w^2}{2\omega_H^2}\nabla\omega_H+\frac{u^2}{\omega_H}(\boldsymbol{\tau}_0\nabla)\boldsymbol{\tau}_0\right\}.\end{aligned}\right\}\quad(25.43)$$

Нетрудно усмотреть, каков физический смысл различных членов в уравнениях (25.43): $\boldsymbol{\tau}_0 u$ — составляющая вектора скорости частицы, направленная по магнитному полю;

$$\frac{1}{\omega_H}[\boldsymbol{F}\boldsymbol{\tau}_0] = \frac{c}{H^2}[\boldsymbol{E}\boldsymbol{H}] \quad (E \ll H)$$

—скорость дрейфа частицы под действием электрического и магнитного поля

$$\frac{w^2}{2\omega_H^2}[\boldsymbol{\tau}_0 \times \operatorname{grad}\omega_H] = \frac{mcw^2}{2eH^3}[\boldsymbol{H}\times\nabla H]$$

—скорость дрейфа, вызванная неоднородностью магнитного поля;

$$-\frac{u^2}{\omega_H}[(\boldsymbol{\tau}_0\nabla)\boldsymbol{\tau}_0\times\boldsymbol{\tau}_0] = -\frac{u^2}{\omega_H R}[\boldsymbol{n}\boldsymbol{\tau}], \quad |\boldsymbol{n}| = 1$$

(где R — радиус кривизны линий магнитного поля, $\boldsymbol{n}$ — главная нормаль к линиям магнитного поля) — скорость дрейфа, вызванная кривизной линий магнитного поля, или скорость «центробежного» дрейфа.

Последнее уравнение системы (25.43) можно записать также в виде

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = u\frac{\boldsymbol{\omega}_H}{\omega} + \frac{v^2+u^2}{2\omega_H^3}[\boldsymbol{\omega}_H\times\nabla\omega_H] + \frac{1}{\omega_H^2}[\boldsymbol{F}\boldsymbol{\omega}_H] + \\ + \frac{u^2}{\omega_H^2}\left\{\operatorname{rot}\boldsymbol{\omega}_H - \frac{\boldsymbol{\omega}_H}{\omega_H^2}(\boldsymbol{\omega}_H\operatorname{rot}\omega_H)\right\}, \quad (25.44)$$

$$\boldsymbol{v}^2 = u^2 + w^2,$$

где положено $\boldsymbol{\omega}_H = \omega_H\boldsymbol{\tau}_0$ и учтено тождество $(\boldsymbol{\tau}_0\nabla)\boldsymbol{\tau}_0 = -[\boldsymbol{\tau}_0\operatorname{rot}\boldsymbol{\tau}_0]$, или в виде

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = u\frac{\boldsymbol{H}}{H} + \frac{c}{H^2}[\boldsymbol{E}\boldsymbol{H}] + \frac{mc(v^2+w^2)}{2eH^3}[\boldsymbol{H}\nabla H] + \\ + \frac{mcu^2}{eH^2}\left\{\operatorname{rot}\boldsymbol{H} - \frac{\boldsymbol{H}}{H^2}(\boldsymbol{H}\operatorname{rot}\boldsymbol{H})\right\}. \quad (25.45)$$

В частном случае, если $\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = 0$, уравнение (25.45) принимает вид

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = u\frac{\boldsymbol{H}}{H} + \frac{c}{H^2}[\boldsymbol{E}\boldsymbol{H}] + \frac{me^2(v^2+u^2)}{2eH^3}[\boldsymbol{H}\nabla H]. \quad (25.46)$$

Уравнения (25.43) описывают движение центра ларморовской окружности с точностью до членов $\frac{1}{\omega_H^2}$ *).

Заметим в заключение, что вышеизложенный общий асимптотический метод усреднения при быстро вращающейся фазе может быть использован также для исследования гироскопических систем.

*) Заметим, что рассмотренный пример решен во втором приближении С. И. Брагинским (Украинский математический журнал, т. VIII, 1956).