Заметим также, что для почти периодической функции $f(t, x)$ всегда существует предел

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t}^{t+T} f(t, x)\, dt,$$

причем сходимость к пределу будет равномерной по отношению к t, x.

Таким образом, условие б), наложенное нами на правую часть уравнения (27.1) $X(t, x)$ (см. стр. 336) будет всегда выполняться, если функция $X(t, x)$ является почти периодической по t равномерно по отношению к $x \in D_\rho$.

§ 28. Некоторые свойства решений преобразованных уравнений в окрестности точек равновесия и замкнутых орбит

В настоящем параграфе рассмотрим некоторые свойства решений систем уравнений вида (27.105), к которым, как это показано в предыдущем параграфе, сводятся уравнения (27.1).

После того как нами будут подробно изучены уравнения (27.105), мы сможем перейти к формулировке и доказательству теорем применительно к уравнениям (27.1).

Итак, сформулируем и докажем вначале ряд лемм о свойствах решений системы уравнений (27.105), причем везде в дальнейшем будем полагать, что функции $P(t, g, h, \varepsilon)$, $Q(t, g, h, \varepsilon)$, $G(\varepsilon)$ удовлетворяют условиям, указанным в предыдущем параграфе (см. стр. 352), причем $P(t, g, h, \varepsilon)$, и $G(\varepsilon)$ всегда вещественны при любых комплексных h, лежащих в рассматриваемой области.

Лемма 1. Можно указать такое положительное $\bar{\varepsilon}$ $(\bar{\varepsilon} < \varepsilon_0)$, что для каждого положительного ε, меньшего $\bar{\varepsilon}$, система уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dg}{dt} &= G(\varepsilon) + P(t, g, h, \varepsilon), \\ \frac{dh}{dt} &= Hh + Q(t, g, h, \varepsilon) \end{aligned}\right\} \tag{28.1}$$

имеет интегральное многообразие, представимое соотношением вида

$$h = f(t, g, \varepsilon),$$

в котором $f(t, g, \varepsilon)$ как функция t, g определена на $R\Omega$ и удовлетворяет неравенствам:

$$|f(t, g, \varepsilon)| \leqslant D(\varepsilon) < \rho, \tag{28.2}$$

$$|f(t, g', \varepsilon) - f(t, g'', \varepsilon)| \leqslant \Delta(\varepsilon)\, |g' - g''|, \tag{28.3}$$

причем

$$D(\varepsilon) \to 0, \quad \Delta(\varepsilon) \to 0 \qquad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

Функция $f(t, g, \varepsilon)$ обладает по отношению к угловой переменной g периодом 2π.

Если функции $P(t, g, h, \varepsilon)$, $Q(t, g, h, \varepsilon)$ в области $t \in R$, $g \in \Omega$, $h \in U_\rho$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, имеют ограниченные и равномерно непрерывные частные производные по g, h до m-го порядка включительно, то $f(t, g, \varepsilon)$ также будет иметь ограниченные и равномерно непрерывные производные по g также до m-го порядка включительно.

Доказательство. Рассмотрим матрицу H и представим ее в виде

$$H = U \begin{vmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{vmatrix} U^{-1}, \tag{28.4}$$

где U — произвольная матрица, имеющая обратную U^{-1}; H_+, H_- — матрицы, для которых корнями характеристических уравнений являются корни уравнения, приведенного в условии д), соответственно с положительными вещественными частями для H_+ и отрицательными вещественными частями для H_-. Таким образом, если уравнение (27.108) имеет s корней с отрицательными вещественными частями и $n-s-1$ корней с положительными вещественными частями, то матрица H_- будет s-го порядка, а матрица H_+ — $(n-s-1)$-го порядка.

Определим теперь матрицу $J(t)$ при помощи следующих соотношений:

$$\left.\begin{aligned} J(t) &= -U \begin{vmatrix} e^{-H_+t} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} U^{-1} \text{ для } t > 0, \\ J(t) &= U \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{-H_-t} \end{vmatrix} U^{-1} \text{ для } t < 0. \end{aligned}\right\} \tag{28.5}$$

Определенная таким образом матрица $J(t)$ будет удовлетворять дифференциальному уравнению:

$$\frac{dJ}{dt} = -HJ = -JH \qquad \text{для } t \neq 0 \tag{28.6}$$

и условию разрыва при $t = 0$

$$J(-0) - J(+0) = E. \tag{28.7}$$

Так как общее решение уравнения (28.6) имеет вид

$$J(t) = \sum_{j=1}^{n-1} C_j J_j(t),$$

где $J_j(t) = e^{z_j}$ — для простого корня уравнения (27.108), $J_j(t) = F_j(t)\, e^{z_j t}$ — для кратного корня $z = z_j$, ($F_j(t)$ — некоторый полином, степень которого не превосходит порядка кратности z_j), то, следовательно, в общем случае имеем:

$$J(t) = \sum_{j=1}^{n-1} C_j F_j(t)\, e^{z_j t} = e^{-Ht}. \tag{28.8}$$

Отсюда видим, что элементами матриц e^{-H_+t}, e^{-H_-t} соответственно будут:

$$\sum_{j=1}^{n-1} C_j F_j(t)\, e^{(\mu_j + i\nu_j)t}, \qquad \text{где } \mu_j < 0, \tag{28.9}$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} C_j F_j(t)\, e^{(\mu_j + i\nu_j)t}, \qquad \text{где } \mu_j > 0. \tag{28.10}$$

Ввиду того, что экспонента растет быстрее, чем полином, можно всегда найти такие положительные постоянные α и K, для которых будет справедливо неравенство

$$|J(t)| \leqslant Ke^{-\alpha|t|} \tag{28.11}$$

на всей вещественной оси.

Заметив это, фиксируем положительные числа $D, \Delta\ (D < \rho)$ и рассмотрим класс $C(D, \Delta)$ функций $F(t, g)$ со значениями из E_{n-1}, где E_{n-1} — $(n-1)$-мерное эвклидово пространство, определенных на $R\Omega$, удовлетворяющих неравенствам:

$$|F(t, g)| \leqslant D, \quad |F(t, g') - F(t, g'')| \leqslant \Delta |g' - g''| \tag{28.12}$$

и обладающих периодом 2π по отношению к угловой переменной g.

Рассмотрим для некоторой функции $F(t, g)$ из класса $C(D, \Delta)$ уравнение вида

$$\frac{dg}{dt} = G(\varepsilon) + P(t, g, F(t, g), \varepsilon). \tag{28.13}$$

Так как функция $P(t, g, h, \varepsilon)$ обладает свойством г) (см. стр. 353) (где вместо σ, характеризующего область определения h, в данном случае будет стоять D, характеризующее область определения функций $F(t, g)$), то всюду на $R\Omega$ имеем:

$$|P(t, g', F(t, g'), \varepsilon) - P(t, g', 0, \varepsilon)| \leqslant \lambda(\varepsilon, D)\,|F(t, g')|,$$

$$|P(t, g', F(t, g'), \varepsilon) - P(t, g'', F(t, g''), \varepsilon)| \leqslant \lambda(\varepsilon, D)\{|g' - g''| + \\ + |F(t, g') - F(t, g'')|\}$$

или учитывая, что функция $P(t, g, h, \varepsilon)$ при $h = 0$ является величиной порядка ε и что функции $F(t, g)$ удовлетворяют условиям (28.12), окончательно получаем:

$$|P(t, g', F(t, g'), \varepsilon)| \leqslant M(\varepsilon) + \lambda(\varepsilon, D)\,D, \tag{28.14}$$

$$|P(t, g', F(t, g'), \varepsilon) - P(t, g'', F(t, g''), \varepsilon)| \leqslant \lambda(\varepsilon, D)(1 + \Delta)\,|g' - g''|. \tag{28.15}$$

Поэтому, задаваясь произвольными начальными условиями:

$$g = g^0 \qquad \text{при } t = t_0,$$

в силу теоремы Коши мы можем построить решение уравнения (28.13) для любого t, причем оно будет единственным.

Обозначим его символически в виде

$$g_t = T^F_{z,\, t_0}(g^0), \qquad \text{где } z = t - t_0. \tag{28.16}$$

Вообще говоря, g_t зависит от ε как от параметра; однако, так как в течение всего доказательства ε рассматривается как фиксированное, достаточно малое число, то, чтобы излишне не усложнять записи формул, зависимость от ε здесь не указывается. Аналогично будем поступать и в дальнейшем без специальных оговорок.

Заметим, что так как решению

$$g(t) = T^F_{z,\, t_0}(g^0)$$

соответствует начальное значение g^0, а решению

$$g(t)+2\pi=T^F_{z,t_0}(g^0+2\pi)$$

(которое в силу периодичности правой части уравнения (28.13) по отношению к угловой переменной g с периодом 2π также является решением уравнения (28.13)) соответствует начальное значение $g^0+2\pi$, то, сравнивая эти равенства, получаем:

$$T^F_{z,t_0}(g^0+2\pi)=T^F_{z,t_0}(g^0)+2\pi,$$

т. е. при замене в $T^F_{z,t_0}(g^0)$ g^0 на $g^0+2\pi$ выражение $T^F_{z,t_0}(g^0)$ получит приращение 2π.

Рассмотрим теперь некоторые функции F и $\bar{F}$ из класса $C(D,\Delta)$. Положим:

$$g_t=T^F_{z,t_0}(g^0),\qquad \bar{g}_t=T^{\bar{F}}_{z,t_0}(\bar{g}),\qquad z=t-t_0, \tag{28.17}$$

где

$$g^0=g_t(t_0),\qquad \bar{g}=\bar{g}_t(t_0).$$

Тогда на основании (28.13) будем иметь:

$$\left|\frac{d(\bar{g}_t-g_t)}{dt}\right|=|P(t,\bar{g}_t,\bar{F}(t,\bar{g}_t),\varepsilon)-P(t,g_t,F(t,g_t),\varepsilon)|=$$
$$=|P(t,\bar{g}_t,\bar{F}(t,\bar{g}_t),\varepsilon)-P(t,\bar{g}_t,F(t,\bar{g}_t),\varepsilon)+P(t,\bar{g}_t,F(t,\bar{g}_t),\varepsilon)-$$
$$-P(t,g_t,F(t,g_t),\varepsilon)|\leqslant\lambda(\varepsilon,D)\,\|\bar{F}(t,\bar{g}_t)-F(t,\bar{g}_t)\|+\lambda(\varepsilon,D)\{|\bar{g}_t-g_t|+$$
$$+|F(t,\bar{g}_t)-F(t,g_t)|\}$$

или, учитывая (28.12), окончательно получаем:

$$\left|\frac{d(\bar{g}_t-g_t)}{dt}\right|\leqslant\lambda(\varepsilon,D)\,\|\bar{F}(t,\bar{g}_t)-F(t,\bar{g}_t)\|\,\lambda(\varepsilon,D)(1+\Delta)\,|\bar{g}_t-g_t|, \tag{28.18}$$

где обозначено:

$$\|f\|=\sup_{t,\,g}|f(t,g)|.$$

Нетрудно показать, что имеет место следующее неравенство:

$$T^{\bar{F}}_{z,t_0}(\bar{g})-T^F_{z,t_0}(g^0)\,|=|\bar{g}_t-g_t|\leqslant|\bar{g}-g^0|\exp\{\lambda(\varepsilon,D)(1+\Delta)\,|z|\}+$$
$$+\frac{\|\bar{F}(t,\bar{g}_t)-F(t,\bar{g}_t)\|}{1+\Delta}\{\exp[\lambda(\varepsilon,D)(1+\Delta)\,|z|]-1\}, \tag{28.19}$$

где $\bar{g}$ и g^0 — начальные значения $\bar{g}_t$ и g_t.

Действительно, рассматривая наряду с неравенством (28.18) уравнение

$$\frac{du}{dt}=\lambda(\varepsilon,D)\,\|\bar{F}-F\|+\lambda(\varepsilon,D)(1+\Delta)\,u \tag{28.20}$$

с начальным условием

$$u|_{t=t_0}=u_0=|\bar{g}_t-g_t|_{t=t_0},$$

решением которого будет

$$u = u_0 \exp\{\lambda(\varepsilon, D)(1+\Delta)|z|\} + \frac{\|\overline{F}-F\|}{1+\Delta}\{\exp[\lambda(\varepsilon, D)(1+\Delta)]|z|-1\}, \tag{28.21}$$

убеждаемся в справедливости неравенства:

$$|\overline{g}_t - g_t| \leqslant u \leqslant |\overline{g} - g^0| \exp\{\lambda(\varepsilon, D)(1+\Delta)|z|\} + \\ + \frac{\|\overline{F}-F\|}{1+\Delta}\{\exp[\lambda(\varepsilon, D)(1+\Delta)]|z|-1\}.$$

После сделанных предварительных замечаний рассмотрим преобразование S, преобразующее функцию F из класса $C(D, \Delta)$ в функцию

$$S_{t,g}(F) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} J(z)\, Q\{t+z;\, T^F_{z,t}(g);\, F[t+z;\, T^F_{z,t}(g)];\, \varepsilon\}\, dz. \tag{28.22}$$

В силу вышеуказанного свойства периодичности «второго рода» функции $T^F_{z,t_0}(g)$ по отношению к g:

$$T^F_{z,t_0}(g+2\pi) = T^F_{z,t_0}(g) + 2\pi,$$

а также в силу периодичности функций $F(t, g)$ и $Q(t, g, h, \varepsilon)$ по отношению к угловой переменной g с периодом 2π, можем заключить, что $S_{t,g}(F)$ также обладает периодом 2π по отношению к угловой переменной g.

Составим теперь оценки для функций:

$$|S_{t,g}(F)|;\ |S_{t,\overline{g}}(\overline{F}) - S_{t,g^0}(F)|. \tag{28.23}$$

Используя условия (28.12), которым удовлетворяет функция $F(t, g)$, а также свойства в) и г) функции $Q(t, g, h, \varepsilon)$ (см. стр. 353), имеем:

$$|Q\{t+z;\, T^F_{z,t}(g);\, F[t+z;\, T^F_{z,t}(g)];\, \varepsilon\}| \leqslant |Q\{t+z;\, T^F_{z,t}(g);\, 0;\, \varepsilon\}| + \\ + |Q\{t+z;\, T^F_{z,t}(g);\, F[t+z;\, T^F_{z,t}(g)];\, \varepsilon\} - Q\{t+z;\, T^F_{z,t}(g);\, 0;\, \varepsilon\}| \leqslant \\ \leqslant |Q\{t+z;\, T^F_{z,t}(g);\, 0;\, \varepsilon\}| + \lambda(\varepsilon, D)\,|F[t+z;\, T^F_{z,t}(g)]| \leqslant M(\varepsilon) + \lambda(\varepsilon, D)\, D. \tag{28.24}$$

Мажорируя (28.22), с учетом (28.11) и (28.24), получаем:

$$|S_{t,g}(F)| \leqslant \{M(\varepsilon) + \lambda(\varepsilon, D)\, D\}\, K \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\alpha|z|\}\, dz = \\ = \frac{2K}{\alpha}\{M(\varepsilon) + \lambda(\varepsilon, D)\, D\}. \tag{28.25}$$

Согласно (28.22), учитывая при этом неравенство (28.11) и свойство г) (см. стр. 353), находим:

$$|S_{t,\bar{g}}(\bar{F})-S_{t,g^0}(F)|\leqslant$$
$$\leqslant K\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-\alpha|z|\}\,|Q\{t+z;\,T_{z,t}^{\bar{F}}(\bar{g});\bar{F}[t+z;\,T_{z,t}^{\bar{F}}(\bar{g})];\,\varepsilon\}-$$
$$-Q\{t+z;T_{z,t}^{F}(g^0);F[t+z;T_{z,t}^{F}(g^0)];\,\varepsilon\}\,|\,dz\leqslant$$
$$\leqslant K\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-\alpha|z|\}\,\lambda(\varepsilon,D)\,\{|T_{z,t}^{\bar{F}}(\bar{g})-T_{z,t}^{F}(g)|+|\bar{F}[t+z;\,T_{z,t}^{\bar{F}}(\bar{g})]-$$
$$-F[t+z;T_{z,t}^{F}(g^0)]\,|\}\,dz. \qquad (28.26)$$

Согласно (28.12) имеем:

$$|\bar{F}[t+z;T_{z,t}^{\bar{F}}(\bar{g})]-F[t+z;T_{z,t}^{F}(g^0)]\,|=|\,\bar{F}[t+z;\,T_{z,t}^{\bar{F}}(\bar{g})]-$$
$$-F[t+z;T_{z,t}^{\bar{F}}(\bar{g})]+F[t+z;\,T_{z,t}^{\bar{F}}(\bar{g})]-F[t+z;\,T_{z,t}^{F}(g^0)]\,|\leqslant$$
$$\leqslant|\,\bar{F}[t+z;\,T_{z,t}^{\bar{F}}(\bar{g})]-F[t+z;\,T_{z,t}^{\bar{F}}(\bar{g})]\,|+\Delta\,|T_{z,t}^{\bar{F}}(\bar{g})-T_{z,t}^{F}(g^0)|,$$

в результате чего неравенство (28.26) представим в виде:

$$|S_{t,\bar{g}}(\bar{F})-S_{t,g^0}(F)|\leqslant$$
$$\leqslant K\lambda(\varepsilon,D)\,\|\bar{F}[t+z;\,T_{z,t}^{\bar{F}}(\bar{g})]-F[t+z;T_{z,t}^{\bar{F}}(\bar{g})\,\|\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-\alpha|z|\}\,dz+K\lambda(\varepsilon,D)(1+\Delta)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-\alpha|z|\}\,|\,T_{z,t}^{\bar{F}}(\bar{g})-T_{z,t}^{F}(g^0)\,|\,dz,$$

или, принимая во внимание (28.19), вместо полученного неравенства можем написать следующее неравенство:

$$|S_{t,\bar{g}}(\bar{F})-S_{t,g^0}(F)|\leqslant K\lambda(\varepsilon,D)\,\|\bar{F}[t+z;\,T_{z,t}^{\bar{F}}(\bar{g})]-$$
$$-F[t+z;\,T_{z,t}^{\bar{F}}(\bar{g})]\,\|\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-\alpha|z|\}\,dz+K\lambda(\varepsilon,D)(1+\Delta)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-\alpha|z|+$$
$$+\lambda(\varepsilon,D)(1+\Delta)|z|\}\,|\bar{g}-g^0|\,dz+$$
$$+K\lambda(\varepsilon,D)(1+\Delta)\frac{\|\bar{F}[t+z;\,T_{z,t}^{\bar{F}}(\bar{g})]-F[t+z;\,T_{z,t}^{\bar{F}}(\bar{g})]\,\|}{1+\Delta}\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-\alpha|z|+\lambda(\varepsilon,D)(1+\Delta)|z|\}\,dz-$$
$$-K\lambda(\varepsilon,D)(1+\Delta)\,\frac{\|\bar{F}[t+z;\,T_{z,t}^{\bar{F}}(\bar{g})]-F[t+z;\,T_{z,t}^{\bar{F}}(\bar{g})]\,\|}{1+\Delta}\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-\alpha|z|\}\,dz=K\lambda(\varepsilon,D)\,\{|\bar{g}-g^0|(1+\Delta)+$$
$$+\|\bar{F}-F\|\}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-\alpha|z|+\lambda(\varepsilon,D)(1+\Delta)|z|\}\,dz. \qquad (28.27)$$

До сих пор величины D и Δ были произвольными; подберем теперь их как функции параметра ε: $D=D(\varepsilon)$, $\Delta=\Delta(\varepsilon)$, таким образом, чтобы

$$D(\varepsilon)\to 0, \quad \Delta(\varepsilon)\to 0 \qquad \text{при } \varepsilon\to 0$$

и чтобы для всех ε, меньших некоторого $\bar{\varepsilon}$, выполнялись неравенства:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{2K}{\alpha}\{M(\varepsilon)+\lambda(\varepsilon, D)D\}<D; \quad \frac{4K}{\alpha}\lambda(\varepsilon, D)(1+\Delta)<\Delta; \\ &(1+\Delta)\lambda(\varepsilon, D)<\frac{\alpha}{2}; \quad \frac{8\lambda(\varepsilon, D)}{\alpha}K<1. \end{aligned}\right\} \tag{28.28}$$

Такой подбор $D=D(\varepsilon)$, $\Delta=\Delta(\varepsilon)$ всегда возможен, поскольку $M(\varepsilon)\to 0$, $\lambda(\varepsilon, D)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$, $D\to 0$.

В силу того, что

$$(1+\Delta)\lambda(\varepsilon, D)<\frac{\alpha}{2},$$

очевидно, имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-\alpha|z|+\lambda(1+\Delta)|z|\}\,dz<\frac{4}{\alpha}. \tag{28.29}$$

Таким образом, учитывая (28.29), а также неравенства (28.28), вместо (28.25) и (28.27) окончательно получаем:

$$|S_{t,g}(F)|\leqslant D(\varepsilon), \tag{28.30}$$

$$|S_{t,\bar{g}}(\bar{F})-S_{t,g_0}(F)|\leqslant\Delta(\varepsilon)|\bar{g}-g^0|+\frac{1}{2}\|\bar{F}-F\|, \tag{28.31}$$

откуда, в частности, следует:

$$|S_{t,\bar{g}}(F)-S_{t,g^0}(F)|\leqslant\Delta(\varepsilon)|\bar{g}-g^0|. \tag{28.32}$$

В силу определения класса $C(D,\Delta)$ функции, принадлежащие этому классу, характеризуются тем, что для них выполняются условия (28.12).

Для функций $S_{t,g}(F)$ выполняются условия (28.30), (28.31), аналогичные условиям (28.12).

Это означает, что функция $S_{t,g}(F)$ принадлежит к тому же классу $C(D,\Delta)$, к которому принадлежит функция F, т. е. преобразование S при $\varepsilon<\bar{\varepsilon}$ (для $\varepsilon<\bar{\varepsilon}$ путем соответствующего выбора D и Δ мы получили неравенства (28.30) и (28.31)) переводит функции, принадлежащие классу $C(D,\Delta)$, в функции того же класса.

При $\bar{g}=g^0$ из (28.31) получаем неравенство:

$$|S\bar{F}-SF|\leqslant\frac{1}{2}\|\bar{F}-F\|, \qquad \text{где } \|f\|=\sup|f|, \tag{28.33}$$

на основании которого с помощью теоремы Каччиополи — Банаха легко доказать существование и единственность решения уравнения

$$F=SF \tag{28.34}$$

в классе функций $C(D,\Delta)$.

Теорема Каччиополи — Банаха*) формулируется следующим образом. Пусть имеется непустое множество $\{\varphi\}$ функций, определенных на одном и том же множестве $\mathfrak{M}$ и обладающих свойствами:

1. Каждая функция φ ограничена (быть может, своей константой):

$$|\varphi| \leqslant D_\varphi.$$

2. Предел равномерно сходящейся последовательности функций семейства также есть функция этого семейства.

3. На данном семействе определен оператор, который каждую функцию этого семейства переводит в функцию того же семейства.

4. Для любой пары функций φ_1 и φ_2 семейства имеет место неравенство

$$|A(\varphi_2) - A(\varphi_1)| \leqslant m \sup |\varphi_2 - \varphi_1|, \qquad \text{где } 0 \leqslant m \leqslant 1.$$

Тогда уравнение $\varphi = A(\varphi)$ имеет единственное решение.

Проверим выполнение условий теоремы для нашего класса функций F.

Функции F определены на классе $C(D, \Delta)$ и образуют, очевидно, непустое множество. Кроме того, имеет место неравенство

$$|F(t, g)| \leqslant D.$$

В качестве оператора A имеем некоторое преобразование S, которое, как показано выше, переводит функцию из класса $C(D, \Delta)$ в функцию того же класса.

Для любой пары функций F и $\bar{F}$ имеет место

$$|S\bar{F} - SF| \leqslant \frac{1}{2} \|\bar{F} - F\|, \quad \text{где} \quad \|\bar{F} - F\| = \sup |\bar{F} - F| \tag{28.35}$$

и, следовательно, $m = \frac{1}{2}$.

Покажем, что выполняется также и второе условие, т. е. что последовательность из функций F_n, принадлежащих классу $C(D, \Delta)$, равномерно сходится к функции F, также принадлежащей классу $C(D, \Delta)$.

Для этого возьмем функцию F_0 и построим функцию $F_1 = SF_0$, которую назовем первым приближением уравнения $F = SF$, при этом $F_1 \in C(D, \Delta)$. Затем можем построить второе приближение $F_2 = SF_1$, которое также будет принадлежать $C(D, \Delta)$. И, вообще, можем построить $(p+1)$-е приближение:

$$F_{p+1} = SF_p, \tag{28.36}$$

также принадлежащее классу $C(D, \Delta)$.

Таким образом, получим последовательность функций

$$F_0, F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots, \tag{28.37}$$

принадлежащих $C(D, \Delta)$.

Покажем, что эта последовательность равномерно сходится к функции F, также принадлежащей классу функций $C(D, \Delta)$.

*) S. Banach, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leurs application aux equation intégrales, Fund. Math., t. III, 1922.

Для этого рассмотрим ряд

$$F_0+(F_1-F_0)+(F_2-F_1)+\ldots+(F_{n+1}-F_n)+\ldots \tag{28.38}$$

Если $|F_0|\leqslant M_0$ и $|F_1|\leqslant M_1$ (в силу того, что функции ограничены), то

$$|F_1-F_0|\leqslant M_0+M_1=M.$$

В силу свойства (28.4) преобразования S имеем:

$$|F_{n+1}-F_n|=|S(F_n)-S(F_{n-1})|\leqslant m\sup|F_n-F_{n-1}| \tag{28.39}$$

$$\left(m=\frac{1}{2}\right).$$

Поэтому члены ряда (28.38) по абсолютной величине не превосходят соответствующих членов сходящегося ряда с постоянными положительными членами

$$M_0+M+Mm+Mm^2+\ldots \qquad \left(m=\frac{1}{2}\right),$$

и, следовательно, последовательность (28.37), члены которой являются частичными суммами ряда (28.38), равномерно сходится к некоторой функции F.

Функции F_n, принадлежащие классу $C(D,\Delta)$, являются периодическими по g с периодом 2π и удовлетворяют неравенствам (28.12).

Так как $F=\lim\limits_{n\to\infty}F_n$, а F_n удовлетворяют этим свойствам независимо от n, то этим же свойствам будет удовлетворять и F, что означает, что F также принадлежит классу функций $C(D,\Delta)$.

Итак, все условия теоремы выполнены, и следовательно, уравнение $F=SF$ имеет единственное решение.

Обозначим его через

$$F=f(t,g,\varepsilon). \tag{28.40}$$

По самому определению F оно принадлежит классу $C(D,\Delta)$ и удовлетворяет условиям (28.12).

Путем дифференцирования итерационных формул (28.36) нетрудно установить, что если $P(t,g,h,\varepsilon)$, $Q(t,g,h,\varepsilon)$ в области

$$t\in R,\quad g\in\Omega,\quad h\in U_\rho,\quad 0<\varepsilon<\varepsilon_0$$

имеют ограниченные и равномерно непрерывные частные производные по g, h до m-го порядка включительно, то производные от F_p по g до m-го порядка также будут равномерно сходиться.

Для этого рассмотрим последовательность, составленную из $F_p^{(r)}$:

$$F_0^{(r)},F_1^{(r)},\ldots,F_p^{(r)},\ldots \tag{28.41}$$

и ряд

$$F_0^{(r)}+|F_1^{(r)}-F_0^{(r)}|+|F_2^{(r)}-F_1^{(r)}|+\ldots+|F_{p+1}^{(r)}-F_p^{(r)}|+\ldots \tag{28.42}$$

В силу существования непрерывных производных от $Q(t,g,h,\varepsilon)$ по g, h, а также равномерной сходимости интегралов

$$\int_{-\infty}^{\infty} J(z)\, Q(t+z, g, h, \varepsilon)\, dz,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} J(z)\, Q^{(r)}(t+z, g, h, \varepsilon)\, dz,$$

что очевидно в силу (28.11), а также ограниченности функций $Q(t+z, g, h, \varepsilon)$ и их производных по g, h до m-го порядка, следует, что в выражении (28.22) можно дифференцировать под знаком интеграла по g:

$$F_{p+1}^{(r)} = SF_p^{(r)} = \int_{-\infty}^{\infty} J(z)\, Q^{(r)}\{t+z, T_{z,t_0}^{F_p}, F_p, \varepsilon\}\, dz \qquad (r = 1, 2, \ldots, m). \tag{28.43}$$

Если $|F_0^{(r)}| < N_0$ $(r = 1, 2, \ldots, m)$, то принимая во внимание ограниченность производных от $Q(t+z, g, h, \varepsilon)$ по g, h до m-го порядка, имеем $|F_1^{(r)}| \leqslant N_1$ и, следовательно,

$$|F_1^{(r)} - F_0^{(r)}| \leqslant N_0 + N_1 = N_2. \tag{28.44}$$

В силу (28.19) находим

$$\begin{gathered}
|F_2^{(r)} - F_1^{(r)}| = |SF_1^{(r)} - SF_0^{(r)}| = \\
= \left| \int_{-\infty}^{\infty} J(z)\, [Q^{(r)}\{t+z, T_{z,t}^{F_1}, F_1, \varepsilon\} - Q^{(r)}\{t+z, T_{z,t}^{F_0}, F_0, \varepsilon\}]\, dz \right| \leqslant \\
\leqslant \lambda_1(\varepsilon, D)\, |F_1 - F_0| = \lambda_1(\varepsilon, D)\, M = N, \\
|F_3^{(r)} - F_2^{(r)}| = |SF_2^{(r)} - SF_1^{(r)}| = \\
= \left| \int_{-\infty}^{\infty} J(z)\, [Q^{(r)}\{t+z, T_{z,t}^{F_2}, F_2, \varepsilon\} - Q^{(r)}\{t+z, T_{z,t}^{F_1}, F_1, \varepsilon\}]\, dz \right| \leqslant \\
\leqslant \lambda_1(\varepsilon, D)\, |F_2 - F_1| \leqslant \lambda_1(\varepsilon, D) \frac{1}{2} M = \frac{1}{2} N.
\end{gathered} \tag{28.45}$$

Аналогичным образом получаем оценки для

$$|F_4^{(r)} - F_3^{(r)}|, \ldots, |F_{p+1}^{(r)} - F_p^{(r)}|, \ldots$$

и убеждаемся, что члены ряда (28.42) не превосходят по абсолютной величине соответствующих членов сходящегося ряда с положительными членами

$$N_0 + N_2 + N + \frac{1}{2} N + \frac{1}{4} N + \ldots$$

и поэтому последовательность, составленная из ограниченных и равномерно непрерывных функций $F_n^{(r)}$, равномерно сходится

$$F_n^{(r)} \rightrightarrows \Phi. \tag{28.46}$$

С другой стороны, так как последовательность $\{F_n\}$ равномерно сходится к функции f_1:

$$F_n \Rightarrow f_1$$

(что было показано), то эту последовательность можно почленно дифференцировать и, следовательно, согласно (28.46)

$$\Phi = f_1^{( )},$$

т. е. $f_1(t, g, \varepsilon)$ имеет ограниченные и равномерно-непрерывные производные по g до m-го порядка включительно.

Таким образом, мы установили, что функция $f(t, g, \varepsilon)$ удовлетворяет условиям леммы I, и поэтому для завершения доказательства леммы остается показать, что соотношения

$$h = f(t, g, \varepsilon) \tag{28.47}$$

определяют интегральное многообразие для рассматриваемой системы дифференциальных уравнений (28.1).

Для этого раскроем уравнение $F = SF$.

Учитывая (28.22) и (28.47), получаем:

$$f(t, g, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} J(z) Q\{t+z;\ T^f_{z,t}(g);\ f[t+z;\ T^f_{z,t}(g)];\ \varepsilon\}\, dz. \tag{28.48}$$

Заменим здесь g на $T^f_{t-t_0,\,t_0}(g)$ и заметим, что согласно нашим обозначениям

$$T^f_{t-t_0,\,t_0}(g^0) = g_t, \quad T^f_{0,\,t_0}(g^0) = g^0$$

имеем тождественно:

$$T^f_{z,\,t}\, T^f_{t-t_0,\,t_0} = T^f_{z+t-t_0,\,t_0}.$$

Тогда, вводя вместо z в качестве новой переменной интегрирования $\tau = z + t$ и полагая для упрощения

$$f\{t;\ T^f_{t-t_0,\,t_0}(g), \varepsilon\} = h_t;\ T^f_{t-t_0,\,t_0}(g) = g_t,$$

из (28.48) получаем:

$$h_t = \int_{-\infty}^{\infty} J(\tau - t) Q(\tau, g_\tau, h_\tau, \varepsilon)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} J(\tau - t) Q(\tau, g_\tau, h_\tau, \varepsilon)\, d\tau + \\ + \int_{t}^{\infty} J(\tau - t) Q(\tau, g_\tau, h_\tau, \varepsilon)\, d\tau. \tag{28.49}$$

Дифференцируя это равенство по t как по параметру, получим:

$$\frac{dh_t}{dt} = -\int_{-\infty}^{t} \frac{dJ(\tau - t)}{dt} Q(\tau, g_\tau, h_\tau, \varepsilon) d\tau + J(-0) Q(t, g_t, h_t, \varepsilon) - \\ - \int_{t}^{\infty} \frac{dJ(\tau - t)}{dt} Q(\tau, g_\tau, h_\tau, \varepsilon)\, d\tau - J(+0) Q(t, g_t, h_t, \varepsilon).$$

Учитывая (28.6) и условие разрыва (28.7), окончательно находим:

$$\frac{dh_t}{dt} = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dJ(\tau - t)}{dt} Q(\tau, g_\tau, h_\tau, \varepsilon)\, d\tau + Q(t, g_t, h_t, \varepsilon),$$

или согласно (28.49):

$$\frac{dh_t}{dt} = Hh_t + Q(t, g_t, h_t, \varepsilon).$$

С другой стороны, по определению оператора $T^f_{t-t_0, t_0}$ имеем:

$$\frac{dg_t}{dt} = G(\varepsilon) + P(t, g_t, h_t, \varepsilon).$$

Таким образом,

$$g_t = T^f_{t-t_0, t_0}(g); \quad h_t = f(t, g_t, \varepsilon) \tag{28.50}$$

представляет решение рассматриваемой системы дифференциальных уравнений (28.1), сводящееся при $t = t_0$ к g; $f(t_0, g, \varepsilon)$.

Итак, найденное многообразие (28.47) является интегральным многообразием для системы (28.1), удовлетворяет неравенствам (28.2) и (28.3) (в силу выбора класса функций $C(D, \Delta)$, для которого выполняется условие (28.2)), обладает по отношению к угловой переменной g периодом 2π и, кроме того, если $P(t, g, h, \varepsilon)$, $Q(t, g, h, \varepsilon)$ при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ имеют в области $R\Omega U_\rho$ ограниченные и равномерно непрерывные частные производные по g, h до m-го порядка включительно, то $h = f(t, g, \varepsilon)$ также будет иметь ограниченные и равномерно непрерывные частные производные по g до m-го порядка включительно.

Таким образом, лемма I полностью доказана.

Укажем теперь следствие из доказанной леммы.

Следствие. Из уравнений

$$\frac{dg}{dt} = G(\varepsilon) + P(t, g, h, \varepsilon),$$
$$\frac{dh}{dt} = Hh + Q(t, g, h, \varepsilon)$$

видим, что угловая переменная g для решений, лежащих на многообразии

$$h = f(t, g, \varepsilon),$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{dg}{dt} = G(\varepsilon) + F(t, g, \varepsilon), \tag{28.51}$$

в котором

$$F(t, g, \varepsilon) = P(t, g, f(t, g, \varepsilon), \varepsilon).$$

При этом на основании леммы I $F(t, g, \varepsilon)$ определена для всех вещественных t, g является периодической функцией g с периодом 2π и удовлетворяет следующим соотношениям:

$$|F(t, g, \varepsilon)| \leqslant M(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0, \tag{28.52}$$

$$|F(t, g', \varepsilon) - F(t, g'', \varepsilon)| \leqslant N(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{28.53}$$

Кроме того, если $P(t, g, h, \varepsilon)$ обладает непрерывными производными по g, h до m-го порядка включительно, то $F(t, g, \varepsilon)$ также будет обладать непрерывными производными по g до m-го порядка включительно.

Лемма II. Если существует последовательность вещественных чисел $\{\tau_m\}$ такая, что для некоторого $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$ правые части уравнений (27.105) удовлетворяют равномерно на $R\Omega U_\rho$ соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} &|P(t+\tau_m, g, h, \varepsilon) - P(t, g, h, \varepsilon)| \to 0, \\ &|Q(t+\tau_m, g, h, \varepsilon) - Q(t, g, h, \varepsilon)| \to 0, \end{aligned} m \to \infty, \right\} \tag{28.54}$$

то тогда для этого ε равномерно на $R\Omega$ будем иметь:

$$|f(t+\tau_m, g, \varepsilon) - f(t, g, \varepsilon)| \to 0, \quad m \to \infty, \tag{28.55}$$

где $f(t, g, \varepsilon)$ — интегральное многообразие, для системы дифференциальных уравнений (27.105).

Доказательство. Возьмем некоторую функцию $F(t, g)$ из класса $C(D, \Delta)$, где, как и в лемме I, D и Δ выбраны как функции ε:

$$D = D(\varepsilon), \quad \Delta = \Delta(\varepsilon).$$

Заметим, что при доказательстве леммы I решение уравнения

$$\frac{dg}{dt} = G(\varepsilon) + P(t, g, F(t, g), \varepsilon) \tag{28.56}$$

мы обозначим следующим образом:

$$g_t = T^F_{z, t_0}(g^0), \tag{28.57}$$

где $z = t - t_0$. Следовательно, здесь переменная t, а также индекс при g равнялись сумме нижних индексов при T:

$$t = z + t_0,$$

и следовательно, подставляя (28.57) в (28.56), можем записать:

$$\frac{dg_t}{dt} = G(\varepsilon) + P(z+t_0, g_t, F[z+t_0, g_t], \varepsilon). \tag{28.58}$$

Рассмотрим теперь следующие выражения:

$$y_z = T^F_{z, t}(g); \quad y_z^\tau = T^F_{z, t+\tau}(g); \tag{28.59}$$

в силу (28.56), (28.57) и (28.58) видим, что эти выражения будут удовлетворять следующим двум уравнениям:

$$\frac{dy_z}{dz} = G(\varepsilon) + P\{z+t; y_z; F[z+t; y_z]; \varepsilon\}, \tag{28.60}$$

$$\frac{dy_z^\tau}{dz} = G(\varepsilon) + P\{z+t+\tau; y_z^\tau; F[z+t+\tau; y_z^\tau]; \varepsilon\}, \tag{28.61}$$

где $z+t$, $z+t+\tau$ также представляют собой сумму нижних индексов соответственно у функций $y_z = T^F_{z, t}(g)$ и $y_z^\tau = T^F_{z, t+\tau}(g)$, причем здесь дифференцирование по t заменено дифференцированием по z.

Условимся обозначать:

$$\| P_\tau - P \| = \sup_{t,\, g,\, h} | P(t+\tau, g, h, \varepsilon) - P(t, g, h, \varepsilon) |; \tag{28.62}$$

$$\| F_\tau - F \| = \sup_{t,\, g} | F(t+\tau, g) - F(t, g) | \tag{28.63}$$

для $t \in R$; $g \in \Omega$; $h \in U_\rho$.

Вычитая (28.60) из (28.61), получим:

$$\frac{d(y_z^\tau - y_z)}{dz} = P\{z+t+\tau;\ y_z^\tau;\ F[z+t+\tau;\ y_z^\tau];\ \varepsilon\} - P\{z+t;\ y_z;\ F[z+t;\ y_z];\ \varepsilon\}. \tag{28.64}$$

Применяя обычный мажорационный прием, оценим, учитывая неравенства (28.14), (28.15), правую часть полученного уравнения.

Имеем:

$$\begin{aligned} &| P\{z+t+\tau;\ y_z^\tau;\ F[z+t+\tau;\ y_z^\tau];\ \varepsilon\} - P\{z+t;\ y_z;\ F[z+t;\ y_z];\ \varepsilon\}| = \\ &= | P\{z+t+\tau;\ y_z^\tau;\ F[z+t+\tau;\ y_z^\tau];\ \varepsilon\} - P\{z+t+\tau;\ y_z;\ F[z+t+\tau;\ y_z];\ \varepsilon\} + \\ &\quad + P\{z+t+\tau;\ y_z;\ F[z+t+\tau;\ y_z];\ \varepsilon\} - P\{z+t+\tau;\ y_z;\ F[z+t;\ y_z];\ \varepsilon\} + \\ &\quad\quad + P\{z+t+\tau;\ y_z;\ F[z+t;\ y_z];\ \varepsilon\} - P\{z+t;\ y_z;\ F[z+t;\ y_z];\ \varepsilon\} | \leqslant \\ &\quad\quad\quad \leqslant \lambda(\varepsilon, D)\{| y_z^\tau - y_z | + | F(z+t+\tau;\ y_z^\tau) - F(z+t+\tau;\ y_z) |\} + \\ &\quad\quad\quad\quad - \lambda(\varepsilon, D) \| F[z+t+\tau, y_z] - F[z+t;\ y_z] \| + \| P_\tau - P \|, \end{aligned} \tag{28.65}$$

или, принимая во внимание, что согласно (28.12) имеет место неравенство

$$| F(z+t+\tau, y_z^\tau) - F(z+t+\tau, y_z) | \leqslant \Delta | y_z^\tau - y_z |, \tag{28.66}$$

находим:

$$\left| \frac{d(y_z^\tau - y_z)}{dz} \right| \leqslant \lambda(\varepsilon, D)(1+\Delta) | y_z^\tau - y_z | + \lambda(\varepsilon, D) \| F_\tau - F \| + \| P_\tau - P \|. \tag{28.67}$$

Решая полученное дифференциальное неравенство, окончательно получим:

$$| y_z^\tau - y_z | \leqslant \frac{\| P_\tau - P \| + \lambda(\varepsilon, D) \| F_\tau - F \|}{\lambda(\varepsilon, D)(1+\Delta)} \{\exp[\lambda(\varepsilon, D)(1+\Delta) | z |] - 1\}. \tag{28.68}$$

С другой стороны, по определению преобразования $S_{t,\,g}(F)$, (28.22) имеем:

$$\begin{aligned} S_{t+\tau,\,g}(F) - S_{t,\,g}(F) = \int_{-\infty}^{\infty} J(z)\{Q[t+z+\tau;\ y_z^\tau;\ F[t+z+\tau;\ y_z^\tau];\ \varepsilon] - \\ - Q[t+z;\ y_z;\ F[t+z;\ y_z];\ \varepsilon\}\, dz. \end{aligned} \tag{28.69}$$

Мажорируя правую часть (28.69), учитывая при этом, что

$$| J(z) | \leqslant K e^{-\alpha | z |},$$

находим:

$$\begin{aligned} | S_{t+\tau,\,g}(F) - S_{t,\,g}(F) | \leqslant K \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha |z|} \{\lambda(\varepsilon, D)(1+\Delta) | y_z^\tau - y_z | + \\ + \| Q_\tau - Q \| + \lambda(\varepsilon, D) \| F_\tau - F \|\}\, d\tau. \end{aligned} \tag{28.70}$$

Выберем теперь D и Δ такими же, как в лемме I, т. е. положим, что для $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$ выполняются следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{2K}{\alpha}\{M(\varepsilon)+\lambda(\varepsilon, D)D\} < D; \quad \frac{4K}{\alpha}\lambda(\varepsilon, D)(1+\Delta) < \Delta; \\ &(1+\Delta)\lambda(\varepsilon, D) < \frac{\alpha}{2}; \quad \frac{8\lambda(\varepsilon, D)}{\alpha}K < 1, \end{aligned}\right\} \tag{28.71}$$

где $D(\varepsilon)\to 0$, $\Delta(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$.

Принимая во внимание (28.68), из (28.70) получаем:

$$\begin{aligned} &|S_{t+\tau, g}(F) - S_{t, g}(F)| \leqslant \\ &\leqslant K\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|z|}\left\{\lambda(1+\Delta)\left[\frac{\|P_\tau - P\| + \lambda\|F_\tau - F\|}{\lambda(1+\Delta)}\left(e^{\lambda(1+\Delta)|z|}-1\right)\right] + \|Q_\tau - Q\| + \right. \\ &\qquad \left. + \lambda\|F_\tau - F\|\right\}dz = K\int_{-\infty}^{\infty}\{e^{-\alpha|z|+\lambda(1+\Delta)|z|}(\|P_\tau - P\| + \lambda\|F_\tau - F\|) - \\ &\qquad - e^{-\alpha|z|}(\|P_\tau - P\| + \lambda\|F_\tau - F\|) + e^{-\alpha|z|}(\|Q_\tau - Q\| + \lambda\|F_\tau - F\|)\}dz = \\ &= K\int_{-\infty}^{\infty}\{e^{-\alpha|z|+\lambda(1+\Delta)|z|}(\|P_\tau - P\| + \lambda\|F_\tau - F\|) + e^{-\alpha|z|}(\|Q_\tau - Q\| + \|P_\tau - P\|)\}dz. \end{aligned} \tag{28.72}$$

Так как $\lambda(1+\Delta) < \frac{\alpha}{2}$, то

$$K\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-\alpha|z| + \lambda(1+\Delta)|z|\}dz < \frac{4K}{\alpha}, \tag{28.73}$$

и из (28.72) имеем:

$$\begin{aligned} |S_{t+\tau, g}(F) - S_{t, g}(F)| \leqslant \frac{4K}{\alpha}(\|P_\tau - P\| + \lambda\|F_\tau - F\|) + \\ + \frac{2K}{\alpha}(\|Q_\tau - Q\| + \|P_\tau - P\|), \end{aligned}$$

или, принимая во внимание, что $\frac{8K\lambda(\varepsilon, D)}{\alpha} < 1$, окончательно получаем:

$$|S_{t+\tau, g}(F) - S_{t, g}(F)| \leqslant \frac{1}{2}\|F_\tau - F\| + \frac{2K}{\alpha}\{\|Q_\tau - Q\| + \|P_\tau - P\|\},$$

или сокращенно

$$|(SF)_\tau - SF| \leqslant \frac{1}{2}\|F_\tau - F\| + \frac{2K}{\alpha}\{\|Q_\tau - Q\| + \|P_\tau - P\|\}. \tag{28.74}$$

Заметим теперь, что в лемме II функции $F(t, g)$ удовлетворяют всем условиям, необходимым для выполнения принципа Каччиополи — Банаха. Поэтому уравнение

$$F = SF \tag{28.75}$$

имеет единственное решение, которое мы обозначим, так же как и в лемме I, через

$$F = f(t, g, \varepsilon). \tag{28.76}$$

Очевидно, что в данном случае последовательность $\{F_n\}$ будет равномерно сходиться к функции $f(t, g, \varepsilon)$:

$$\|F_N - f\| \to 0 \quad \text{при } N \to \infty. \tag{28.77}$$

Обозначим теперь ради сокращения:

$$\sigma_\tau = \frac{2K}{\alpha}\{\|Q_\tau - Q\| + \|P_\tau - P\|\}. \tag{28.78}$$

Тогда из (28.73), полагая поочередно: $F = F_1$, $F = F_2$, ..., получим:

$$\|(F_1)_\tau - F_1\| \leqslant \sigma_\tau; \quad \|(F_2)_\tau - F_2\| \leqslant \frac{1}{2}\|(F_1)_\tau - F_1\| + \sigma_\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\sigma_\tau + \sigma_\tau = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\sigma_\tau;$$

$$\|(F_3)_\tau - F_3\| \leqslant \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)\sigma_\tau; \ \ldots$$

Вообще

$$\|(F_N)_\tau - F_N\| \leqslant 2\sigma_\tau. \tag{28.79}$$

Так как согласно (28.77)

$$\lim_{N\to\infty} F_N = f,$$

то очевидно, что

$$\lim_{N\to\infty} (F_N)_\tau = f_\tau.$$

Поэтому, переходя в (28.79) к пределу, получаем:

$$\|(f)_\tau - f\| \leqslant 2\sigma_\tau,$$

или, раскрывая это соотношение, принимая во внимание (28.78), видим, что везде на $R\Omega$ для любого τ имеет место неравенство

$$|f(t+\tau, g, \varepsilon) - f(t, g, \varepsilon)| \leqslant \frac{4K}{\alpha}\{\|Q_\tau - Q\| + \|P_\tau - P\|\}. \tag{28.80}$$

Пусть теперь $\{\tau_m\}$ будет последовательностью из R такой, что для некоторого $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$ равномерно на $R\Omega$ выполняются соотношения:

$$|Q(t+\tau_m, g, h, \varepsilon) - Q(t, g, h, \varepsilon)| \to 0,$$
$$|P(t+\tau_m, g, h, \varepsilon) - P(t, g, h, \varepsilon)| \to 0$$

при $m \to \infty$.

Тогда для этого ε

$$\|Q_{\tau_m} - Q\| \to 0, \quad \|P_{\tau_m} - P\| \to 0$$

при $m \to \infty$, и, следовательно, согласно (28.80) равномерно на $R\Omega$ выполняется соотношение

$$|f(t+\tau_m, g, \varepsilon) - f(t, g, \varepsilon)| \to 0 \text{ при } m \to \infty,$$

доказывающее лемму II.

Из доказанной леммы вытекает следующее следствие.

Следствие. Если функции $P(t, g, h, \varepsilon)$, $Q(t, g, h, \varepsilon)$ являются почти периодическими функциями t равномерно по отношению к g, h в области ΩU_ρ, то тогда и $F(t, g, \varepsilon)$ оказывается почти периодической функцией равномерно по отношению к $g \in \Omega$ с частотным базисом функций $P(t, g, h, \varepsilon)$, $Q(t, g, h, \varepsilon)$. Справедливость этого следствия очевидна после сопоставления формулировки леммы II, следствия к лемме I и определения почти периодических функций (см. стр. 353).

Заметим, что из следствия к лемме II, а также из самой леммы вытекает следующий результат:

Если $f(t, x)$ есть функция почти периодическая равномерно по отношению к x, а множество $\{\omega_\alpha\}$ является ее частотным базисом, то тогда $F(t, x)$ также будет функцией почти периодической равномерно по отношению к x с тем же частотным базисом.

Лемма III. Можно указать такие положительные постоянные ε', γ, C, σ_0, σ_1 (причем $\sigma_0 < \sigma_1 < \rho$, $\varepsilon' < \bar{\varepsilon}$), что если s характеристических чисел матрицы H имеют отрицательные вещественные части, а остальные $n-1-s$ — положительные, то для каждого $\varepsilon < \varepsilon'$, любого вещественного t_0 и любого g_0 из Ω в некоторой окрестности U_{σ_0} существует s-мерное многообразие $\mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon)$ точек $\{h\}$ со свойствами:

1) Если *) для $t = t_0$

$$h_t \in U_{\sigma_0}, \text{ но } h_t \bar{\in} \mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon),$$

то тогда для некоторого $\bar{t} > t_0$

$$h_{\bar{t}} \bar{\in} U_{\sigma_1}.$$

2) Если для $t = t_0$

$$h_t \in \mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon),$$

то тогда для всех $t \geqslant t_0$

$$|h_t - f(t, g_t, \varepsilon)| \leqslant Ce^{-\gamma|t-t_0|}\,|h_0 - f(t_0, g_0, \varepsilon)|,$$

где (g_0, h_0) представляют (g_t, h_t) при $t = t_0$, γ — положительная постоянная.

3) Если все характеристические числа матрицы имеют положительные вещественные части ($s = 0$), то многообразие $\mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon)$ вырождается в точку $h = f(t_0, g_0, \varepsilon)$.

4) Если, наоборот, вещественные части всех характеристических чисел матрицы H отрицательны, то многообразие $\mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon)$ совпадает со всей окрестностью U_{σ_0}.

Таким образом, лемма утверждает, что если начальные значения какого-либо решения системы (27.105) не принадлежат к точечному s-мерному многообразию $\mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon)$, лежащему в $(n-1)$-мерной окрестности U_{σ_0}, то с течением времени это решение будет удаляться от $\mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon)$ и, в частности, выйдет из некоторой области U_{σ_1}, где $\sigma_1 > \sigma_0$. И наоборот, те интегральные кривые, начальные значения которых принадлежат $\mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon)$, с течением времени будут стремиться к s-мерному многообразию интегральных кривых, параметрическое представление которых мы обозначили через $f(t, g_t, \varepsilon)$.

---

*) Здесь, как обычно, $g = g_t$, $h = h_t$ обозначает решение рассматриваемой системы дифференциальных уравнений (27.105).

Доказательство. Вместо дифференциальной системы (27.105) будем рассматривать интегро-дифференциальную систему:

$$\left.\begin{aligned} h_t &= \int_{t_0}^{\infty} J(\tau - t)\, Q(\tau, g_\tau, h_\tau, \varepsilon)\, d\tau + J(t_0 - t)\, A; \\ \frac{dg_t}{dt} &= G(\varepsilon) + P(t, g_t, h_t, \varepsilon) \end{aligned}\right\} \tag{28.81}$$

$$(\text{при } t = t_0,\ g_t = g_0),$$

где A — некоторый произвольный фиксированный вектор из E_{n-1}.

Применяя для исследования этой системы способы получения оценок, применявшиеся в лемме I, для значений ε', σ_0, σ_1, подчиненных условиям

$$\varepsilon' < \bar{\varepsilon},\ D(\varepsilon') < \sigma_0,\ \sigma_0 < \sigma_1 < \rho \tag{28.82}$$

(где $\bar{\varepsilon}$, ρ определены в лемме I), нетрудно установить следующий результат.

Для любого значения параметра ε и любого вектора A из E_{n-1}, удовлетворяющих неравенствам

$$0 < \varepsilon < \varepsilon',\ |A| < \sigma_0:$$

а) система (28.81) имеет одно-единственное решение (g_t, h_t), для которого $h_t \in U_{\sigma_1}$ для всех $t \geqslant t_0$;

б) для этого решения

$$h_t = \Psi(t_0, t, g_t, A, \varepsilon), \tag{28.83}$$

где $\Psi(t_0, t, g_t, A, \varepsilon)$ — непрерывная функция своих аргументов, удовлетворяющая условию Липшица вида

$$\begin{aligned} |\Psi(t_0, t, g', A', \varepsilon) - \Psi(t_0, t, g'', A'', \varepsilon)| &\leqslant \nu(\varepsilon, \sigma_0)\, |g' - g''| + \\ &+ \mu(\varepsilon, \sigma_0)\, e^{-\frac{\alpha}{2}|t - t_0|}\, |A' - A''|,\quad t \geqslant t_0, \end{aligned} \tag{28.84}$$

где $\nu(\varepsilon, \sigma_0)$ и $\mu(\varepsilon, \sigma_0)$ стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$, $\sigma_0 \to 0$, а $\frac{\alpha}{2}$ — некоторая положительная постоянная.

Дифференцируя выражение

$$h_t = \int_{t_0}^{\infty} J(\tau - t)\, Q(\tau, g_\tau, h_\tau, \varepsilon)\, d\tau + J(t - t_0)\, A, \qquad t < t_0,$$

по t как по параметру, на основании уравнения

$$\frac{dJ}{dt} = -HJ = -JH \quad \text{при } t \neq 0$$

и условия разрыва

$$J(-0) - J(+0) = E$$

видим, что решения интегро-дифференциальной системы являются решениями системы дифференциальных уравнений (27.105):

$$\frac{dg}{dt} = G(\varepsilon) + P(t, g, h, \varepsilon),$$
$$\frac{dh}{dt} = Hh + Q(t, g, h, \varepsilon).$$

Назовем решением типа S любое решение уравнений (27.105), для которого $h_0 \in U_{\sigma_0}$, $h_t \in U_{\sigma_1}$ для всех $t > t_0$.

Покажем, что всякое решение типа S является решением интегро-дифференциальной системы (28.81) при $A = h_0$.

Для решения (g_t, h_t) системы (27.105), очевидно, имеет место

$$\frac{dh_t}{dt} = Hh_t + Q(t, g_t, h_t, \varepsilon). \tag{28.85}$$

Умножим обе части этого тождества на $J(\tau - t)$ (τ — новая переменная интегрирования) и, проинтегрировав полученное соотношение в пределах от t до ∞ и от t_0 до t, получим:

$$\int_t^\infty J(\tau - t)\frac{dh_\tau}{d\tau}d\tau = \int_t^\infty J(\tau - t)Hh_\tau d\tau + \int_t^\infty J(\tau - t)Q(\tau, g_\tau, h_\tau, \varepsilon)\,d\tau, \tag{28.86}$$

$$\int_{t_0}^t J(\tau - t)\frac{dh_\tau}{d\tau}d\tau = \int_{t_0}^t J(\tau - t)Hh_\tau d\tau + \int_{t_0}^t J(\tau - t)Q(\tau, g_\tau, h_\tau, \varepsilon)\,d\tau. \tag{28.87}$$

Интегрируя по частям левые части выражений (28.86) и (28.87), находим:

$$\int_t^\infty J(\tau - t)\frac{dh_\tau}{d\tau}d\tau = -J(+0)h_t - \int_t^\infty \frac{dJ(\tau - t)}{d\tau}h_\tau d\tau,$$
$$\int_{t_0}^t J(\tau - t)\frac{dh_\tau}{d\tau}d\tau = J(-0)h_t - J(t_0 - t)h_0 + \int_{t_0}^t \frac{dJ(\tau - t)}{d\tau}h_\tau d\tau.$$

Принимая во внимание уравнение

$$\frac{dJ}{dt} = -JH = -HJ, \quad t \neq t_0,$$

последние соотношения можем записать в виде:

$$\left.\begin{aligned} &\int_t^\infty J(\tau - t)\frac{dh_\tau}{d\tau}d\tau = -J(+0)h_t + \int_t^\infty J(\tau - t)Hh_\tau d\tau,\\ &\int_{t_0}^t J(\tau - t)\frac{dh_\tau}{d\tau}d\tau = J(-0)h_t - J(t_0 - t)h_0 + \int_{t_0}^t J(\tau - t)\,Hh_\tau d\tau. \end{aligned}\right\} \tag{28.88}$$

Складывая теперь тождества (28.86) и (28.87) с учетом (28.88) и условия разрыва для матрицы $J(t)$ при $t = 0$:

$$J(-0)h_t - J(+0)h_t = h_t,$$

убеждаемся, что

$$h_t = \int_{t_0}^{\infty} J(\tau - t) Q(\tau, g_\tau, h_\tau, \varepsilon) d\tau + J(t_0 - t) h_0 \tag{28.89}$$

тождественно, откуда следует, что наше решение (g_t, h_t) удовлетворяет интегро-дифференциальной системе (28.81) при $A = h_0$.

Но решение интегро-дифференциальной системы существует лишь для $|A| < \sigma_0$; поэтому h_0, стоящее в выражении (28.89), принадлежит U_{σ_0}.

С другой стороны, решение h_t дифференциальной системы, принадлежащее области U_{σ_1}, начальное значение которого h_0 принадлежит U_{σ_0}, мы назвали решением типа S.

Следовательно, решение типа S является решением интегро-дифференциальной системы при $A = h_0$.

Учитывая, что интегро-дифференциальная система (28.81) имеет решение при $|A| < \sigma_0$, допускающее параметрическое представление:

$$h_t = \Psi(t_0, t, g_t, A, \varepsilon),$$

и то, что решения типа S, т. е. решения дифференциальной системы, для которых $|h_0| < \sigma_0$, являются решениями интегро-дифференциальной системы при $A = h_0$, для решений дифференциальной системы можем написать:

$$h_t = \Psi(t_0, t, g_t, A, \varepsilon), \quad |A| < \sigma_0. \tag{28.90}$$

Решения интегро-дифференциальной системы существуют при условиях:

$$\varepsilon' < \bar{\varepsilon}, \ D(\varepsilon') < \sigma_0, \ \sigma_0 < \rho, \ |A| < \sigma_0. \tag{28.91}$$

Следовательно, решения типа S существуют при тех же условиях.

Но условия (28.91) эквивалентны условиям, при которых существует s-мерное многообразие интегральных кривых для дифференциальных уравнений (27.105), параметрическое представление которого мы обозначили через $h = f(t, g, \varepsilon)$.

Таким образом, условия, при которых существует интегральное многообразие для дифференциальной системы, и условия, при которых существуют решения типа S, эквивалентны.

Так как решения типа S являются решениями той же дифференциальной системы, что и $h = f(t, g, \varepsilon)$, и существуют при тех же условиях, то отсюда следует, что все решения, лежащие на интегральном многообразии $h = f(t, g, \varepsilon)$, принадлежат к типу S, и, следовательно, они являются одновременно решениями интегро-дифференциальной системы (28.81). Поэтому для каждого из них можно указать соответствующее $A = A'$, т. е. эти решения можно представить в виде

$$h = f(t, g, \varepsilon) = \Psi(t_0, t, g, A', \varepsilon'). \tag{28.92}$$

Установив, таким образом, что всем решениям, лежащим на интегральном многообразии

$$h = f(t, g, \varepsilon),$$

соответствует некоторое $A = A'$, мы в силу того, что все решения интегро-дифференциальной системы являются решениями дифференциальной системы, в неравенстве (28.84), справедливом для решений интегро-дифференциальной системы, вместо одного из этих решений можем написать решение (28.92), лежащее на многообразии $h = f(t, g, \varepsilon)$ и зависящее от $A = A'$.

В результате получим:

$$|f(t, g, \varepsilon)-\Psi(t_0, t, g, A, \varepsilon)| \leqslant \mu(\varepsilon, \sigma_0) e^{-\frac{1}{2}|t-t_0|}|A'-A|, \quad t \geqslant t_0, \tag{28.93}$$

где $f(t, g, \varepsilon)$ представляется формулой (28.92).

Так как решения типа S являются решениями интегро-дифференциальной системы при $A=h_0$, то вместо решения интегро-дифференциальной системы $\Psi(t_0, t, g, A, \varepsilon)$, заменяя произвольное фиксированное g на g_t, можем взять решение дифференциальной системы h_t, причем в правой части вместо A, соответствовавшего $\Psi(t_0, t, g, A, \varepsilon)$, будет стоять h_0, так как Ψ равно h_t при $A=h_0$; вместо A' можем поставить начальное значение $f(t, g, \varepsilon)$.

В результате вместо неравенства (28.84), имеющего место для решений интегро-дифференциальной системы, получим следующее неравенство, имеющее место для любого решения h_t типа S:

$$|f(t, g_t, \varepsilon)-h_t| \leqslant \mu(\varepsilon, \sigma_0) e^{-\frac{\alpha}{2}|t-t_0|}|f(t_0, g_0, \varepsilon)-h_0|. \tag{28.94}$$

Рассмотрим теперь множество точек $\{h\}$ из U_{σ_0}, для которых

$$h=\Psi(t_0, t_0, g_0, A, \varepsilon), \quad |A|<\sigma_0,$$

соответствующее данным фиксированным t_0, g_0, ε, и обозначим его через $\mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon)$.

Тогда, так как для всякого решения типа S выполняется соотношение (28.90):

$$h_t=\Psi(t_0, t, g_t, A, \varepsilon), \quad |A|<\sigma_0,$$

то, положив в нем $t=t_0$, получим:

$$h_0=\Psi(t_0, t_0, g_0, A, \varepsilon), \quad |A|<\sigma_0.$$

Следовательно, для всякого решения типа S h_0 должно принадлежать $\mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon)$.

Отсюда следует, что если для $t=t_0$ имеет место:

$$h_t \in U_{\sigma_0}, \quad \text{но} \quad h_t \overline{\in} \mathfrak{M}(t_0, g_{t_0}, \varepsilon),$$

то соответствующее этим начальным условиям решение (g_t, h_t) не может принадлежать к типу S (так как в силу вышесказанного для решения h_t типа S при $t=t_0$ $h_t \in \mathfrak{M}(t_0, g_{t_0}, \varepsilon)$) и, следовательно, согласно определению решений типа S, h_t не будет оставаться в окрестности U_{σ_1} для $t>t_0$.

Таким образом, первое утверждение леммы III доказано.

Докажем второе утверждение. Как уже отмечалось, решение интегро-дифференциальной системы (28.81), обладающее свойствами а) и в), существование которого выше установлено, является в то же время решением дифференциальных уравнений (27.105).

Благодаря свойству б) имеем:

$$h_0=\Psi(t_0, t_0, g_0, A, \varepsilon), \tag{28.95}$$

и так как решение дифференциальной системы (27.105) всецело определяется начальными условиями, то очевидно, что если (g_t, h_t) есть какое-либо решение дифференциальных уравнений (27.105), для которого справедливо (28.95), то оно является также решением интегро-дифференциальной системы (28.81) и обладает свойствами а) и в).

Таким образом, если для некоторого решения уравнений (27.105) при $t=t_0$

$$h_t \in \mathfrak{M}(t_0, g_{t_0}, \varepsilon),$$

то тогда оно принадлежит к типу S, и поэтому для него выполняется неравенство (28.94), что и доказывает второе утверждение леммы.

Докажем теперь третье и четвертое свойства леммы.

Пусть, в самом деле, $s=0$. Тогда из определений (28.5) матрицы $J(t)$:

$$J(t) = -U\begin{vmatrix} e^{-H_+t} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} U^{-1} \quad \text{для } t>0,$$

$$J(t) = U\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{-H_-t} \end{vmatrix} U^{-1} \quad \text{для } t<0,$$

следует:

$$J(t) = -e^{-Ht}, \ t>0; \ J(t)=0, \ t<0, \tag{28.96}$$

вследствие чего интегральное уравнение системы (28.81):

$$h_t = \int_{t_0}^{\infty} J(\tau - t)\, Q(\tau, g_\tau, h_\tau, \varepsilon)\, d\tau + J(t_0 - t) A, \ t_0 < t,$$

примет вид

$$h_t = -\int_t^{\infty} e^{H(t-\tau)} Q(\tau, g_\tau, h_\tau, \varepsilon)\, d\tau, \ t > t_0 \tag{28.97}$$

(так как в силу (28.96) для $t_0 - t < 0$ $J(t_0 - t) = 0$), в котором отсутствует произвольный вектор A. Отсюда следует, что $\mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon)$, состоящее из начальных значений h_t (28.97), вырождается в точку, и так как всегда $f(t_0, g_0, \varepsilon) \in \mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon)$, то видим, что в данном случае $\mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon)$ состоит из одной точки: $h_0 = f(t_0, g_0, \varepsilon)$.

Пусть теперь, наоборот, $s=n-1$. Тогда по определению (28.5) матрицы $J(t)$ имеем:

$$J(t) = 0, \ t>0; \ J(t) = e^{-Ht}, \ t<0,$$

и интегральное уравнение системы принимает следующий вид:

$$h_t = \int_{t_0}^{t} e^{H(t-\tau)} Q(\tau, g_\tau, h_\tau, \varepsilon)\, d\tau + e^{H(t-t_0)} A, \ t > t_0, \tag{28.98}$$

откуда, в частности, следует, что $A = h_0$.

Однако легко видеть, что уравнение (28.98) является тождеством для любого решения дифференциальных уравнений (27.105) при любом h_0. Таким образом, в данном случае

$$\mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon) = U_{\sigma_0}.$$

Пусть, наконец, и $s \neq 0$, и $n-1-s \neq 0$. В этом случае член $J(t-t_0)A$, посредством которого вектор A входит в интегро-дифференциальную систему (28.81), может быть представлен в форме:

$$U\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{H_-(t-t_0)} \end{vmatrix} U^{-1} A = U \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{-H_-(t-t_0)} \end{vmatrix} U^{-1} a, \tag{28.99}$$

где

$$a = U \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_s \end{vmatrix} U^{-1} A, \tag{28.100}$$

и 1_s является s-мерной единичной матрицей.

Отсюда можно заключить, что тождественно

$$\Psi(t_0, t, g, A, \varepsilon) = \Psi(t_0, t, g, a, \varepsilon). \tag{28.101}$$

С другой стороны, при произвольном A вектор a, определяемый равенством (28.100), имеет всего s независимых компонент: $a_1, \ldots, a_s$, вследствие чего уравнения

$$h = \Psi(t_0, t_0, g_0, A, \varepsilon), \tag{28.102}$$

характеризующие многообразие $\mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon)$, могут быть представлены в виде

$$h = h(a_1, \ldots, a_s),$$

где $h(a_1, \ldots, a_s)$ — функции s параметров, зависящие от t_0, g_0, ε и удовлетворяющие в силу (28.84) условиям Липшица.

Итак, $\mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon)$ — s-мерное многообразие, что и завершает доказательство леммы III.

Примечание. Из леммы III следует, что в окрестности ΩU_{σ_0} может находиться лишь одно-единственное интегральное многообразие для системы (27.105), а именно многообразие

$$h = f(t, g, \varepsilon).$$

В самом деле, это утверждение очевидно в случае $s = 0$. Случай $s = n - 1$ переходит в первый, если в уравнениях заменить t на $-t$. Остается рассмотреть случай: $0 < s < n - 1$.

Пусть в окрестности ΩU_{σ_0} лежит некоторое интегральное многообразие системы (27.105), которое мы обозначим через S_t:

$$S_t \in \Omega U_{\sigma_0}, \quad -\infty < t < \infty.$$

Покажем, что оно будет единственным для системы (27.105).

Из леммы III следует, что если $g_0, h_0 \in S_t$, то должно быть

$$h_0 \in \mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon).$$

Возьмем теперь произвольное малое положительное η и выберем такое положительное z, чтобы удовлетворялось следующее неравенство:

$$2\sigma_0 C e^{-\gamma z} < \eta, \tag{28.103}$$

где γ — положительная постоянная.

Затем возьмем произвольное вещественное t_1 и положим $t_0 = t_1 - z$. Тогда вместо (28.103) получим:

$$2\sigma_0 C e^{-\gamma(t_1 - t_0)} < \eta. \tag{28.104}$$

Рассмотрим некоторое другое интегральное многообразие системы (27.105) S_{t_1}, также находящееся в окрестности ΩU_{σ_0}. Пусть (g, h) будет произвольной точкой S_{t_1}.

По определению интегрального многообразия S_t решение (g_t, h_t) системы (27.105), которое принимает значение (g, h) при $t = t_1$, лежит на S_t при любом t. В частности, $(g_{t_0}, h_{t_0}) \in S_{t_0}$, и поэтому

$$h_{t_0} \in \mathfrak{M}(t_0, g_{t_0}, \varepsilon).$$

Но тогда согласно лемме III имеем:

$$|h - f(t_1, g, \varepsilon)| = |h_{t_1} - f(t_1, g_{t_1}, \varepsilon)| \leqslant Ce^{-\gamma(t_1 - t_0)} |h_{t_0} - f(t_0, g_{t_0}, \varepsilon)|,$$

или в силу (28.104)

$$|h - f(t_1, g, \varepsilon)| = |h_{t_1} - f(t, g_{t_1}, \varepsilon)| < 2\sigma_0 Ce^{-\gamma(t_1 - t_0)} < \eta,$$

откуда вследствие произвольности η

$$h = f(t_1, g, \varepsilon). \tag{28.105}$$

Таким образом, из соотношения $(g, h) \in S_{t_1}$ следует (28.105), что и доказывает наше утверждение о единственности интегрального многообразия для системы уравнений (27.105).

Остановимся еще на некоторых следствиях из этой леммы.

Следствие 1. Согласно доказанной лемме очевидно, что, если вещественная часть хотя бы одного из корней уравнения

$$\mathrm{Det}\,|pI_{n-1} - H| = 0 \tag{28.106}$$

положительна, рассматриваемое интегральное многообразие $h = f(t, g, \varepsilon)$ обладает свойством отталкивания всех близких к нему решений, за исключением решений, начальные значения которых лежат на особом точечном многообразии $\mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon)$, причем размерность $\mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon)$ меньше, чем размерность всего фазового пространства.

Таким образом, в этом случае любое решение, лежащее на интегральном многообразии

$$h = f(t, g, \varepsilon),$$

оказывается неустойчивым.

Если вещественные части всех корней уравнения (28.106) отрицательны, то данное многообразие, наоборот, обладает свойством притяжения близких решений:

$$|h_t - f(t, g_t, \varepsilon)| \leqslant C\,|h_{t_0} - f(t_0, g_{t_0}, \varepsilon)|\, e^{-\gamma|t - t_0|}. \tag{28.107}$$

Следствие 2. Рассмотрим первое уравнение системы (27.105)

$$\frac{dg_t}{dt} = G(\varepsilon) + P(t, g_t, h_t, \varepsilon)$$

и к правой части его добавим, а затем вычтем выражение

$$F(t, g_t, \varepsilon) = P(t, g_t, f(t, g_t, \varepsilon), \varepsilon).$$

В результате получим:

$$\frac{dg_t}{dt} = G(\varepsilon) + F(t, g_t, \varepsilon) + P(t, g_t, h_t, \varepsilon) - P(t, g_t, f(t, g_t, \varepsilon), \varepsilon),$$

или

$$\frac{dg_t}{dt} - G(\varepsilon) - F(t, g_t, \varepsilon) = P(t, g_t, h_t, \varepsilon) - P(t, g_t, f(t, g_t, \varepsilon), \varepsilon).$$

Применяя обычный мажорационный прием к правой части полученного равенства, учитывая при этом свойство г) функции $P(t, g, h, \varepsilon)$ (см. стр. 353), находим:

$$\left|\frac{dg_t}{dt} - G(\varepsilon) - F(t, g_t, \varepsilon)\right| =$$
$$= |P(t, g_t, h_t, \varepsilon) - P(t, g_t, f(t, g_t, \varepsilon), \varepsilon)| \leqslant \lambda(\varepsilon, \sigma) |h_t - f(t, g_t, \varepsilon)|,$$

где $\lambda(\varepsilon, \sigma) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, $\sigma \to 0$, откуда, принимая во внимание неравенство (28.107), окончательно получаем:

$$\left|\frac{dg_t}{dt} - G(\varepsilon) - F(t, g_t, \varepsilon)\right| \leqslant C\lambda(\varepsilon, \sigma) e^{-\gamma(t-t_0)} |h_{t_0} - f(t_0, g_{t_0}, \varepsilon)|. \qquad (28.108)$$

§ 29. Соответствие между точными и приближенными решениями основного уравнения на бесконечном интервале

Перейдем теперь к приложению лемм, доказанных в предыдущем параграфе.

Эти леммы были нами сформулированы применительно к системе уравнений (27.105), к которой было приведено при соответствующих условиях основное уравнение (27.1).

Сформулируем сейчас и докажем ряд теорем, перенеся формулировку свойств решений системы уравнений (27.105) на решения основного дифференциального уравнения (27.1), помня при этом, что в процессе приведения его к виду (27.105) была сделана замена переменной $\varepsilon t \to t$. Начнем со случая квазистатического решения, когда выпадает зависимость от угловой переменной. В этом случае можем сформулировать следующую теорему.

Теорема I. Пусть функция $X(t, x)$, входящая в уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x), \qquad (29.1)$$

удовлетворяет следующим условиям:

а) Уравнение первого приближения

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi), \qquad (29.2)$$

в котором

$$X_0(\xi) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x)\, dt, \qquad (29.3)$$

имеет квазистатическое решение $\xi = \xi_0$.

б) Вещественные части всех n корней характеристического уравнения

$$\mathrm{Det}\,|pI - X_0'(\xi_0)| = 0, \qquad (29.4)$$

составленного для уравнений в вариациях

$$\frac{d\delta\xi}{dt} = \varepsilon X_{0x}'(\xi_0)\,\delta\xi, \qquad (29.5)$$

соответствующих квазистатическому решению $\xi = \xi_0$, отличны от нуля.