Заметим теперь, что если область D ограничена (лежит в ограниченной части рассматриваемого евклидова пространства), то в условии б) можно исключить требование равномерности и сформулировать б) как условие существования предела (26.4) в каждой точке этой области.

В самом деле, ввиду условия а) функции

$$F_T(x) = \frac{1}{T}\int_0^T X(t, x)\,dt$$

удовлетворяют неравенству

$$|F_T(x') - F_T(x'')| \leqslant \lambda |x' - x''|,$$

и таким образом, последовательность этих функций при $T \to \infty$ является равностепенно-непрерывной. Но так как область D, будучи ограниченной, компактна, то всякая равностепенно-непрерывная последовательность, сходящаяся в каждой точке D, оказывается вместе с тем и равномерно сходящейся.

Заметим далее, что так как для всякой почти периодической функции $f(t)$ существует предел

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt,$$

то в случае ограниченности области D условие б) удовлетворяется, если выражение $X(t, x)$ для каждого x из D оказывается почти периодической функцией переменной t.

Мы рассматривали здесь вопрос о погрешности первого приближения. Однако не представляет никаких затруднений получить асимптотические оценки погрешности и для высших приближений.

§ 27. Преобразование основной системы уравнений

В настоящем параграфе остановимся на рассмотрении задач второго типа, т. е. на установлении соответствия между такими свойствами точных и приближенных решений системы

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x), \tag{27.1}$$

которые зависят от поведения этих решений на бесконечном интервале времени.

Вначале рассмотрим простейший случай, когда уравнения первого приближения

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) \tag{27.2}$$

имеют «квазистатическое» решение, соответствующее точке равновесия

$$\xi = \xi_0; \qquad X_0(\xi_0) = 0. \tag{27.3}$$

Тогда для решений этих уравнений, бесконечно близких к ξ_0, имеем уравнения в вариациях:

$$\frac{d\delta\xi}{d\tau} = H\delta\xi, \qquad H = \left(\frac{\partial X_0(\xi)}{\partial \xi}\right)_{\xi=\xi_0}, \qquad \tau = \varepsilon t, \tag{27.4}$$

которые являются однородными линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим характеристическое уравнение, соответствующее уравнениям (27.4):

$$\operatorname{Det}|pI - H| = 0, \tag{27.5}$$

и представим общее решение системы (27.4) в виде:

$$\delta\xi(t) = \sum_{(1\leqslant s\leqslant n)} C_s u_s(\tau), \tag{27.6}$$

где C_s — произвольные постоянные, а $u_s(\tau)$ — линейно независимые частные решения, соответствующие отдельным корням характеристического уравнения (27.5).

Для простого корня $p = p_s$

$$u_s(\tau) = e^{p_s\tau}. \tag{27.7}$$

Если этот корень кратный, то

$$u_s(\tau) = P_s(\tau)\, e^{p_s\tau}, \tag{27.8}$$

причем $P_s(\tau)$ будет полиномом по отношению к τ степени не выше порядка кратности p_s.

Таким образом, если все корни данного характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части, то $\delta\xi$ экспоненциально стремятся к нулю.

Допустим, что s корней $p_1, p_2, \ldots, p_s$ имеют отрицательные вещественные части, а у остальных $n-s$ корней $p_{s+1}, p_{s+2}, \ldots, p_n$ вещественные части все положительны.

Рассмотрим в этом случае s-мерное многообразие точек $\delta\xi_0$, которое будем обозначать через $\mathfrak{M}_{t_0}$, характеризующееся тем, что

$$\delta\xi_0 = \sum_{1\leqslant j\leqslant s} C_j u_j(\tau_0), \tag{27.9}$$

или в общем случае

$$\delta\xi_0 = \sum_{1\leqslant j\leqslant s} C_j P_j(\tau_0)\, e^{p_j\tau_0}, \tag{27.10}$$

где все p_j $(j = 1, 2, \ldots, s)$ имеют отрицательные вещественные части.

Тогда для функций $\delta\xi(t)$, имеющих своими начальными значениями величины (27.10), получим:

$$\delta\xi(t_0) = \sum_{1\leqslant j\leqslant s} C_j u_j(\tau_0), \tag{27.11}$$

откуда видим, что в этом случае при $t \to \infty$ $\delta\xi(t)$ будут стремиться к нулю.

Другими словами, если $\delta\xi(t_0)$ лежит на многообразии $\mathfrak{M}_{t_0}$, то тогда $\delta\xi(t)$ экспоненциально стремятся к нулю; если же $\delta\xi(t_0)$ не лежат на этом многообразии, то $\delta\xi(t)$, начиная с достаточно больших t, будет неограниченно удаляться от $\mathfrak{M}_{t_0}$. В частности, когда вещественные части всех корней характеристического уравнения (27.5) положительны, многообразие $\mathfrak{M}_{t_0}$ вырождается в точку $\delta\xi(t_0) = 0$, и любое, отличное от нуля решение $\delta\xi(t)$ с течением времени не будет стремиться к нулю, а наоборот, с течением времени $\delta\xi(t)$ будет неограниченно удаляться от $\mathfrak{M}_{t_0}$.

Если вещественные части некоторых корней характеристического уравнения (27.5) равны нулю, то уравнения (27.4) обладают соответствующими этим корням решениями вида

$$\delta\xi(t) = e^{i\nu\tau} \tag{27.12}$$

с вещественными ν. Однако в этом случае произвольно малое изменение формы уравнений, например внесение нелинейных членов, может радикально изменить поведение решений, вызвать затухание или раскачивание колебаний типа (27.12). Наоборот, если вещественные части всех корней характеристического уравнения (27.5) отличны от нуля, поведение решений оказывается менее чувствительным к введению малых добавок.

В этом случае можно доказать теоремы, устанавливающие, что решения точных уравнений (27.1), лежащие в окрестности ξ_0, где ξ_0 — квазистатическое решение усредненных уравнений (27.2), обладают свойствами, являющимися естественным обобщением свойств решений (27.6) $\delta\xi = \delta\xi(t)$, о которых шла речь выше. Иначе говоря, можно доказать теоремы, устанавливающие, что при определенных условиях разность между любым решением точных уравнений (27.1) и квазистатическим (квазистационарным) решением уравнений (27.1), начальные значения которых будут принадлежать некоторому точечному многообразию, размерность которого равна числу корней характеристического уравнения (27.5) с отрицательными вещественными частями, с течением времени стремится к нулю.

Разумеется, для точных уравнений (27.1) роль квазистатического решения будет играть некоторое специальное решение, близкое к ξ_0, но, вообще зависящее от времени.

Действительно, уже «улучшенное первое приближение»

$$\xi = \xi_0 + \varepsilon\widetilde{X}(t, \xi_0) = \xi_0 + \varepsilon \sum_{\nu\neq 0} \frac{X_\nu(\xi_0)}{i\nu} e^{i\nu t} \tag{27.13}$$

будет зависеть от времени, причем в нем будут появляться колебания с внешними частотами, присутствующими в выражении

$$X(t, x) = \sum_{\nu} X_\nu(x) e^{i\nu t}. \tag{27.14}$$

Введем еще некоторые определения. Пусть каждому t из интервала $(-\infty, \infty)$ соответствует некоторое множество S_t точек x, которое можно представить аналитически в параметрической форме уравнениями вида

$$x = f(t, C_1, C_2, \ldots, C_s),$$

где $f(t, C_1, C_2, \ldots, C_s)$ удовлетворяют условиям Липшица по отношению к параметрам $C_1, C_2, \ldots, C_s$ во всей области их изменения.

Мы будем говорить тогда, что S_t есть s-мерное интегральное многообразие для уравнения (27.1), если для всякого решения $x = x(t)$ этого уравнения из соотношения

$$x(t) \in S_t,$$

справедливого в какой-то момент времени $t = t_0$, вытекает его справедливость для любого вещественного t.

Для доказательства теорем о поведении точных решений в окрестности ξ_0 нам понадобятся, кроме условия неравенства нулю вещественных частей корней характеристического уравнения (27.5), лишь самые общие условия.

Итак, предположим, что:

а) функция $X(t, x)$ и ее частные производные первого порядка по x ограничены и равномерно непрерывны по отношению к x в области

$$-\infty < t < \infty, \quad x \in D_\rho, \tag{27.15}$$

где D_ρ — некоторая ρ-окрестность точки ξ_0;

б) в каждой точке области D_ρ

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T} X(t, x)\,dt \to X_0(x) \quad \text{при} \quad T \to \infty \tag{27.16}$$

равномерно по отношению к t в интервале $(-\infty, \infty)$.

Положив в (27.1)

$$x = \xi_0 + b, \tag{27.17}$$

где ξ_0 — квазистатическое решение уравнения (27.2) и учитывая при этом (27.4), основное уравнение (27.1) можно представить в виде

$$\frac{db}{dt} = \varepsilon Hb + \varepsilon B(t, b), \tag{27.18}$$

где

$$B(t, b) = Z(t, \xi_0 + b) + X_0(\xi_0 + b) - X_0(\xi_0) - \left(\frac{\partial X(\xi)}{\partial \xi}\right)_{\xi=\xi_0} b, \tag{27.19}$$

$$Z(t, x) = X(t, x) - X_0(x), \tag{27.20}$$

При этом в силу а) и б) в ρ-окрестности точки $b = 0$ функции $B(t, b)$, $Z(t, \xi_0 + b)$ и их частные производные первого порядка по b ограничены и равномерно непрерывны по отношению к b в области

$$-\infty < t < \infty, \quad |b| \leqslant \rho. \tag{27.21}$$

Кроме того, в каждой точке рассматриваемой окрестности $|b| \leqslant \rho$ согласно (27.16) и (27.20) имеем:

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T} Z(t, \xi_0 + b)\,dt \to 0 \quad \text{при} \quad T \to \infty \tag{27.22}$$

равномерно по отношению к t, откуда, очевидно, следует:

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T} B(t, b)\,dt \xrightarrow[T\to\infty]{} B(b) = X_0(\xi_0 + b) - X_0(\xi_0) - X'_{0\xi}(\xi_0)\,b. \tag{27.23}$$

Поскольку $B(b)$ со своими частными производными первого порядка обращается в нуль при $b = 0$, то из условия, которому, очевидно, удовлетворяет функция $B(b)$

$$|B(b') - B(b'')| \leqslant \left|\frac{\partial B(b)}{\partial b}\right|_{b=\tilde{b}} |b' - b''| \quad (b' \leqslant \tilde{b} \leqslant b''),$$

следует, что при

$$|b'| < \sigma, \quad |b''| < \sigma \quad (\sigma < \rho)$$

имеет место

$$|B(b') - B(b'')| \leqslant \eta(\sigma)\,|b' - b''|, \tag{27.24}$$

где

$$\eta(\sigma) \to 0 \quad \text{при} \quad \sigma \to 0.$$

Из выражений (27.19), (27.20) видно, что если $X(x, t)$ имеют частные производные до n-го порядка включительно, которые являются ограниченными и равномерно непрерывными по отношению к b в области (27.21), то $B(t, b)$ и $Z(t, \xi_0+b)$ также будут обладать этими свойствами.

Для дальнейшего исследования удобно уравнения (27.18) преобразовать к виду:

$$\frac{dh}{dt}=Hh+Q(t, h, \varepsilon), \tag{27.25}$$

где $Q(t, h, \varepsilon)$ была бы достаточно малой величиной при малых h и ε.

Однако этого преобразования мы производить не будем, так как к аналогичной форме можно привести уравнение (27.18), рассматривая более общий случай, чем изложенный выше, а именно, когда уравнения первого приближения (27.2) имеют периодическое решение:

$$x=\xi(\omega\tau).$$

Итак, приступим к исследованию случая, когда уравнения первого приближения (27.2) имеют периодическое решение, в ρ-окрестности которого функция $X(t, x)$ обладает свойствами:

а) эта функция и ее частные производные первого порядка по x ограничены и равномерно непрерывны по отношению к x в области

$$-\infty<t<\infty, \quad x\in D_\rho,$$

где D_ρ — ρ-окрестность периодического решения уравнений первого приближения.

б) В каждой точке D_ρ:

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T} X(t, x)\,dt \to X_0(x) \quad \text{при} \quad T\to\infty \tag{27.26}$$

равномерно по отношению к t в интервале $(-\infty, \infty)$.

Итак, пусть периодическое решение уравнений (27.2) имеет вид

$$x=\xi(\omega\tau), \tag{27.27}$$

где $\xi(\varphi)$ — периодическая функция φ с периодом 2π.

Составим для уравнений первого приближения (27.2) уравнения в вариациях, соответствующие периодическому решению (27.27).

Получим однородную систему линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами:

$$\frac{d\delta\xi}{d\tau}=X'_{0x}\{\xi(\omega\tau)\}\,\delta\xi. \tag{27.28}$$

В силу определения функции (27.27) тождественно имеем:

$$\omega\xi'_\varphi(\varphi)=X_0\{\xi(\varphi)\}. \tag{27.29}$$

Дифференцируя это равенство по φ, нетрудно убедиться, что при произвольной постоянной δu_0 выражение

$$\delta\xi=\xi'_\varphi(\omega\tau)\,\delta u_0 \tag{27.30}$$

является решением уравнения в вариациях (27.4).

Прежде чем перейти к преобразованию уравнения (27.1), сделаем некоторые замечания, относящиеся к теории дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

Как известно, на основании теорем Флоке—Ляпунова о свойствах линейных однородных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами посредством преобразования типа

$$\delta\xi_k = \xi_k'(\omega\tau)\,\delta u_0 + \sum_{q=1}^{n-1} A_{kq}(\omega\tau)\,\delta u_q \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{27.31}$$

в котором $A_{kq}(\varphi)$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ q=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$ — периодические функции φ с периодом 2π, обладающие непрерывными первыми производными, уравнения с периодическими коэффициентами (27.28) могут быть приведены к системе дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d\delta u_0}{d\tau}=0;\ \frac{d\delta u_k}{d\tau}=\sum_{q=1}^{n-1} H_{kq}\,\delta u_q\ (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1), \tag{27.32}$$

такой, что корни уравнения

$$\mathrm{Det}\,\|pI_{kq}-H_{kq}\|=0, \quad I_{kq}=\begin{cases}1, & k=q,\\ 0, & k\neq q,\end{cases} \tag{27.33}$$

являются характеристическими показателями для системы (27.28).

Здесь также удобно ввести принятую нами систему матрично-векторных обозначений. Для этого введем матрицу

$$A(\varphi)=\|A_{kq}(\varphi)\| \tag{27.34}$$

из n строк и $(n-1)$ столбцов, квадратную матрицу $(n-1)$-го порядка $H=\|H_{kq}\|$ и вектор δu с компонентами $\delta u_1,\ \delta u_2,\ \ldots,\ \delta u_{n-1}$.

Тогда преобразование (27.31) и уравнение (27.32) представятся соответственно в виде:

$$\delta\xi=\xi'(\omega\tau)\,\delta u_0+A(\omega\tau)\,\delta u, \tag{27.35}$$

$$\frac{d\delta u_0}{d\tau}=0,\quad \frac{d\delta u}{d\tau}=H\delta u. \tag{27.36}$$

При этом заметим, что как матрицы $A(\varphi)$ и H, так и вектор δu являются, вообще говоря, комплексными, несмотря на то, что коэффициенты уравнения (27.28) вещественны.

Попутно установим одно соотношение, которое будет нами использовано в дальнейшем. Для этого подставим (27.35) в уравнение (27.28). В результате получим:

$$\frac{d\xi'(\varphi)}{d\tau}\delta u_0+\xi'(\varphi)\frac{d\delta u_0}{d\tau}+\frac{dA(\varphi)}{d\varphi}\omega\delta u+A(\varphi)\frac{d\delta u}{d\tau}=$$
$$=X_{0x}'\{\xi(\varphi)\}\,\xi'(\varphi)\,\delta u_0+X_{0x}'\{\xi(\varphi)\}\,A(\varphi)\,\delta u.$$

Принимая во внимание, что $\xi_\varphi'(\omega\tau)\,\delta u_0$ является решением уравнений в вариациях (27.28), а также соотношение (27.36), получаем следующее тождество:

$$\frac{dA(\varphi)}{d\varphi}\omega+A(\varphi)\,H=X_{0x}'\{\xi(\varphi)\}\,A(\varphi), \tag{27.37}$$

а также

$$\frac{dA^*(\varphi)}{d\varphi}\omega+A^*(\varphi)\,H^*=X_{0x}'\{\xi(\varphi)\}\,A^*(\varphi), \tag{27.37'}$$

где $A^*(\varphi)$, H^* являются сопряженными по отношению к $A(\varphi)$ и H.

Перейдем теперь к преобразованию уравнения (27.1). Для этого запишем его в виде

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X_0(x) + \varepsilon Z(t, x), \tag{27.38}$$

где

$$Z(t, x) = X(t, x) - X_0(x). \tag{27.39}$$

Введем здесь новые переменные $\varphi, b(b_1, \ldots, b_{n-1})$ посредством формул *):

$$x = \xi(\varphi) + \frac{1}{2}\{A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*\}, \tag{27.40}$$

где b и b^* — взаимно сопряженные величины.

Подставляя (27.40) в (27.38), получим:

$$\begin{gathered}
\xi'_\varphi(\varphi)\frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2}\{A'_\varphi(\varphi)b + A^{*\prime}_\varphi(\varphi)b^*\} + \frac{1}{2}\left\{A(\varphi)\frac{db}{dt} + A^*(\varphi)\frac{db^*}{dt}\right\} = \\
= \varepsilon X_0\left\{\xi(\varphi) + \frac{1}{2}[A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*]\right\} + \varepsilon Z\left\{t, \xi(\varphi) + \frac{1}{2}[A(\varphi)b + A^*(\varphi)b]\right\} = \\
= \varepsilon X_0\{\xi(\varphi)\} + \varepsilon X'_{0x}\{\xi(\varphi)\}\frac{1}{2}[A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*] + \\
+ \varepsilon\left[X_0\left\{\xi + \frac{1}{2}[A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*]\right\} - X_0\{\xi(\varphi)\} - \right. \\
\left. - X'_{0x}\{\xi(\varphi)\}\frac{1}{2}[A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*]\right] + \varepsilon Z\left\{t, \xi(\varphi) + \frac{1}{2}[A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*]\right\},
\end{gathered}$$

откуда, учитывая соотношение (27.29) и тождества (27.37), (27.37′), находим:

$$\begin{gathered}
\left[\xi'(\varphi) + \frac{1}{2}(A'_\varphi(\varphi)b + A^{*\prime}_\varphi(\varphi)b^*)\right]\left(\frac{d\varphi}{dt} - \omega\right) + \frac{1}{2}\left[A(\varphi)\left(\frac{db}{dt} - Hb\right) + \right. \\
\left. + A^*(\varphi)\left(\frac{db^*}{dt} - H^*b^*\right)\right] = \varepsilon\left[X_0\left\{\xi + \frac{1}{2}[A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*]\right\} - \right. \\
\left. - X_0\{\xi\} - \frac{1}{2}X'_{0x}\{\xi\}[A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*]\right] + \\
+ \varepsilon Z\left\{t, \xi(\varphi) + \frac{1}{2}[A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*]\right\}.
\end{gathered} \tag{27.41}$$

Систему (27.41) можем представить в виде

$$\begin{gathered}
\left[\xi'(\varphi) + \frac{1}{2}(A'_\varphi(\varphi)b + A^{*\prime}_\varphi(\varphi)b^*)\right]\left(\frac{d\varphi}{dt} - \omega\right) + \\
+ \frac{1}{2}\left[A(\varphi)\left(\frac{db}{dt} - Hb\right) + A^*(\varphi)\left(\frac{db^*}{dt} - H^*b^*\right)\right] = Y,
\end{gathered} \tag{27.42}$$

где Y — вещественная функция.

Найдем из этой системы переменные

$$\frac{d\varphi}{dt} - \omega, \quad \frac{db}{dt} - Hb = R \tag{27.43}$$

---

*) Эта замена переменных отличается от принятой в предыдущем издании тем, что при любых комплексных b выражение x является вещественным. На необходимость сохранения вещественности x обратил наше внимание академик Л. С. Понтрягин, которому выражаем здесь нашу глубокую признательность.

таким образом, чтобы выполнялось условие*)

$$R = R^* \tag{27.44}$$

и, следовательно, чтобы

$$\frac{db^*}{dt} - H^*b^* = R.$$

Учитывая условие (27.44), получим из системы (27.42) систему линейных уравнений с вещественными коэффициентами относительно выражений (27.43):

$$\left[\xi'(\varphi) + \frac{1}{2}\left(A'_\varphi(\varphi)\, b + A^{*\prime}_\varphi(\varphi)\, b^*\right)\right]\left(\frac{d\varphi}{dt} - \omega\right) + \frac{1}{2}\left(A(\varphi) + A^*(\varphi)\right) R = Y. \tag{27.45}$$

Напомним здесь, что Y и $\xi(\varphi)$ — n-мерные векторы, R и b — $n-1$-мерные векторы, A — матрица имеющая n строк и $n-1$ столбцов.

Положим, что определитель этой системы

$$D(\varphi, b) = \left|\xi'(\varphi) + \frac{1}{2}\left(A'_\varphi(\varphi)\, b + A^{*\prime}_\varphi(\varphi)\, b^*\right),\ \frac{1}{2}\left(A(\varphi) + A^*(\varphi)\right)\right| \tag{27.46}$$

при $b = 0$ отличен от нуля**).

Тогда в силу непрерывности он будет отличным от нуля и в некоторой δ-окрестности точки $b = 0$.

Условимся обозначать δ-окрестность точки $b = 0$, в которой определитель $D(\varphi, b)$ отличен от нуля, через U_δ. Область изменения значений (φ, b), для которых b изменяется в U_δ, будем обозначать через ΩU_δ.

Заметим, что всегда можно найти столь малое положительное δ, чтобы в области $\Omega U_\delta\,(b,\ b^* \in U_\delta)$ имело место неравенство

$$\frac{1}{2}\left|A(\varphi)\, b + A^*(\varphi)\, b^*\right| < \rho$$

и, следовательно,

$$x = \xi(\varphi) + \frac{1}{2}\left(A(\varphi)\, b + A^*(\varphi)\, b^*\right)$$

находилось бы в области D_ρ, где D_ρ — ρ-окрестность периодического решения $\xi(\varphi)$, в которой функции $X(t, x)$ удовлетворяют условиям а) и б) (см. стр. 336).

Ввиду того, что комбинация, стоящая в скобках, является всегда вещественной, необходимость обобщения функций $X(t, \varphi)$ на комплексные значения x не возникает.

Решая систему (27.45) в области U_δ относительно переменных (27.43), находим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \varepsilon\omega + \varepsilon W(t, \varphi, b), \\ \frac{db}{dt} &= \varepsilon H b + \varepsilon B(t, \varphi, b), \end{aligned}\right\} \tag{27.47}$$

---

*) Поскольку у нас значения b комплексны, всегда имеется некоторый произвол в выборе R. Выбор дополнительного условия в форме (27.44), очевидно, не является обязательным. Можно выбрать другие, быть может более удобные, формы дополнительных условий.

**) Заметим, что для простоты записи зависимость $D(\varphi, b)$ от b^* не указывается.

где*)

$$
\begin{aligned}
W(t, \varphi, b) = K(\varphi, b) \Big[X_0 \Big\{ \xi(\varphi) + \frac{1}{2}(A(\varphi) b + A^*(\varphi) b^*) \Big\} - \\
- X_0\{\xi(\varphi)\} - X'_{0x}\{\xi(\varphi)\} \frac{1}{2}(A(\varphi) b + A^*(\varphi) b^*) \Big] + \\
+ L(\varphi, b) Z \Big\{ t, \xi(\varphi) + \frac{1}{2}(A(\varphi) b + A^*(\varphi) b^*) \Big\}, \\
B(t, \varphi, b) = M(\varphi, b) \Big[X_0 \Big\{ \xi(\varphi) + \frac{1}{2}(A(\varphi) b + A^*(\varphi) b^*) \Big\} - X_0\{\xi(\varphi)\} - \\
- X'_{0x} \Big\{ \xi(\varphi) + \frac{1}{2}(A(\varphi) b + A^*(\varphi) b^*) \Big\} \Big] + N(\varphi, b) Z \Big\{ t, \xi(\varphi) + \\
+ \frac{1}{2}(A(\varphi) b + A^*(\varphi) b^*) \Big\}, \qquad (27.48)
\end{aligned}
$$

при этом $W(t, \varphi, b)$ и $B(t, \varphi, b)$ являются вещественными функциями.

Здесь $K(\varphi, b)$, $L(\varphi, b)$, $M(\varphi, b)$, $N(\varphi, b)$ представляют собой миноры определителя (27.46), деленные на сам определитель, и являются рациональными функциями b, регулярными при $b=0$ (регулярными в том смысле, что $b=0$ не является особой точкой).

В силу свойств функций $A(\varphi)$ коэффициенты при степенях b в выражениях для $K(\varphi, b)$, $L(\varphi, b)$, $M(\varphi, b)$, $N(\varphi, b)$ являются непрерывными периодическими функциями φ с периодом 2π и обладают непрерывными производными по φ до второго порядка включительно.

Так как в области ΩU_δ имеет место

$$\frac{1}{2} | A(\varphi) b + A^*(\varphi) b^* | < \rho$$

и $\xi'(\varphi)$ в силу (27.29) тоже ограничены и, кроме того, функции $A(\varphi)$ и $\xi(\varphi)$ непрерывны вместе со своими частными производными до второго порядка включительно, то $K(\varphi, b)$, $M(\varphi, b)$, $L(\varphi, b)$, $N(\varphi, b)$ в этой области также будут ограничены и непрерывны вместе со всеми своими частными производными первого порядка.

Поэтому в силу (27.39) и (27.48), где $X(t, x)$ обладают ограниченными и равномерно-непрерывными частными производными по x до второго порядка включительно в области

$$-\infty < t < \infty, \quad x \in D_\rho,$$

следует, что в области

$$-\infty < t < \infty, \ (\varphi, b) \in \Omega U_\delta \qquad (27.49)$$

функции $W(t, \varphi, b)$, $B(t, \varphi, b)$ и их частные производные первого порядка по (φ, b) также будут ограничены и равномерно непрерывны по отношению к (φ, b).

Кроме того, из соотношений

$$\frac{1}{T} \int_t^{+T} X(t, x)\, dt \to X_0(x), \ T \to \infty,$$

$$Z(t, x) = X(t, x) - X_0(x)$$

*) Зависимость $W(t, \varphi, b)$ и $B(t, \varphi, b)$ от b^* ради простоты записи не указывается. В дальнейшем мы также не будем указывать зависимость функций от b^*.

имеем:

$$\frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} Z(t,\ x)\,dt \to 0, \quad T\to\infty.$$

Поэтому из (27.48) следует, что в любой точке области (27.49)

$$\frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} W(t,\ \varphi,\ b)\,dt \to W(\varphi,\ b);\ \frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} B(t,\ \varphi,\ b)\,dt \to B(\varphi,\ b) \qquad (27.50)$$

равномерно по отношению к t при $T\to\infty$, где

$$W(\varphi,\ b)=K(\varphi,\ b)\Big[X_0\Big\{\xi(\varphi)+\frac{1}{2}(A(\varphi)\,b+A^*(\varphi)\,b^*)\Big\}-$$
$$-X_0\{\xi(\varphi)\}-X'_{0x}\{\xi(\varphi)\}\frac{1}{2}(A(\varphi)\,b+A^*(\varphi)\,b^*)\Big],$$
$$B(\varphi,\ b)=M(\varphi,\ b)\Big[X_0\Big\{\xi(\varphi)+\frac{1}{2}(A(\varphi)\,b+A^*(\varphi)\,b^*)\Big\}-$$
$$-X_0\{\xi(\varphi)\}-X'_{x0}\{\xi(\varphi)\}\cdot\frac{1}{2}(A(\varphi)\,b+A^*(\varphi)\,b^*)\Big]. \qquad (27.51)$$

Как видно из (27.51), функции $W(\varphi,\ b)$, $B(\varphi,\ b)$ вместе со своими частными производными первого порядка при $b=0$ обращаются в нуль. Поэтому, взяв произвольное положительное $\sigma<\delta$, мы можем для функций $W(\varphi,\ b)$ и $B(\varphi,\ b)$ написать очевидные соотношения:

$$|W(\varphi',\ b')-W(\varphi'',\ b'')|\leqslant\left|\frac{\partial W(\varphi,\ b)}{\partial\varphi}\right|_{\substack{\varphi=\tilde\varphi\\ b=\tilde b}}|\varphi'-\varphi''|+\left|\frac{\partial W(\varphi,\ b)}{\partial b}\right|_{\substack{\varphi=\tilde\varphi\\ b=\tilde b}}|b'-b''|,$$
$$|B(\varphi',\ b')-B(\varphi'',\ b'')|\leqslant\left|\frac{\partial B(\varphi,\ b)}{\partial\varphi}\right|_{\substack{\varphi=\tilde\varphi\\ b=\tilde b}}|\varphi'-\varphi''|+\left|\frac{\partial B(\varphi,\ b)}{\partial b}\right|_{\substack{\varphi=\tilde\varphi\\ b=\tilde b}}|b'-b''|$$
$$(|b'|\leqslant\sigma;\ |b''|\leqslant\sigma;\ \varphi'\leqslant\tilde\varphi\leqslant\varphi'';\ b'\leqslant\tilde b\leqslant b''),$$

откуда следуют неравенства, справедливые в области ΩU_σ:

$$\left.\begin{aligned}|W(\varphi',\ b')-W(\varphi'',\ b'')|\leqslant\eta(\sigma)\{|\varphi'-\varphi''|+|b'-b''|\},\\ |B(\varphi',\ b')-B(\varphi'',\ b'')|\leqslant\eta(\sigma)\{|\varphi'-\varphi''|+|b'-b''|\},\end{aligned}\right\} \qquad (27.52)$$

где $\eta(\sigma)\to0$ при $\sigma\to0$.

Возвратимся к выражениям для $W(t,\ \varphi,\ b)$ и $B(t,\ \varphi,\ b)\cdot$(27.48). Функции $K(\varphi,\ b)$, $L(\varphi,\ b)$, $M(\varphi,\ b)$, $N(\varphi,\ b)$, как уже указывалось (см. стр. 340), являются непрерывными и периодическими функциями по φ с периодом 2π. Другие функции, стоящие в выражении для $W(t,\ \varphi,\ b)$ и $B(t,\ \varphi,\ b)$:

$$X_0\Big\{\xi(\varphi)+\frac{1}{2}[A(\varphi)\,b+A^*(\varphi)\,b^*]\Big\},\ X_0\{\xi(\varphi)\},$$
$$X'_{0x}\{\xi(\varphi)\},\ A(\varphi),\ Z\Big\{t,\ \xi(\varphi)+\frac{1}{2}[A(\varphi)\,b+A^*(\varphi)\,b^*]\Big\},$$

в силу их определения, также являются периодическими функциями φ. Поэтому $W(t,\ \varphi,\ b)$, $B(t,\ \varphi,\ b)$ - периодические функции φ с периодом 2π.

Кроме того, если $\{\tau_m\}$ есть такая последовательность из R, для которой разность $X(t+\tau_m,x)-X(t,\ x)$ равномерно стремится к нулю в области RD_ρ при $m \to \infty$, то из выражений (27.39) и (27.48) следует:

$$\left.\begin{gathered} W(t+\tau_m, \varphi, b) - W(t, \varphi, b) \to 0, \\ (\text{при } m \to \infty) \\ B(t+\tau_m, \varphi, b) - B(t, \varphi, b) \to 0 \\ \text{равномерно в области } R\Omega U_\delta. \end{gathered}\right\} \tag{27.53}$$

Наложим еще одно ограничительное условие на систему (27.1), а именно: будем полагать, что вещественные части всех $(n-1)$ корней характеристического уравнения (27.33) отличны от нуля. Тем самым мы накладываем здесь требование неравенства нулю вещественных частей $(n-1)$ характеристических показателей*) для уравнений в вариациях (27.28).

Заметим в заключение, что, вводя новые переменные φ, $b(b_1, \ldots, b_{n-1})$, согласно (27.40), мы вместо системы (27.1) получим действительно эквивалентную ей систему (27.47).

В самом деле, пусть φ и $b(b_1, \ldots, b_{n-1})$ удовлетворяют системе (27.47); тогда при условии (27.48) система (27.45) имеет место тождественно и, следовательно,

$$x = \xi(\varphi) + \frac{1}{2}(A(\varphi)\, b + A^*(\varphi)\, b^*)$$

тождественно удовлетворяет системе уравнений (27.1).

Для удобства дальнейшего изучения уравнений (27.47) их целесообразно путем введения новых переменных g, $h(h_1, h_2, \ldots, h_{n-1})$ преобразовать к такому виду:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dg}{dt} &= G(\varepsilon) + P(t, g, h, \varepsilon), \\ \frac{dh}{dt} &= Hh + Q(t, g, h, \varepsilon), \end{aligned}\right\} \tag{27.54}$$

чтобы $P(t, g, h, \varepsilon)$ и $Q(t, g, h, \varepsilon)$ были достаточно малые при малых h и ε.

Для этого рассмотрим некоторую функцию $f(t, x)$, определенную для всех вещественных t и для всех x из множества E. Допустим, что E есть компактное множество некоторого метрического пространства и что в каждой точке E

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T} f(t, x)\, dt \to 0, \quad T \to \infty, \tag{27.55}$$

равномерно по отношению к t.

Кроме того, предположим, что можно указать такие положительные постоянные M и λ, что для всех вещественных t и для всех x, x' и x'' из E имеют место неравенства:

$$|f(t, x)| \leqslant M; \quad |f(t, x') - f(t, x'')| \leqslant \lambda\rho(x', x''), \tag{27.56}$$

где $\rho(x', x'')$ — расстояние между точками x' и x''. Нетрудно заметить, что из принятых условий вытекает, что соотношение (27.55) выполняется равномерно не только по отношению к t, но и по отношению к (t, x).

---

*) n-й характеристический показатель в силу предположения о существовании периодического решения равен нулю.

Поэтому можно построить такую функцию $\varepsilon(T)$, стремящуюся к нулю при $T \to \infty$, что будет иметь место

$$\left|\frac{1}{T}\int\limits_{t}^{t+T} f(t, x)\,dt\right| \leqslant \varepsilon(T), \quad -\infty < t < \infty, \quad x \in E. \tag{27.57}$$

Возьмем теперь произвольную величину η и построим функцию

$$f_\eta(t, x) = \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\eta(t-\tau)} f(\tau, x)\,d\tau. \tag{27.58}$$

Вводя вместо τ новую переменную z по формуле $z = t - \tau$, можем написать:

$$f_\eta(\tau, x) = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\eta z} f(t-z, x)\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\eta nT} \int\limits_{nT}^{(n+1)T} f(t-z, x)\, e^{-\eta(z-nT)}\,dz, \tag{27.59}$$

и поэтому на основании (27.56) получаем:

$$\begin{gathered}
|f_\eta(t, x)| = \Bigl|\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\eta nT} \int\limits_{nT}^{(n+1)T} [f(t-z, x)\, e^{-\eta(z-nT)} + \\
+ f(t-z, x) - f(t-z, x)]\,dz\Bigr| = \Bigl|\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\eta nT} \int\limits_{nT}^{(n+1)T} f(t-z, x)\,dz - \\
- \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\eta nT} \int\limits_{nT}^{(n+1)T} f(t-z, x)\,\left(1 - e^{-\eta(z-nT)}\right) dz\Bigr| \leqslant \\
\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\eta nT} \Bigl|\int\limits_{nT}^{(n+1)T} f(t-z, x)\,dz\Bigr| + M \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\eta nT} \int\limits_{nT}^{(n+1)T} \left(1 - e^{-\eta(z-nT)}\right) dz = \\
= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\eta nT} \Bigl|\int\limits_{nT}^{(n+1)T} f(t-z, x)\,dz\Bigr| + MT \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\eta nT} + M\frac{1}{\eta} e^{-\eta T} \leqslant \\
\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\eta nT} \Bigl|\int\limits_{nT}^{(n+1)T} f(t-z, x)\,dz\Bigr| + MT \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\eta nT} \Bigl|\int\limits_{nT-z}^{nT-z+T} f(t, x)\,dt\Bigr| + MT
\end{gathered} \tag{27.60}$$

или, учитывая (27.57), окончательно находим:

$$|f_\eta(t, x)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\eta nT}\, \varepsilon(T)\, T + MT = \frac{T\varepsilon(T)}{1 - e^{-\eta T}} + MT. \tag{27.61}$$

До сих пор величина T была произвольной. Возьмем теперь T как функцию η, определяемую уравнением

$$1 - e^{-\eta T} = \varepsilon(T). \tag{27.62}$$

Так как $\varepsilon(T) \to 0$ при $T \to \infty$, то нетрудно видеть, что для функции T_η, определяемой этим уравнением, должно выполняться соотношение

$$\eta T_\eta \to 0 \quad \text{при} \quad \eta \to 0.$$

Положим

$$(M+1)\eta T_\eta = \zeta(\eta).$$

Тогда из (27.61) и (27.58) убеждаемся, что для рассматриваемой функции $f(t, x)$ имеет место неравенство

$$\left| \int_{-\infty}^{t} e^{-\eta(t-\tau)} f(\tau, x)\, d\tau \right| \leqslant \frac{\zeta(\eta)}{\eta}, \quad -\infty < t < \infty, \quad x \in E, \tag{27.63}$$

в котором

$$\zeta(\eta) \to 0 \quad \text{при} \quad \eta \to 0. \tag{27.64}$$

Итак, неравенство (27.63) получено нами для функции $f(t, x)$, обладающей свойствами:

1) $f(t, x)$ определена для всех вещественных t и для $x \in E$, где E — компактное множество;

2) в каждой точке E

$$\frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} f(t, x)\, dt \to 0, \quad T \to \infty,$$

равномерно по отношению к t;

3) $|f(t, x)| \leqslant M$, $|f(t, x') - f(t, x'')| \leqslant \lambda\rho(x', x'')$;

4) при выполнении 3) свойство 2) имеет место равномерно относительно (t, x).

Получим теперь неравенства типа (27.63) для функций:

$$\left.\begin{aligned} W_1(t, \varphi, b) &= W(t, \varphi, b) - W(\varphi, b), \\ B_1(t, \varphi, b) &= B(t, \varphi, b) - B(\varphi, b), \end{aligned}\right\} \tag{27.65}$$

приняв за множество E область ΩU_δ.

Так как эти функции периодичны по φ с периодом 2π то, очевидно, можем представить Ω как окружность, и тогда $E = \Omega U_\delta$ будет компактной областью в метрическом пространстве, являющемся топологическим произведением Ω и $(n-1)$-мерного эвклидова пространства.

Кроме того, в силу (27.50) в любой точке области ΩU_δ

$$\frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} W_1(t, \varphi, b)\, dt \to 0; \quad \frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} B_1(t, \varphi, b)\, dt \to 0 \quad \text{при} \quad T \to \infty \tag{27.66}$$

равномерно по отношению к t.

Очевидно также, что функции $W_1(t, \varphi, b)$, $B_1(t, \varphi, b)$, как и функции $W(\varphi, b)$, $B(\varphi, b)$, удовлетворяют в области ΩU_σ, где $\sigma < \delta$, неравенствам вида

$$\left.\begin{aligned} |W_1(t, \varphi', b') - W_1(t, \varphi'', b'')| &\leqslant \eta(\sigma)\{|\varphi' - \varphi''| + |b' - b''|\}, \\ |B_1(t, \varphi', b') - B_1(t, \varphi'', b'')| &\leqslant \eta(\sigma)\{|\varphi' - \varphi''| + |b' - b''|\} \end{aligned}\right\} \tag{27.67}$$

$$(|b'| \leqslant \sigma, \quad |b''| \leqslant \sigma),$$

где

$$\eta(\sigma) \to 0 \quad \text{при} \quad \sigma \to 0.$$

Поэтому можно построить функцию $\zeta(\eta)$ со свойством (27.64) таким образом, чтобы для произвольного положительного η имели место неравенства:

$$|W_{1\eta}(t, \varphi, b)| \leqslant \frac{\zeta(\eta)}{\eta}; \quad |B_{1\eta}(t, \varphi, b)| \leqslant \frac{\zeta(\eta)}{\eta}, \tag{27.68}$$
$$-\infty < t < \infty, \quad (\varphi, b) \in \Omega U_\delta,$$

где

$$\left.\begin{aligned} W_{1\eta}(t, \varphi, b) &= \int_{-\infty}^{t} e^{-\eta(t-\tau)} W_1(t, \varphi, b)\, d\tau, \\ B_{1\eta}(t, \varphi, b) &= \int_{-\infty}^{t} e^{-\eta(t-\tau)} B_1(t, \varphi, b)\, d\tau. \end{aligned}\right\} \tag{27.69}$$

Введем теперь по аналогии с определением (26.5) функцию

$$\Delta_a(b) = \begin{cases} A_a \left\{1 - \dfrac{|b|^2}{a^2}\right\}^{2q}, & |b| \leqslant a, \\ 0, & |b| > a, \end{cases} \tag{27.70}$$

где a — некоторое заданное достаточно малое число; A_a определяется условием нормирования:

$$\int_{U_\delta} \Delta_a(b)\, db = 1, \tag{27.71}$$

где $db = db_1 \ldots db_{n-1}$.

В (27.70) $q > 1$ — некоторое фиксированное целое число, величина которого может быть взята сколь угодно большой.

Построим еще функцию $\delta_a(\varphi)$ одной вещественной переменной φ, задав ее на интервале $(-\pi, \pi)$ с помощью соотношений:

$$\left.\begin{aligned} &\delta_a(\varphi) = \begin{cases} \Phi_a \left\{1 - \dfrac{\varphi^2}{a^2}\right\}^{2q}, & |\varphi| \leqslant a, \\ 0, & |\varphi| > a, \end{cases} \\ &\int_{-a}^{a} \delta_a(\varphi)\, d\varphi = 1, \qquad a < \pi, \end{aligned}\right\} \tag{27.72}$$

и распространим область ее определения на всю вещественную ось с помощью условия периодичности с периодом 2π.

Введя эти функции, построим выражения:

$$\left.\begin{aligned} u(t, \varphi, b) &= \int_\Omega \int_{U_\delta} \delta_a(\varphi - \varphi') \Delta_a(b - b') W_{1\eta}(t, \varphi', b')\, d\varphi'\, db', \\ v(t, \varphi, b) &= \int_\Omega \int_{U_\delta} \delta_a(\varphi - \varphi') \Delta_a(b - b') B_{1\eta}(t, \varphi', b')\, d\varphi'\, db', \end{aligned}\right\} \tag{27.73}$$

обладающие по отношению к φ периодом 2π, так как согласно определению $\delta_a(\varphi)$ — периодическая функция φ с периодом 2π.

Заметим, что по своему построению функция

$$\delta_a(\varphi - \varphi') \Delta_a(b - b') \tag{27.74}$$

обладает частными производными по φ и b до $2q$ порядка включительно. Кроме того, так как $\Delta_a(b)$, $\delta_a(\varphi)$ отличны от нуля соответственно при

$b|\leqslant a$, $|\varphi|\leqslant a$, то функция (27.74) и все ее частные производные до $2q$ порядка включительно ограничены и по норме не превосходят некоторой величины $G(a)$, вообще стремящейся к ∞ при $a\to 0$. Отсюда на основании (27.68) можем заключить, что функции (27.73) и все их частные производные по φ, b до $2q$ порядка включительно ограничены по норме на множестве*) $R\Omega U_\delta$ величиной $G(a)\dfrac{\zeta(\eta)}{\eta}$.

До сих пор a и η были произвольными.

Возьмем теперь в качестве a и η некоторые функции a_ε и η_ε параметра ε таким образом, чтобы

$$a_\varepsilon\to 0,\quad \eta_\varepsilon\to 0,\quad \varepsilon G(a)\frac{\zeta(\eta_\varepsilon)}{\eta_\varepsilon}\to 0,$$
$$G(a_\varepsilon)\zeta(\eta_\varepsilon)\to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon\to 0. \tag{27.75}$$

Фиксируем некоторое положительное $\rho_0<\delta$ и возьмем ε^* столь малым, чтобы для $0<\varepsilon<\varepsilon^*$ $a=a_\varepsilon$ удовлетворило также неравенству

$$a+\rho_0<\delta. \tag{27.76}$$

Заметим, что из неравенств

$$|b|<\rho_0,\quad |b-b'|\leqslant a \quad \text{и} \quad a+\rho_0<\delta$$

следует:

$$|b'|<\delta.$$

Тогда, принимая во внимание определение (27.70) и (27.71) функции $\Delta_a(b)$, видим, что при $b\in U_{\rho_0}$, $0<\varepsilon<\varepsilon^*$:

$$\int_{U_\delta}\Delta_a(b-b')\,db'=1. \tag{27.77}$$

Теперь, принимая во внимание (27.69), запишем выражения (27.73) для $u(t,\varphi,b)$ в следующем виде:

$$u(t,\varphi,b)=\int_\Omega\int_{U_\delta}\delta_a(\varphi-\varphi')\Delta_a(b-b')\left[\int_{-\infty} e^{-\eta(t-\tau)}W_1(t,\varphi',b')\,d\tau\right]d\varphi'\,db'. \tag{27.78}$$

Тогда имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\eta u=\int_\Omega\int_{U_\delta}\delta_a(\varphi-\varphi')\Delta_a(b-b')\left\{\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{t} e^{-\eta(t-\tau)}W_1(\tau,\varphi',b')\,d\tau+\right.$$
$$\left.+\eta\int_{-\infty}^{t} e^{-\eta(t-\tau)}W_1(\tau,\varphi',b')\,d\tau\right\}d\varphi'\,db'. \tag{27.79}$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{t} e^{-\eta(t-\tau)}W_1(\tau,\varphi',b')\,d\tau=-\eta\int_{-\infty}^{t} e^{-\eta(t-\tau)}W_1(\tau,\varphi',b')\,d\tau+W_1(t,\varphi',b'),$$

---

*) Для сокращения записи мы здесь вещественную ось $(-\infty,\infty)$ обозначили через R, так что $R\Omega U_\delta$ обозначает множество точек (t,φ,b), для которых $-\infty<t<\infty$, $\varphi\in\Omega$, $b\in U_\delta$.

то из (27.79) следует:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \eta u = \int\limits_{\Omega}\int\limits_{U_\delta} \delta_a(\varphi - \varphi')\Delta_a(b - b')W_1(t, \varphi', b')\,d\varphi'\,db'. \tag{27.80}$$

В силу периодичности $\delta_a(\varphi)$ и соотношения (27.77) для

$$(t, \varphi, b) \in R\Omega U_{\rho_0}, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon^*,$$

имеем:

$$\int\limits_{\Omega}\int\limits_{U_\delta} \delta_a(\varphi - \varphi')\Delta_a(b - b')\,d\varphi'\,db' = \int\limits_{\Omega} \delta_a(\varphi - \varphi')\,d\varphi' = \int\limits_{\Omega} \delta_a(\varphi')\,d\varphi' = 1. \tag{27.81}$$

Поэтому для этих же значений t, φ, b получим:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \eta u - W_1(t, \varphi, b) = \int\limits_{\Omega}\int\limits_{U_\delta} \delta_a(\varphi - \varphi')\Delta_a(b - b')\{W_1(t, \varphi', b') - \\ - W_1(t, \varphi, b)\}\,d\varphi'\,db'. \tag{27.82}$$

С другой стороны, заметим, что согласно (27.67) можно указать такое положительное λ, чтобы выполнялось неравенство

$$|W_1(t, \varphi', b') - W_1(t, \varphi, b)| \leqslant \lambda\{|\varphi' - \varphi| + |b' - b|\}. \tag{27.83}$$

$$(t, \varphi, b),\ (t, \varphi', b') \in R\Omega U_\delta.$$

Благодаря периодичности $\delta_a(\varphi)$ по φ интегрирование по φ' можно производить по любому интервалу длины 2π и поэтому, в частности, за интервал интегрирования можем взять интервал

$$\varphi - \pi, \quad \varphi + \pi.$$

При таком выборе интервала $\varphi - \varphi'$ будет изменяться от $-\pi$ до π и, следовательно, в силу (27.72) $\delta_a(\varphi - \varphi')$ будет отлична от нуля только тогда, когда

$$|\varphi - \varphi'| \leqslant a.$$

Поэтому, так как для $|\varphi - \varphi'| \leqslant a$ $(a < \pi)$, $|b - b'| \leqslant a$, $b \in U_{\rho_0}$ $(\rho_0 + a < \delta)$, $\varepsilon < \varepsilon^*$:

$$\int\limits_{\Omega}\int\limits_{U_\delta} \delta_a(\varphi - \varphi')\Delta_a(b - b')\,d\varphi'\,db' = 1,$$

то для $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ на $R\Omega U_{\rho_0}$ имеет место неравенство

$$\left|\frac{\partial u}{\partial t} + \eta u - W_1(t, \varphi, b)\right| \leqslant 2\lambda a \int\limits_{\Omega}\int\limits_{U_\delta} \delta_a(\varphi - \varphi')\Delta_a(b - b')\,d\varphi'\,db' = 2\lambda a. \tag{27.84}$$

Рассмотрим теперь частные производные

$$\frac{\partial}{\partial b}\left\{\frac{\partial u}{\partial t} + \eta u - W_1(t, \varphi, b)\right\}; \quad \frac{\partial}{\partial \varphi}\left\{\frac{\partial u}{\partial t} + \eta u - W_1(t, \varphi, b)\right\} \tag{27.85}$$

и заметим, что с помощью интегрирования по частям выражения (27.78) их можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned} &\int\limits_{\Omega}\int\limits_{U_\delta} \delta_a(\varphi - \varphi')\Delta_a(b - b')\left\{\frac{\partial W_1(t, \varphi', b')}{\partial b'} - \frac{\partial W_1(t, \varphi, b)}{\partial b}\right\}d\varphi'\,db', \\ &\int\limits_{\Omega}\int\limits_{U_\delta} \delta_a(\varphi - \varphi')\Delta_a(b - b')\left\{\frac{\partial W_1(t, \varphi', b')}{\partial \varphi'} - \frac{\partial W_1(t, \varphi, b)}{\partial \varphi}\right\}d\varphi'\,db'. \end{aligned}\right\} \tag{27.86}$$

В силу определения функций $W_1(t, \varphi', b')$ и $W_1(t, \varphi, b)$ их частные производные по b, b', φ, φ' будут непрерывными функциями. Поэтому можно найти монотонную функцию $\xi(\varepsilon)$, стремящуюся к нулю при $\varepsilon \to 0$, такую, что

$$\left.\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial W_1(t, \varphi', b')}{\partial b'} - \frac{\partial W_1(t, \varphi, b)}{\partial b}\right| \leqslant \xi(\varepsilon)\{|\varphi' - \varphi| + |b' - b|\},\\
&\left|\frac{\partial W_1(t, \varphi', b')}{\partial \varphi'} - \frac{\partial W_1(t, \varphi, b)}{\partial \varphi}\right| \leqslant \xi(\varepsilon)\{|\varphi' - \varphi| + |b' - b|\}.
\end{aligned}\right\} \qquad (27.87)$$

Рассуждая, как и выше, т. е. принимая за интервал интегрирования $\varphi - \pi$, $\varphi + \pi$, на котором $\delta_a(\varphi - \varphi')$ будет отличной от нуля, а также принимая во внимание (27.82), имеющее место при $|b' - b| \leqslant a$, убеждаемся, что производные (27.85) на множестве $R\Omega U_{\rho_0}$ по норме будут меньше, чем $2\xi a$ для $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$. Но так как в силу (27.75) $a \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то очевидно, что функция (27.82) и ее частные производные по b и φ на множестве $R\Omega U_{\rho_0}$ по норме будут меньше, чем $2\xi a$ для $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$.

Но так как в силу (27.75) $a \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то очевидно, что функция (27.82) и ее частные производные по b и φ на множестве $R\Omega U_{\rho_0}$ по норме будут меньше некоторой величины $\mu(\varepsilon)$, стремящейся к нулю вместе с ε.

Аналогичным образом убеждаемся, что теми же свойствами будет обладать функция

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \eta v - B_1(t, \varphi, b).$$

Кроме того, функции ηu, ηv и их частные производные по φ, b ограничены по норме на множестве $R\Omega U_{\rho_0}$ величиной $G(a)\zeta(\eta)$, стремящейся к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Итак, функции

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - W_1(t, \varphi, b) = \frac{\partial u}{\partial t} - W(t, \varphi, b) + W(\varphi, b),\\
&\frac{\partial v}{\partial t} - B_1(t, \varphi, b) = \frac{\partial v}{\partial t} - B(t, \varphi, b) + B(\varphi, b)
\end{aligned}\right\} \qquad (27.88)$$

и их частные производные первого порядка по φ и b ограничены по норме на множестве $R\Omega U_{\rho_0}$ величиной $\alpha(\varepsilon)$, стремящейся к нулю вместе с ε.

Заметив это, возвратимся к уравнениям (27.47) и совершим замену переменных, полагая

$$\varphi = g + \varepsilon u(t, g, h); \quad b = h + \varepsilon v(t, g, h). \qquad (27.89)$$

Дифференцируя (27.89) и подставляя в (27.47), получим:

$$\frac{dg}{dt} + \varepsilon\frac{\partial u}{\partial g}\frac{dg}{dt} + \varepsilon\frac{\partial u}{\partial h}\frac{dh}{dt} = -\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon\omega + \varepsilon W\{t, g + \varepsilon u, h + \varepsilon v\},$$

$$\frac{dh}{dt} + \varepsilon\frac{\partial v}{\partial g}\frac{dg}{dt} + \varepsilon\frac{\partial v}{\partial h}\frac{dh}{dt} = -\varepsilon\frac{\partial v}{\partial t} + \varepsilon Hh + \varepsilon^2 Hv + \varepsilon B\{t, g + \varepsilon u, h + \varepsilon v\},$$

или

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dg}{dt}+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial g}\frac{dg}{dt}+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial h}\frac{dh}{dt}=-\varepsilon\left\{\frac{\partial u}{\partial t}-W(t,g,h)+W(g,h)\right\}+\\
&\qquad+\varepsilon\{W(t,g+\varepsilon u,h+\varepsilon v)-W(t,g,h)\}+\varepsilon W(g,h)+\varepsilon\omega,\\
&\frac{dh}{dt}+\varepsilon\frac{\partial v}{\partial g}\frac{dg}{dt}+\varepsilon\frac{\partial v}{\partial h}\frac{dh}{dt}=-\varepsilon\left\{\frac{\partial v}{\partial t}-B(t,g,h)+B(g,h)\right\}+\\
&+\varepsilon^2Hv+\varepsilon\{B(t,g+\varepsilon u,h+\varepsilon v)-B(t,g,h)\}+\varepsilon B(g,h)+\varepsilon Hh.
\end{aligned}\right\}\quad(27.90)$$

Возьмем теперь столь малое $\varepsilon_1<\varepsilon^*$, чтобы для всякого положительного ε, не превосходящего ε_1, было справедливо неравенство

$$\varepsilon G(a)\frac{\zeta(\eta)}{\eta}<\delta-\rho_1,\quad 0<\rho_1<\delta. \tag{27.91}$$

Тогда ввиду того, что функции (27.73) ограничены функцией $G(a)\frac{\zeta(\eta)}{\eta}$, следует:

$$|\varepsilon v|\leqslant\varepsilon G(a)\frac{\zeta(\eta)}{\eta}, \tag{27.92}$$

и при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$, $(t,g,h)\in R\Omega U_{\rho_1}$ будем иметь:

$$|h+\varepsilon v|\leqslant\varepsilon G(a)\frac{\zeta(\eta)}{\eta}+\rho_1<\delta. \tag{27.93}$$

Но, как указывалось выше, функции

$$W(t,\varphi,b)-W(\varphi,b),\quad B(t,\varphi,b)-B(\varphi,b)$$

для значений $b\in U_\delta$ являются ограниченными на множестве $R\Omega U_\delta$ вместе со своими частными производными функциями, стремящимися к нулю при $\varepsilon\to 0$.

Поэтому, ввиду того, что $h+\varepsilon v\in U_\delta$, убеждаемся, что функции

$$\left.\begin{aligned}
&W(t,g+\varepsilon u,h+\varepsilon v)-W(t,g,h),\\
&B(t,g+\varepsilon u,h+\varepsilon v)-B(t,g,h)
\end{aligned}\right\}\quad(27.94)$$

и их частные производные первого порядка по g, h ограничены по норме на множестве $R\Omega U_{\rho_1}$ некоторой функцией, стремящейся к нулю при $\varepsilon\to 0$. Ввиду того, что функции (27.88) также обладают этими свойствами, выражения

$$L_1(t,g,h,\varepsilon)=W(t,g+\varepsilon u,h+\varepsilon v)-W(t,g,h)-\frac{\partial u}{\partial t}+W(t,g,h)-W(g,h),$$

$$L_2(t,g,h,\varepsilon)=B(t,g+\varepsilon u,h+\varepsilon v)-B(t,g,h)-\frac{\partial v}{\partial t}+B(t,g,h)-B(g,h)+\varepsilon Hv$$

и их частные производные первого порядка по g, h ограничены на множестве $R\Omega U_{\rho_1}$ некоторой функцией от ε, стремящейся к нулю при $\varepsilon\to 0$. Заметив это, представим уравнения (27.90) в форме, разрешенной относительно $\frac{dg}{dt}$, $\frac{dh}{dt}$.

Для этого рассмотрим матрицу, обратную матрице n-го порядка:

$$\begin{Vmatrix} 1_1+\varepsilon\dfrac{\partial u}{\partial g} & \varepsilon\dfrac{\partial u}{\partial h} \\ \varepsilon\dfrac{\partial v}{\partial g} & 1_{n-1}+\varepsilon\dfrac{\partial v}{\partial h} \end{Vmatrix}, \qquad (27.95)$$

где 1_{n-1} представляет квадратную единичную матрицу $(n-1)$-го порядка.

Как указывалось, функции (27.73) и все их частные производные по φ, b до $2q$ порядка включительно ограничены по норме на множестве $R\Omega U_\delta$ величиной $G(a)\frac{\zeta(\eta)}{\eta}$.

Очевидно, что для значений $(t, g, h)\in R\Omega U_{\rho_1}$, где $\rho_1<\delta$, функции $u(t, g, h)$, $v(t, g, h)$ также будут ограничены по норме на множестве $R\Omega U_{\rho_1}$ вместе со своими частными производными первого порядка по g и h функцией $\alpha(\varepsilon)$, стремящейся к нулю при $\varepsilon\to 0$.

Поэтому можно указать такое положительное $\varepsilon_0<\varepsilon_1$, чтобы для любого положительного $\varepsilon<\varepsilon_0$ матрица, обратная матрице (27.95), существовала везде на $R\Omega U_{\rho_1}$ и могла быть представлена в виде:

$$\begin{Vmatrix} 1_1+\mathfrak{a}_{11} & \mathfrak{a}_{12} \\ \mathfrak{a}_{21} & 1_{n-1}+\mathfrak{a}_{22} \end{Vmatrix}, \qquad (27.96)$$

где

$$\mathfrak{a}_{11}(t, g, h, \varepsilon),\ \mathfrak{a}_{12}(t, g, h, \varepsilon),\ \mathfrak{a}_{21}(t, g, h, \varepsilon),\ \mathfrak{a}_{22}(t, g, h, \varepsilon)$$

и их частные производные первого порядка по g, h стремятся к нулю при $\varepsilon\to 0$ равномерно на $R\Omega U_{\rho_1}$.

Решая систему (27.90) относительно $\frac{dg}{dt}$, $\frac{dh}{dt}$, получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dg}{dt} &= \varepsilon\omega+\varepsilon\Pi(t, g, h, \varepsilon), \\ \frac{dh}{dt} &= \varepsilon Hh+\varepsilon\Gamma(t, g, h, \varepsilon), \end{aligned}\right\} \qquad (27.97)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi(t, g, h, \varepsilon) &= W(g, h)+\mathfrak{a}_{11}(t, g, h, \varepsilon)\{\omega+W(g, h)+L_1(t, g, h, \varepsilon)\}+ \\ &\quad +\mathfrak{a}_{21}(t, g, h, \varepsilon)\{Hh+B(g, h)+L_2(t, g, h, \varepsilon)\}+L_1(t, g, h, \varepsilon); \\ \Gamma(t, g, h, \varepsilon) &= B(g, h)+\mathfrak{a}_{12}(t, g, h, \varepsilon)\{\omega+W(g, h)+ \\ &\quad +L_1(t, g, h, \varepsilon)\}+\mathfrak{a}_{22}(t, g, h, \varepsilon)\{Hh+B(g, h)+ \\ &\quad +L_2(t, g, h, \varepsilon)\}+L_2(t, g, h, \varepsilon). \end{aligned} \qquad (27.98)$$

Сделаем ряд замечаний о свойствах введенных функций $\Pi(t, g, h, \varepsilon)$ и $\Gamma(t, g, h, \varepsilon)$, которые будут нам необходимы для дальнейших рассуждений.

Как видно из (27.98), функции $\Pi(t, g, h, \varepsilon)$ и $\Gamma(t, g, h, \varepsilon)$ определены для каждого положительного $\varepsilon<\varepsilon_0$ на множестве $R\Omega U_{\rho_1}$, причем на этом множестве функции

$$\Pi(t, g, h, \varepsilon)-W(g, h),\ \Gamma(t, g, h, \varepsilon)-B(g, h)$$

и их частные производные по g, h стремятся к нулю равномерно при $\varepsilon\to 0$.

Принимая во внимание (27.51), заключаем, что можно указать такие функции $M(\varepsilon)$; $\lambda(\varepsilon, \sigma)$, удовлетворяющие условиям: $M(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$; $\lambda(\varepsilon, \sigma) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, $\sigma \to 0$, что имеют место неравенства:

$$|\Pi(t, g, 0, \varepsilon)| \leqslant M(\varepsilon); \quad |\Gamma(t, g, 0, \varepsilon)| \leqslant M(\varepsilon), \tag{27.99}$$
$$\varepsilon < \varepsilon_0, \quad t \in R, \quad g \in \Omega.$$

$$\left.\begin{aligned} &|\Pi(t, g', h', \varepsilon) - \Pi(t, g'', h'', \varepsilon)| \leqslant \lambda(\varepsilon, \sigma)\{|g' - g''| + |h' - h''|\}, \\ &|\Gamma(t, g', h', \varepsilon) - \Gamma(t, g'', h'', \varepsilon)| \leqslant \lambda(\varepsilon, \sigma)\{|g' - g''| + |h' - h''|\}, \end{aligned}\right\} \tag{27.100}$$
$$(t, g', h'), (t, g'', h'') \in R\Omega U_\sigma, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0,$$

в которых σ — произвольное положительное число меньшее ρ_1.

Функции $\Pi(t, g, h, \varepsilon)$, $\Gamma(t, g, h, \varepsilon)$ обладают периодом 2π по отношению к g, так как этим свойством обладают функции, входящие в выражения для $\Pi(t, g, h, \varepsilon)$, $\Gamma(t, g, h, \varepsilon)$. Так как функции $\Pi(t, g, h, \varepsilon)$, $\Gamma(t, g, h, \varepsilon)$ (см. (27.98)) выражаются через функции, которые в свою очередь выражаются через $W(t, \varphi, b)$, $B(t, \varphi, b)$, то ясно, что если $\{\tau_m\}$ есть такая последовательность из R, для которой равномерно на $R\Omega U_\delta$ имеют место соотношения (27.53), то для этой последовательности равномерно на $R\Omega U_{\rho_1}$ будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} &\Pi(t + \tau_m, g, h, \varepsilon) - \Pi(t, g, h, \varepsilon) \to 0, \\ &\Gamma(t + \tau_m, g, h, \varepsilon) - \Gamma(t, g, h, \varepsilon) \to 0 \end{aligned}\right\} \tag{27.101}$$

при $m \to \infty$ и при каждом ε таком, что $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

Если условие а) (см. стр. 336) об ограниченности и равномерной непрерывности частных производных функции $X(t, x)$ по x усилить требованием ограниченности частных производных до m-го порядка включительно, то построенные функции $\Pi(t, g, h, \varepsilon)$, $\Gamma(t, g, h, \varepsilon)$ также будут обладать ограниченными и равномерно-непрерывными частными производными до m-го порядка включительно, что следует из рассмотрения формул (27.66), (27.69), (27.73) и (27.89).

Возвращаясь к уравнениям (27.97), совершим в них переход к «медленному времени», положив

$$\tau = \varepsilon t.$$

Тогда получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dg}{d\tau} &= \omega + \Pi\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, g, h, \varepsilon\right), \\ \frac{dh}{d\tau} &= Hh + \Gamma\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, g, h, \varepsilon\right). \end{aligned}\right\} \tag{27.102}$$

Выделим теперь один частный случай, который подробно будет нами рассмотрен в § 30, когда функции $W(t, \varphi, b)$, $B(t, \varphi, b)$, входящие в уравнения (27.47), имеют вид

$$\left.\begin{aligned} W(t, \varphi, b) &= \overline{W}(t, \varphi + \nu t, b), \\ B(t, \varphi, b) &= \overline{B}(t, \varphi + \nu t, b), \end{aligned}\right\} \tag{27.103}$$

где $\overline{W}(t, \varphi, b)$, $\overline{B}(t, \varphi, b)$ — периодичны по t с некоторым постоянным периодом T.

Тогда в силу формул (27.66), (27.69), (27.73) и (27.89) видим, что также

$$\Pi(t, g, h, \varepsilon) = \overline{\Pi}(t, g + \nu t, h, \varepsilon),$$
$$\Gamma(t, g, h, \varepsilon) = \overline{\Gamma}(t, g + \nu t, h, \varepsilon),$$

причем $\overline{\Pi}(t, g, h, \varepsilon)$, $\overline{\Gamma}(t, g, h, \varepsilon)$ будут обладать по отношению к t тем же периодом T.

В рассматриваемом частном случае (27.103), переходя к новой угловой переменной ϑ согласно формуле

$$g + \nu t = g + \frac{\nu\tau}{\varepsilon} = \vartheta,$$

вместо системы (27.102) получим уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega + \frac{\nu}{\varepsilon} + \overline{\Pi}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \vartheta, h, \varepsilon\right), \\ \frac{dh}{d\tau} &= Hh + \overline{\Gamma}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \vartheta, h, \varepsilon\right), \end{aligned}\right\} \tag{27.104}$$

правые части которых обладают периодом εT по отношению к τ.

Как видно, уравнения (27.102), в частном случае (27.103), и уравнения (27.104), к которым приводятся основные уравнения:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon\omega + \varepsilon W(t, \varphi, b),$$
$$\frac{db}{dt} = \varepsilon Hb + \varepsilon B(t, \varphi, b),$$

заменой переменных

$$\varphi = g + \varepsilon u(t, g, h, \varepsilon), \quad b = h + \varepsilon v(t, g, h, \varepsilon),$$
$$\varepsilon t = \tau, \quad g + \nu t = \vartheta$$

могут быть сведены к следующему типу уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dg}{dt} &= G(\varepsilon) + P(t, g, h, \varepsilon), \\ \frac{dh}{dt} &= Hh + Q(t, g, h, \varepsilon), \end{aligned}\right\} \tag{27.105}$$

при этом в силу указанных свойств функций $\Pi(t, g, h, \varepsilon)$ и $\Gamma(t, g, h, \varepsilon)$ можно указать такие положительные числа ε_0, ρ_1 ($\rho_1 < \delta$), что будут выполнены условия:

а) функция $G(\varepsilon)$ определена для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$;

б) функции $P(t, g, h, \varepsilon)$, $Q(t, g, h, \varepsilon)$ определены в области

$$t \in R, \; g \in \Omega, \; h \in U_{\rho_1}, \; 0 < \varepsilon < \varepsilon_0,$$

и обладают периодом 2π по отношению к угловой переменной g $\Big($напомним, что в частном случае (27.103) в уравнении (27.104) $\overline{\Pi}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, g, h, \varepsilon\right)$, $\overline{\Gamma}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, g, h, \varepsilon\right)$ обладают периодом εT по отношению к $\tau\Big)$;

в) $G(\varepsilon)$ и $P(t, g, h, \varepsilon)$ могут принимать лишь вещественные значения;

г) для $t \in R$, $g \in \Omega$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ имеют место неравенства:

$$|P(t, g, 0, \varepsilon)| \leqslant M(\varepsilon); \quad |Q(t, g, 0, \varepsilon)| \leqslant M(\varepsilon), \tag{27.106}$$

где $M(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$;

д) для любого положительного $\sigma < \rho_1$ в области

$$t \in R, \ g' \in \Omega, \ g'' \in \Omega, \ h' \in U_\sigma, \ h'' \in U_\sigma, \ 0 < \varepsilon < \varepsilon_0,$$

имеют место неравенства:

$$\begin{aligned} |P(t, g', h', \varepsilon) - P(t, g'', h'', \varepsilon)| &\leqslant \lambda(\varepsilon, \sigma)\{|g' - g''| + |h' - h''|\}, \\ |Q(t, g', h', \varepsilon) - Q(t, g'', h'', \varepsilon)| &\leqslant \lambda(\varepsilon, \sigma)\{|g' - g''| + |h' - h''|\}, \end{aligned} \tag{27.107}$$

в которых $\lambda(\varepsilon, \sigma) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, $\sigma \to 0$;

е) все вещественные части корней $p_1, \ldots, p_{n-1}$ уравнения

$$\operatorname{Det}|pI_{n-1} - H| = 0 \tag{27.108}$$

отличны от нуля.

Отметим, что в статическом случае, когда отсутствует зависимость от угловой переменной φ, основные уравнения (27.1) в результате аналогичных преобразований будут приведены к системе:

$$\frac{dh}{dt} = Hh + Q(t, h, \varepsilon), \tag{27.109}$$

при этом можно указать такие ε_0 и ρ_1, что будут выполняться условия:

а) функции $Q(t, h, \varepsilon)$ определены в области

$$t \in R, \ h \in U_{\rho_1}, \ 0 < \varepsilon < \varepsilon_0;$$

б) для $t \in R$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, имеет место неравенство

$$|Q(t, 0, \varepsilon)| \leqslant M(\varepsilon), \tag{27.110}$$

где $M(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$;

в) для любого положительного $\sigma < \rho_1$ в области

$$t \in R, \ h' \in U_\sigma, \ h'' \in U_\sigma, \ 0 < \varepsilon < \varepsilon_0,$$

имеет место неравенство

$$|Q(t, h', \varepsilon) - Q(t, h'', \varepsilon)| \leqslant \lambda(\varepsilon, \sigma)\{|h' - h''|\}, \tag{27.111}$$

в котором $\lambda(\varepsilon, \sigma) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, $\sigma \to 0$;

г) все вещественные части корней характеристического уравнения

$$\operatorname{Det}|pI_{n-1} - X_0'(\xi^0)| = 0 \tag{27.112}$$

отличны от нуля.

Введем сейчас некоторые определения, относящиеся к теории почти периодических функций.

Рассмотрим какую-либо функцию $f(t, x)$, заданную на RE, где E обозначает некоторое множество значений x.

Мы будем говорить, что $f(t, x)$ является почти периодической функцией t равномерно по отношению к x, если любому $\eta > 0$ можно сопоставить положительное $l(\eta)$ таким образом, что в любом интервале на R

длины $l(\eta)$ лежит, по крайней мере, одно τ (почти период для η), для которого везде на RE справедливо неравенство

$$|f(t+\tau, x) - f(t, x)| \leqslant \eta.$$

Для этих почти периодических функций существует счетное множество частот $\{\lambda_j\}$, не зависящих от x, такое, что для всякого λ, не принадлежащего к нему, выполняется соотношение

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x)\, e^{-i\lambda t}\, dt = 0.$$

Пусть $\{\omega_\alpha\}$ представляет счетное множество вещественных чисел, обладающее свойствами:

1) между ω_α не существует нетривиальных линейных соотношений

$$\sum n_\alpha \omega_\alpha = 0$$

с целочисленными коэффициентами;

2) всякое λ_j может быть представлено линейной комбинацией ω_α с целочисленными коэффициентами.

Такое множество $\{\omega_\alpha\}$ условимся называть частотным базисом данной почти периодической функции. В частности, для периодической функции частотный базис состоит из одного элемента; для квазипериодических функций частотный базис состоит из конечного числа элементов.

Как известно, частотный базис обладает следующим важным свойством: если τ_m есть такая последовательность, что для любого ω_α

$$e^{i\omega_\alpha \tau_m} \to 1 \qquad \text{при } m \to \infty, \tag{27.113}$$

то равномерно на RE имеем:

$$f(t+\tau_m, x) - f(t, x) \to 0 \qquad \text{при } m \to \infty. \tag{27.114}$$

Это свойство может также служить и определением рассматриваемых почти периодических функций.

Именно, если $\{\omega_\alpha\}$ представляет счетное множество линейно независимых вещественных чисел и если для каждой последовательности τ_m, для которой справедливо (27.113), будет справедливо также и (27.114) равномерно на RE, то тогда $f(t, x)$ будет почти периодической функцией равномерно по отношению к x, а $\{\omega_\alpha\}$ будет ее частотным базисом.

Условимся называть представление s-мерного интегрального многообразия S_t

$$x = f(t, C_1, C_2, \ldots, C_s)$$

периодическим с периодом T, если тождественно

$$f(t+T, C_1, C_2 \ldots, C_s) = f(t, C_1, C_2, \ldots, C_s)$$

для всех t, C_1, C_2, $\ldots$, C_s, принадлежащих области их изменения.

Заметим также, что для почти периодической функции $f(t, x)$ всегда существует предел

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(t, x)\, dt,$$

причем сходимость к пределу будет равномерной по отношению к t, x.

Таким образом, условие б), наложенное нами на правую часть уравнения (27.1) $X(t, x)$ (см. стр. 336) будет всегда выполняться, если функция $X(t, x)$ является почти периодической по t равномерно по отношению к $x \in D_\rho$.

§ 28. Некоторые свойства решений преобразованных уравнений в окрестности точек равновесия и замкнутых орбит

В настоящем параграфе рассмотрим некоторые свойства решений систем уравнений вида (27.105), к которым, как это показано в предыдущем параграфе, сводятся уравнения (27.1).

После того как нами будут подробно изучены уравнения (27.105), мы сможем перейти к формулировке и доказательству теорем применительно к уравнениям (27.1).

Итак, сформулируем и докажем вначале ряд лемм о свойствах решений системы уравнений (27.105), причем везде в дальнейшем будем полагать, что функции $P(t, g, h, \varepsilon)$, $Q(t, g, h, \varepsilon)$, $G(\varepsilon)$ удовлетворяют условиям, указанным в предыдущем параграфе (см. стр. 352), причем $P(t, g, h, \varepsilon)$, и $G(\varepsilon)$ всегда вещественны при любых комплексных h, лежащих в рассматриваемой области.

Лемма 1. Можно указать такое положительное $\bar{\varepsilon}$ $(\bar{\varepsilon} < \varepsilon_0)$, что для каждого положительного ε, меньшего $\bar{\varepsilon}$, система уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dg}{dt} &= G(\varepsilon) + P(t, g, h, \varepsilon), \\ \frac{dh}{dt} &= Hh + Q(t, g, h, \varepsilon) \end{aligned}\right\} \tag{28.1}$$

имеет интегральное многообразие, представимое соотношением вида

$$h = f(t, g, \varepsilon),$$

в котором $f(t, g, \varepsilon)$ как функция t, g определена на $R\Omega$ и удовлетворяет неравенствам:

$$|f(t, g, \varepsilon)| \leqslant D(\varepsilon) < \rho, \tag{28.2}$$

$$|f(t, g', \varepsilon) - f(t, g'', \varepsilon)| \leqslant \Delta(\varepsilon)\, |g' - g''|, \tag{28.3}$$

причем

$$D(\varepsilon) \to 0, \quad \Delta(\varepsilon) \to 0 \qquad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

Функция $f(t, g, \varepsilon)$ обладает по отношению к угловой переменной g периодом 2π.

Если функции $P(t, g, h, \varepsilon)$, $Q(t, g, h, \varepsilon)$ в области $t \in R$, $g \in \Omega$, $h \in U_\rho$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, имеют ограниченные и равномерно непрерывные частные производные по g, h до m-го порядка включительно, то $f(t, g, \varepsilon)$ также