# ГЛАВА VI
# ОБОСНОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

## § 26. Обоснование метода усреднения

Проблема обоснования асимптотических методов может исследоваться с различных точек зрения.

Можно, например, искать условия, при которых разность между точным решением и его асимптотическим приближением для достаточно малых значений параметра становится сколь угодно малой на сколь угодно большом, но все же конечном интервале времени.

Можно также поставить и значительно более сложные задачи, пытаясь устанавливать соответствие между такими свойствами точных и приближенных решений, которые зависят от их поведения на бесконечном интервале.

В настоящем параграфе мы будем рассматривать первую задачу как более простую.

Поскольку излагавшиеся ранее асимптотические методы допускают приведение к методу усреднения, мы для общности сформулируем ее применительно к системе дифференциальных уравнений в стандартной форме.

Итак, будем рассматривать систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x) \tag{26.1}$$

($x$, $X$ — точки $n$-мерного евклидова пространства) с малым параметром $\varepsilon$.

Построим для нее соответствующую систему усредненных уравнений

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) \tag{26.2}$$

и приступим к доказательству теоремы, устанавливающей, что при весьма общих условиях разность $x(t) - \xi(t)$ может быть сделана сколь угодно малой для достаточно малого $\varepsilon$ на сколь угодно большом интервале $0 < t < T$. Так как $\xi(t)$ зависит от $t$ через посредство произведения $\varepsilon t$, то для того, чтобы в течение указанного интервала времени $\xi$ могло успеть значительно отойти от своего начального значения, т. е. чтобы этот интервал оказался достаточно длительным с точки зрения изменения $\xi$, за $T$ следует брать величину порядка $\frac{L}{\varepsilon}$, где $L$ может быть сделано сколь угодно большим при достаточно малом $\varepsilon$.

Сформулируем поэтому утверждение о малости ошибки $x(t) - \xi(t)$ первого приближения следующим образом.

Теорема. Если функция $X(t, x)$ удовлетворяет условиям:

а) Для некоторой области $D$ можно указать такие положительные постоянные $M$ и $\lambda$, что для всех вещественных значений $t \geqslant 0$ и для любых точек $x$, $x'$, $x''$ из этой области удовлетворяются неравенства

$$|X(t, x)| \leqslant M; \quad |X(t, x') - X(t, x'')| \leqslant \lambda |x' - x''|. \tag{26.3}$$

б) Равномерно по отношению к $x$ в области $D$ существует предел

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x)\, dt = X_0(x). \tag{26.4}$$

Тогда любым, сколь угодно малым положительным $\rho$, $\eta$ и сколь угодно большому $L$ можно сопоставить такое положительное $\varepsilon_0$, что если $\xi = \xi(t)$ есть решение уравнения

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi),$$

определенное в интервале $0 < t < \infty$ и лежащее в области $D$ вместе со всей своей $\rho$-окрестностью*), то для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ в интервале $\left[0 < t < \frac{L}{\varepsilon}\right.$ справедливо неравенство

$$|x(t) - \xi(t)| < \eta,$$

в котором $x = x(t)$ представляет решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x),$$

совпадающее с $\xi(t)$ при $t = 0$.

Доказательство. Фиксируем некоторое положительное число $a$ и строим функцию

$$\Delta_a(x) = \begin{cases} A_a \left\{1 - \frac{|x|^2}{a^2}\right\}^2, & |x| \leqslant a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases} \tag{26.5}$$

где положительная постоянная $A_a$ определяется соотношением

$$\int_{E_n} \Delta_a(x)\, dx = 1, \tag{26.6}$$

в котором интегрирование выполняется по всему рассматриваемому пространству $E_n$; $dx$ обозначает бесконечно малый элемент обычного $n$-мерного евклидова объема.

Очевидно, введенная функция $\Delta_a(x)$ ограничена вместе со своими частными производными до второго порядка включительно. Так как эта функция и ее производные тождественно равны нулю для $|x| > a$, нетрудно убедиться, что интеграл

$$I_a = \int_{E_n} \left| \frac{\partial \Delta_a(x)}{\partial x} \right| dx \tag{26.7}$$

оказывается конечным для всякого положительного $a$.

*) Мы будем называть $\rho$-окрестностью некоторого множества $A$ множество всех точек, расстояние которых до $A$ меньше $\rho$.

Заметив это, рассмотрим функцию

$$u(t, x) = \int_D \Delta_a(x-x') \left\{ \int_0^t [X(t, x') - X_0(x')]\,dt \right\} dx'. \tag{26.8}$$

В силу условия б) можно построить такую монотонно убывающую функцию $f(t)$, стремящуюся к нулю при $t \to \infty$, что во всей области $D$

$$\left| \frac{1}{t} \int_0^t [X(t, x) - X_0(x)]\,dt \right| \leqslant f(t). \tag{26.9}$$

Имеем поэтому

$$|u(t, x)| \leqslant tf(t) \int_D \Delta_a(x-x')\,dx' \leqslant tf(t) \int_{En} \Delta_a(x-x')\,dx' = tf(t) \int_{En} \Delta_a(x')\,dx',$$

т. е.

$$|u(t, x)| \leqslant tf(t). \tag{26.10}$$

Далее имеем:

$$\left|\frac{\partial u(t, x)}{\partial x}\right| \leqslant tf(t) \int_D \left|\frac{\partial \Delta_a(x-x')}{\partial x}\right| dx' \leqslant tf(t) \int_{En} \left|\frac{\partial \Delta_a(x)}{\partial x}\right| dx,$$

или ввиду (26.7)

$$\left|\frac{\partial u(t, x)}{\partial x}\right| \leqslant I_a tf(t). \tag{26.11}$$

С другой стороны, благодаря условию а)

$$|X_0(x)| \leqslant M; \quad |X_0(x') - X_0(x'')| \leqslant \lambda |x' - x''|; \quad x, x', x'' \in D, \tag{26.12}$$

и потому

$$|X(t, x') - X_0(x') - X(t, x) + X_0(x)| \leqslant 2\lambda |x' - x|; \quad x, x' \in D. \tag{26.13}$$

Заметим теперь из (26.8), что

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \int_D \{X(t, x') - X_0(x')\} \Delta_a(x-x')\,dx',$$

откуда на основании (26.13) убеждаемся, что в области $D$ справедливо неравенство

$$\left| \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \{X(t, x) - X_0(x)\} \int_D \Delta_a(x-x')\,dx' \right| \leqslant 2\lambda a. \tag{26.14}$$

Но по определению функции $\Delta_a(x)$ для любой точки $x$, $a$-окрестность которой принадлежит $D$, имеем:

$$\int_D \Delta_a(x-x')\,dx' = \int_{|x-x'|<a} \Delta_a(x-x')\,dx' = 1,$$

и таким образом, соотношение (26.14) для таких точек дает:

$$\left| \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - X(t, x) + X_0(x) \right| \leqslant 2\lambda a. \tag{26.15}$$

Фиксируем теперь число $a$ так, чтобы

$$a < \rho, \quad a < \frac{\eta^*}{8\lambda L e^{L\lambda}}, \quad \text{где } \eta^* = \min(\eta, \rho), \tag{26.16}$$

и введем функции

$$F(\varepsilon) = \sup_{|\tau| \leqslant L} \left| \tau f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) \right|; \qquad \Phi(t) = \frac{1}{t^2} \int_0^t t f(t)\, dt.$$

Имеем, очевидно,

$$F(\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0; \quad \Phi(t) \to 0, \quad t \to \infty.$$

Поэтому можем найти столь малое положительное $\varepsilon_0$, чтобы для всякого положительного $\varepsilon$, не превосходящего $\varepsilon_0$, удовлетворялись неравенства

$$F(\varepsilon) < a; \quad F(\varepsilon) < \frac{\eta^*}{2}; \quad \Phi\left(\frac{L}{\varepsilon}\right) \leqslant \frac{\eta^*}{4L^2 e^{L\lambda}(\lambda + I_a M)}. \tag{26.17}$$

Произведя такой выбор, рассмотрим выражение

$$\bar{x} = \bar{x}(t) = \xi(t) + \varepsilon u(t, \xi(t)), \tag{26.18}$$

где $\xi(t)$ есть решение уравнения (26.2), принадлежащее со своей $\rho$-окрестностью к области $D$. Благодаря (26.10), (26.16), (26.17) имеем:

$$|\varepsilon u(t, \xi)| \leqslant \varepsilon t f(t) \leqslant F(\varepsilon) < a < \rho \tag{26.19}$$

в интервале

$$0 < t < \frac{L}{\varepsilon}, \tag{26.20}$$

и потому в этом интервале $\bar{x}(t) \in D$.

Имеем далее:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} - \varepsilon X(t, \bar{x}) = R, \tag{26.21}$$

где

$$R = \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon X(t, \xi + \varepsilon u) = \varepsilon \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} - X(t, \xi) + X_0(\xi) \right\} + \\ + \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial \xi} X_0(\xi) + \varepsilon \{ X(t, \xi) - X(t, \xi + \varepsilon u) \}.$$

Отсюда вследствие неравенства (26.10), (26.11), (26.12), (26.15) получаем:

$$|R| \leqslant 2\lambda a \varepsilon + I_a M \varepsilon^2 t f(t) + \lambda \varepsilon^2 t f(t)$$

и, таким образом, в рассматриваемом интервале (26.20) найдем:

$$\int_0^t e^{\varepsilon\lambda(t-\tau)} |R(\tau)|\, d\tau \leqslant e^{L\lambda} \int_0^{L/\varepsilon} |R(t)|\, dt < \left\{ 2\lambda a L + (I_a M + \lambda) L^2 \Phi\left(\frac{L}{\varepsilon}\right) \right\} e^{\lambda L},$$

или ввиду (26.16), (26.17)

$$\int_0^t e^{\varepsilon\lambda(t-\tau)} |R(\tau)|\, d\tau < \frac{\eta^*}{4} + \frac{\eta^*}{4} = \frac{\eta^*}{2},$$

так что

$$\int_0^t e^{\varepsilon\lambda(t-\tau)} |R(\tau)|\, d\tau < \frac{\eta}{2}; \qquad \int_0^t e^{\varepsilon\lambda(t-\tau)} |R(\tau)|\, d\tau < \frac{\rho}{2}. \tag{26.22}$$

Пусть теперь $x = x(t)$ представляет решение уравнения (26.1), для которого $x(0) = \xi(0)$.

Тогда в интервале

$$0 < t < t^*; \qquad t^* \leqslant \frac{L}{\varepsilon}, \tag{26.23}$$

в котором $x(t) \in D$, можно написать:

$$|X(t, x) - X(t, \bar{x})| \leqslant \lambda |x - \bar{x}|,$$

откуда благодаря (26.21) замечаем, что

$$\left| \frac{d(x-\bar{x})}{dt} \right| \leqslant \lambda\varepsilon |x - \bar{x}| + |R(t)|,$$

и так как разность $x - \bar{x}$ аннулируется при $t = 0$, то

$$|x - \bar{x}| \leqslant \int_0^t e^{\varepsilon\lambda(t-\tau)} |R(\tau)| \, d\tau.$$

Поэтому на основании (26.22) видим, что в интервале (26.23) выполняются неравенства

$$|x - \bar{x}| < \frac{\eta}{2}, \qquad |x - \bar{x}| < \frac{\rho}{2},$$

из которых вследствие (26.18), (26.19) убеждаемся, что

$$|x - \xi| < \frac{\eta}{2} + F(\varepsilon) < \eta; \quad |x - \xi| < \frac{\rho}{2} + F(\varepsilon) < \rho. \tag{26.24}$$

Покажем теперь, что число $t^*$ может быть взято равным $\frac{L}{\varepsilon}$.

В самом деле, если этого сделать нельзя, то неравенство

$$|x - \xi| < \rho \tag{26.25}$$

не может выполняться во всем интервале $\left(0, \frac{L}{\varepsilon}\right)$, так как в последнем случае мы имели бы $x(t) \in D$ для всякого $t$ из $\left(0, \frac{L}{\varepsilon}\right)$. Но так как неравенство (26.25) заведомо выполняется для достаточно малых $t$, то из соображений непрерывности ясно, что существует такое $t_1$, что в интервале $(0, t_1)$ это неравенство выполняется и, кроме того,

$$|x(t_1) - \xi(t_1)| > \rho - \delta, \tag{26.26}$$

где за $\delta$ может быть взято любое сколь угодно малое число. Возьмем

$$\delta = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\rho}{2} - F(\varepsilon) \right\} \tag{26.27}$$

и положим $t^* = t_1$, что возможно, так как на сегменте $[0, t_1]$ точка $x(t)$ принадлежит к области $D$. Но тогда в силу (26.24)

$$|x(t_1) - \xi(t_1)| < \frac{\rho}{2} + F(\varepsilon) = \rho - 2\delta < \rho - \delta,$$

что противоречит (26.26).

Итак, можем положить $t^* = \frac{L}{\varepsilon}$, и неравенства (26.24) оказываются справедливыми в интервале $0 < t < \frac{L}{\varepsilon}$, что и завершает доказательство нашей теоремы.

Заметим теперь, что если область $D$ ограничена (лежит в ограниченной части рассматриваемого евклидова пространства), то в условии б) можно исключить требование равномерности и сформулировать б) как условие существования предела (26.4) в каждой точке этой области.

В самом деле, ввиду условия а) функции

$$F_T(x) = \frac{1}{T}\int_0^T X(t, x)\,dt$$

удовлетворяют неравенству

$$|F_T(x') - F_T(x'')| \leqslant \lambda |x' - x''|,$$

и таким образом, последовательность этих функций при $T \to \infty$ является равностепенно-непрерывной. Но так как область $D$, будучи ограниченной, компактна, то всякая равностепенно-непрерывная последовательность, сходящаяся в каждой точке $D$, оказывается вместе с тем и равномерно сходящейся.

Заметим далее, что так как для всякой почти периодической функции $f(t)$ существует предел

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt,$$

то в случае ограниченности области $D$ условие б) удовлетворяется, если выражение $X(t, x)$ для каждого $x$ из $D$ оказывается почти периодической функцией переменной $t$.

Мы рассматривали здесь вопрос о погрешности первого приближения. Однако не представляет никаких затруднений получить асимптотические оценки погрешности и для высших приближений.

## § 27. Преобразование основной системы уравнений

В настоящем параграфе остановимся на рассмотрении задач второго типа, т. е. на установлении соответствия между такими свойствами точных и приближенных решений системы

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x), \tag{27.1}$$

которые зависят от поведения этих решений на бесконечном интервале времени.

Вначале рассмотрим простейший случай, когда уравнения первого приближения

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) \tag{27.2}$$

имеют «квазистатическое» решение, соответствующее точке равновесия

$$\xi = \xi_0; \qquad X_0(\xi_0) = 0. \tag{27.3}$$

Тогда для решений этих уравнений, бесконечно близких к $\xi_0$, имеем уравнения в вариациях:

$$\frac{d\delta\xi}{d\tau} = H\delta\xi, \qquad H = \left(\frac{\partial X_0(\xi)}{\partial\xi}\right)_{\xi=\xi_0}, \qquad \tau = \varepsilon t, \tag{27.4}$$