или

$$\frac{dg_t}{dt} - G(\varepsilon) - F(t, g_t, \varepsilon) = P(t, g_t, h_t, \varepsilon) - P(t, g_t, f(t, g_t, \varepsilon), \varepsilon).$$

Применяя обычный мажорационный прием к правой части полученного равенства, учитывая при этом свойство г) функции $P(t, g, h, \varepsilon)$ (см. стр. 353), находим:

$$\left|\frac{dg_t}{dt} - G(\varepsilon) - F(t, g_t, \varepsilon)\right| =$$
$$= |P(t, g_t, h_t, \varepsilon) - P(t, g_t, f(t, g_t, \varepsilon), \varepsilon)| \leqslant \lambda(\varepsilon, \sigma)\,|h_t - f(t, g_t, \varepsilon)|,$$

где $\lambda(\varepsilon, \sigma) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, $\sigma \to 0$, откуда, принимая во внимание неравенство (28.107), окончательно получаем:

$$\left|\frac{dg_t}{dt} - G(\varepsilon) - F(t, g_t, \varepsilon)\right| \leqslant C\lambda(\varepsilon, \sigma)\, e^{-\gamma(t-t_0)}\,|h_{t_0} - f(t_0, g_{t_0}, \varepsilon)|. \qquad (28.108)$$

§ 29. Соответствие между точными и приближенными решениями основного уравнения на бесконечном интервале

Перейдем теперь к приложению лемм, доказанных в предыдущем параграфе.

Эти леммы были нами сформулированы применительно к системе уравнений (27.105), к которой было приведено при соответствующих условиях основное уравнение (27.1).

Сформулируем сейчас и докажем ряд теорем, перенеся формулировку свойств решений системы уравнений (27.105) на решения основного дифференциального уравнения (27.1), помня при этом, что в процессе приведения его к виду (27.105) была сделана замена переменной $\varepsilon t \to t$. Начнем со случая квазистатического решения, когда выпадает зависимость от угловой переменной. В этом случае можем сформулировать следующую теорему.

Теорема I. Пусть функция $X(t, x)$, входящая в уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x), \qquad (29.1)$$

удовлетворяет следующим условиям:

а) Уравнение первого приближения

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi), \qquad (29.2)$$

в котором

$$X_0(\xi) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T X(t, x)\,dt, \qquad (29.3)$$

имеет квазистатическое решение $\xi = \xi_0$.

б) Вещественные части всех n корней характеристического уравнения

$$\mathrm{Det}\,|pI - X_0'(\xi_0)| = 0, \qquad (29.4)$$

составленного для уравнений в вариациях

$$\frac{d\delta\xi}{dt} = \varepsilon X_{0x}'(\xi_0)\,\delta\xi, \qquad (29.5)$$

соответствующих квазистатическому решению $\xi = \xi_0$, отличны от нуля.

в) Можно указать такую ρ-окрестность D_ρ точки ξ_0, в которой $X(t, x)$ — почти периодические функции t, равномерно по отношению к $x \in D_\rho$.

г) Функция $X(t, x)$ и ее частные производные первого порядка по x ограничены и равномерно непрерывны по отношению к x в области

$$-\infty < t < \infty, \quad x \in D_\rho.$$

Тогда можно указать такие положительные постоянные $\varepsilon', \sigma_0, \sigma_1$ (причем $\sigma_0 \leqslant \sigma_1 < \rho$), что для всякого положительного $\varepsilon < \varepsilon'$ справедливы следующие утверждения:

1. Уравнение (29.1) имеет единственное решение $x = x^*(t)$, определенное на всем интервале $(-\infty, \infty)$, для которого

$$|x^*(t) - \xi_0| < \sigma_0, \quad -\infty < t < \infty. \tag{29.6}$$

2. Это решение $x^*(t)$ является почти периодическим с частотным базисом функции $X(t, x)$.

3. Можно найти такую функцию $\delta(\varepsilon)$, стремящуюся к нулю вместе с ε, что будет иметь место

$$|x^*(t) - \xi_0| \leqslant \delta(\varepsilon), \quad -\infty < t < \infty. \tag{29.7}$$

4. Пусть $x(t)$ является любым решением уравнения (29.1), отличным от $x^*(t)$, удовлетворяющим при некотором $t = t_0$ неравенству вида

$$|x(t) - \xi_0| < \sigma_0. \tag{29.8}$$

Тогда, если вещественные части всех корней характеристического уравнения (29.4) отрицательны, расстояние $|x(t) - x^*(t)|$ стремится к нулю для $t \to \infty$, причем

$$|x(t) - x^*(t)| \leqslant Ce^{-\gamma\varepsilon(t-t_0)}, \tag{29.9}$$

где C и γ — положительные постоянные.

Если вещественные части всех корней характеристического уравнения (29.4) положительны, то можно найти такое $t_1 > t_0$, что

$$|x(t_1) - \xi_0| > \sigma_1. \tag{29.10}$$

Если s вещественных частей рассматриваемых корней отрицательны, а остальные $n - s$ положительны, тогда в σ_0-окрестности точки ξ_0 существует s-мерное точечное многообразие $\mathfrak{M}_{t_0}$ такое, что из соотношения

$$x(t_0) \in \mathfrak{M}_{t_0}$$

вытекает экспоненциальное стремление к нулю (при $t \to \infty$) разности $|x(t) - \xi_0|$, а из соотношения

$$x(t_0) \,\bar{\in}\, \mathfrak{M}_{t_0}$$

следует справедливость неравенства (29.10).

Сделаем теперь некоторые примечания к этой теореме.

Примечание 1. Как видно, в силу свойства 4) решение $x^*(t)$ будет устойчивым, и притом асимптотически, когда вещественные части всех корней рассматриваемого характеристического уравнения (29.4) отрицательны.

Если вещественная часть хотя бы одного из корней характеристического уравнения (29.4) является положительной, решение $x^*(t)$ оказывается неустойчивым.

Примечание 2. Пусть в дополнение к условиям теоремы I $X(t, x)$ является периодической функцией t с некоторым периодом τ, не зависящим от x.

Тогда, в частности, имеем:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T X(t, x)\,dt = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau X(t, x)\,dt,$$

и поэтому

$$X_0(\xi) = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau X(t, \xi)\,d\tau.$$

Поскольку частотный базис функции $X(t, x)$ состоит в этом случае из одного числа $\frac{2\pi}{\tau}$, видим на основании свойства 2), что в данном случае решение $x^*(t)$ будет периодическим с периодом τ.

Доказательство теоремы I. Справедливость теоремы I вытекает непосредственно из доказанных в предыдущем параграфе лемм.

Действительно, уравнение (29.1) в рассматриваемом квазистатическом случае путем преобразований

$$x = \xi_0 + b, \tag{29.11}$$

$$b = h + \varepsilon v(t, h) \tag{29.12}$$

приводится к виду

$$\frac{dh}{dt} = Hh + Q(t, h, \varepsilon), \tag{29.13}$$

где $Q(t, h, \varepsilon)$ при выполнении условий настоящей теоремы удовлетворяет условиям, приведенным на стр. 353, и, следовательно, решение системы (29.13) $h = h(t)$ будет обладать свойствами, указанными в леммах. Поэтому, рассматривая разность

$$|x^*(t) - \xi_0| = |h + \varepsilon v(t, h)|,$$

убеждаемся на основании леммы I в справедливости свойства 1).

В лемме II установлена почти периодичность $h(t)$ по t. Из выражений (27.73), где функции $B^*_\eta(t, \varphi', b')$ в силу того, что они выражаются через $X(t, x)$, являются почти периодическими относительно t с частотным базисом функции $X(t, x)$, следует, что $v(t, \varphi, b)$ также являются почти периодическими функциями t с тем же частотным базисом. Поэтому из (29.11) и (29.12) следует, что $x(t)$ — почти периодическая функция t с частотным базисом функции $X(t, x)$, что и устанавливает справедливость второго свойства теоремы.

Свойство 3) следует из леммы I, так как мы всегда можем положить

$$\delta(\varepsilon) = D(\varepsilon) + \varepsilon G(a)\frac{\zeta(\eta)}{\eta}, \tag{29.14}$$

при этом a и η выбраны таким образом, что $\varepsilon G(a)\frac{\zeta(\eta)}{\eta} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$

(см. (27.75)), и, следовательно, так как $D(\varepsilon)$ также стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$, то $\delta(\varepsilon)$ будет стремиться к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Для доказательства свойства 4) рассмотрим неравенство

$$|x(t)-x^*(t)| \leqslant |h(t)-f(t,\varepsilon)|+\varepsilon|v(t,h)-v(t,f)| \leqslant (1+\varepsilon\lambda)|h(t)-f(t,\varepsilon)|, \tag{29.15}$$

где $h(t)$ — любое решение системы (29.13), принадлежащее области U_{σ_0}.

Сопоставляя это неравенство с результатами леммы III, убеждаемся в справедливости четвертого свойства. Таким образом, теорема полностью доказана.

Перейдем теперь к рассмотрению решений в окрестности периодического решения уравнений первого приближения, когда роль угловой переменной является существенной.

В этом случае может быть доказана следующая теорема:

Теорема II. Пусть для дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt}=\varepsilon X(t,x) \tag{29.16}$$

выполнены следующие условия:

а) Уравнение первого приближения

$$\frac{d\xi}{dt}=\varepsilon X_0(\xi), \tag{29.17}$$

где

$$X_0(\xi)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X(t,\xi)\,dt,$$

имеет периодическое решение

$$\xi=\xi(\varepsilon\omega t);\quad \xi(\varphi+2\pi)=\xi(\varphi). \tag{29.18}$$

б) Вещественные части всех $(n-1)$ *) характеристических показателей для уравнений в вариациях

$$\frac{d\delta\xi}{dt}=\varepsilon X_0'(\xi(\varepsilon\omega t))\,\delta\xi, \tag{29.19}$$

соответствующих периодическому решению (29.18), отличны от нуля, и $D(\varphi, 0)\neq 0$ (см. (27.46)).

в) Можно найти такую ρ-окрестность U_ρ орбиты этого периодического решения, что функция $X(t,x)$ и ее частные производные по x до $m+1$-го порядка включительно будут ограничены и равномерно непрерывны по отношению к x в области

$$-\infty<t<\infty,\quad x\in U_\rho.$$

г) $X(t,x)$ — почти периодическая функция t равномерно по отношению к $x\in U_\rho$.

Тогда можно указать такие положительные числа ε', σ_0, σ_1 $(\sigma_0<\sigma_1<\rho)$, что при любом положительном $\varepsilon<\varepsilon'$ будут справедливы следующие утверждения:

1. Уравнение (29.16) имеет единственное интегральное многообразие S_t, лежащее для всех вещественных t в области U_ρ.

*) Один характеристический показатель, как уже отмечалось, в данном случае всегда равен нулю.

2. Это многообразие S_t допускает параметрическое представление вида

$$x = f(t, \theta). \tag{29.20}$$

Здесь*) $f(t, \theta)$ определена для всех вещественных t, θ, обладает периодом 2π по отношению к θ и является почти периодической функцией t равномерно по отношению к θ с частотным базисом функции $X(t, x)$.

Можно найти такую функцию $\delta(\varepsilon)$, стремящуюся к нулю вместе с ε, что

$$|f(t, \theta) - \xi(\theta)| \leqslant \delta(\varepsilon).$$

Функция $f(t, \theta)$ имеет равномерно непрерывные производные по θ до m-го порядка включительно.

3. На многообразии S_t уравнение (29.16) эквивалентно уравнению

$$\frac{d\theta}{dt} = \varepsilon F(t, \theta), \tag{29.21}$$

в котором $F(t, \theta)$ определена для всех вещественных t, θ, является периодической функцией θ с периодом 2π и почти периодической функцией t равномерно по отношению к θ с частотным базисом функции $X(t, x)$; $F(t, \theta)$ обладает ограниченными и равномерно непрерывными производными по θ до m-го порядка включительно.

Кроме того, имеют место неравенства:

$$|F(t, \theta) - \Omega(\varepsilon)| \leqslant \delta^*(\varepsilon); \tag{29.22}$$

$$|F(t, \theta') - F(t, \theta'')| \leqslant \eta^*(\varepsilon)\,|\theta' - \theta''|, \tag{29.23}$$

в которых $\delta^*(\varepsilon)$, $\eta^*(\varepsilon)$ стремятся к нулю вместе с ε. Таким образом, всякое решение уравнения (29.16), принадлежащее к многообразию S_t, представимо в виде

$$x = f(t, \theta(t)), \tag{29.24}$$

где $\theta = \theta(t)$ есть некоторое решение уравнения (29.24), и, наоборот, выражение (29.24), в котором $\theta = \theta(t)$ есть решение уравнения (29.21), всегда является решением уравнения (29.16), принадлежащим многообразию S_t.

4. Если вещественные части всех $n-1$ рассматриваемых характеристических показателей отрицательны, многообразие S_t обладает свойством притяжения всех близких к нему решений.

Так, пусть $x = x(t)$ есть любое решение уравнения (29.16), проходящее при некотором $t = t_0$ через какую-либо точку области U_{σ_0}:

$$x(t_0) \in U_{\sigma_0}.$$

Тогда для него при $t > t_0$ будут выполняться неравенства вида:

$$|x(t) - f(t, \theta(t))| \leqslant C_1(\varepsilon)\, e^{-\varepsilon\gamma(t-t_0)}, \tag{29.25}$$

$$\left|\frac{d\theta(t)}{dt} - \varepsilon F(t, \theta(t))\right| \leqslant C_2(\varepsilon)\, e^{-\varepsilon\gamma(t-t_0)}. \tag{29.26}$$

*) Для сокращения записи мы не будем отмечать у функции $f(t, \theta)$ и других аналогичных ей функций их явной зависимости от ε.

5. Если все эти вещественные части положительны, то можно найти такое $t_1 > t_0$, что

$$x(t_1)\bar{\in} U_{\sigma_1} \quad (\sigma_1 > \sigma_0). \tag{29.27}$$

6. Если s рассматриваемых вещественных частей отрицательны, а остальные $n-1-s$ положительны, в области U_{σ_0} существует s-мерное точечное многообразие $\mathfrak{M}_{t_0}$ такое, что из соотношения

$$x(t_0)\in \mathfrak{M}_{t_0}$$

вытекает экспоненциальное стремление к нулю выражения (29.25) при $t\to\infty$, а из соотношения

$$x(t_0)\in U_{\sigma_0}, \text{ но } x(t_0)\bar{\in}\mathfrak{M}_{t_0}, \tag{29.28}$$

вытекает справедливость соотношения (29.27) при некотором $t_1 > t_0$.

Таким образом, если хотя бы одна из вещественных частей рассматриваемых характеристических показателей положительна, многообразие S_t неустойчиво. Любое не принадлежащее к нему решение $x(t)$, для которого $x(t_0)$ лежит в области U_{σ_0} и не находится на особом точечном многообразии $\mathfrak{M}_{t_0}$ низшей размерности, с течением времени покинет область U_{σ_1} $(\sigma_1 > \sigma_0)$.

По поводу этой теоремы заметим, что нас особо будет интересовать важный частный случай, когда $f(t, \theta)$ и $F(t, \theta)$ являются периодическими функциями t с некоторым периодом T (не зависящим от θ) и число производных m взято равным двум. Этот случай будет нами специально рассмотрен в следующем параграфе.

Доказательство теоремы II. Существование и единственность интегрального многообразия S_t, параметрическое представление которого, учитывая формулы перехода от x к g, h:

$$x=\xi(\varphi)+\frac{1}{2}\{A(\varphi)b+A^*(\varphi)b^*\}, \tag{29.29}$$

$$\varphi=g+\varepsilon u(t, g, h), \quad b=h+\varepsilon v(t, g, h), \tag{29.30}$$

можно представить в виде

$$x=\xi(\theta+\varepsilon u)+\frac{1}{2}\{A(\theta+\varepsilon u)(h+\varepsilon v)+A^*(\theta+\varepsilon u)(h^*+\varepsilon v^*)\}=f(t, \theta), \tag{29.31}$$

вытекает из того, что в леммах I, III нами установлено существование и единственность g, h (а следовательно, и θ, определяемого уравнением (29.21)). В силу того, что ε и δ нами выбраны так, что

$$\frac{1}{2}|A(\varphi)b+A^*(\varphi)b^*|<\rho, \qquad b=h+\varepsilon v, \qquad \text{где } |h+\varepsilon v|<\delta,$$

следует:

$$\frac{1}{2}|A(\theta+\varepsilon u)(h+\varepsilon v)+A^*(\theta+\varepsilon u)(h^*+\varepsilon v^*)|<\rho, \tag{29.32}$$

и поэтому

$$x\in U_\rho.$$

Согласно (29.31) многообразие S_t допускает параметрическое представление

$$x=f(t, \theta),$$

где

$$f(t,\theta)=\xi(\theta+\varepsilon u(t,\theta,f(t,\theta,\varepsilon)))+$$
$$+\frac{1}{2}\{A(\theta+\varepsilon u(t,\theta,f(t,\theta,\varepsilon)))(f(t,\theta,\varepsilon)+\varepsilon v(t,\theta,f(t,\theta,\varepsilon)))+$$
$$+A^*(\theta+\varepsilon u(t,\theta,f(t,\theta,\varepsilon)))(f^*(t,\theta,\varepsilon)+\varepsilon v^*(t,\theta,f(t,\theta,\varepsilon,)))\}.$$

В силу того, что $\xi(\varphi)$, $A(\varphi)$ являются периодическими функциями φ с периодом 2π, а также в силу того, что $h(t)=f(t,\theta(t))$, а также $u(t,\theta,f(t,\theta,\varepsilon))$, $v(t,\theta,f(t,\theta,\varepsilon))$, в силу их определения (см. стр. 345), являются периодическими по θ с периодом 2π, следует, что функции

$$x=f(t,\theta)$$

будут периодическими по θ с тем же периодом 2π.

В лемме I доказано, что $h=f(t,g,\varepsilon)$ имеют ограниченные и равномерно непрерывные производные до m-го порядка включительно. Так как $\xi(\varphi)$ и $A(\varphi)$ также обладают ограниченными и равномерно непрерывными производными m-го порядка, то из (29.31) видим, что $f(t,\theta)$ будут обладать ограниченными и равномерно непрерывными производными до m-го порядка включительно.

Кроме того, всегда можно найти такое $\delta(\varepsilon)$, стремящееся к нулю вместе с ε, что будет выполняться неравенство

$$|f(t,\theta)-\xi(\theta)|\leqslant\delta(\varepsilon). \tag{29.33}$$

Утверждение 3) теоремы непосредственно следует из следствия к лемме I, где вместо уравнения (28.51)

$$\frac{dg}{dt}=G(\varepsilon)+F(t,g,\varepsilon)$$

рассматриваем уравнение

$$\frac{d\theta}{dt}=\varepsilon F(t,\theta)$$

относительно переменной θ.

Покажем теперь, что многообразие S_t обладает свойством притяжения всех близких решений в случае, если вещественные части всех $n-1$ рассматриваемых характеристических показателей отрицательны, т. е. покажем, что имеет место неравенство

$$|x(t)-f(t,\theta(t))|\leqslant C_1(\varepsilon)\,e^{-\varepsilon\gamma(t-t_0)},$$

где $x(t)$ — любое решение уравнения (29.16), проходящее при некотором $t=t_0$ через какую-либо точку области U_{σ_0}. В силу формулы перехода от x к g,h (29.31) имеем, учитывая при этом соотношение (28.107):

$$x(t)-f(t,\theta\ (t))|=|\xi(\theta+\varepsilon u(t,\theta,h_t))+\frac{1}{2}\{A(\theta+\varepsilon u(t,\theta,h_t))(h_t+$$
$$+\varepsilon v(t,\theta,h_t))+A^*(\theta+\varepsilon u(t,\theta,h_t))(h_t^*+\varepsilon v^*(t,\theta,h_t))\}-$$
$$-\xi(\theta+\varepsilon u(t,\theta,f))-\frac{1}{2}\{A(\theta+\varepsilon u(t,\theta,f))(f(t,\theta,\varepsilon)+\varepsilon v(t,\theta,f))+$$
$$+A^*(\theta+\varepsilon u(t,\theta,f))(f^*(t,\theta,\varepsilon)+\varepsilon v^*(t,\theta,f))\}|\leqslant$$
$$\leqslant\lambda(\varepsilon,\sigma_0)|h_t-f(t,\theta(t))|\leqslant C|h_{t_0}-f(t_0,\theta(t_0))|\,e^{-\gamma(t-t_0)}.$$

Принимая теперь во внимание, что h_{t_0} и $f(t_0, \theta(t_0))$ принадлежат области U_{σ_0}, окончательно получаем:

$$|x(t) - f(t, \theta(t))| \leqslant C_1(\varepsilon) e^{-\varepsilon\gamma(t-t_0)}.$$

Неравенство (28.96) непосредственно следует из установленного в следствии 2 к лемме III неравенства (28.108), где вместо переменной g положено θ.

Утверждения 5 и 6 теоремы непосредственно следуют из леммы III и ее следствия 2.

Таким образом, теорема полностью доказана.

Заметим, что все сформулированные выше результаты непосредственно переносятся на тот случай, когда основное уравнение имеет несколько более общую форму

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x, \varepsilon), \tag{29.34}$$

а в уравнении первого приближения, соответствующем рассматриваемому уравнению (29.34), положено

$$X_0(\xi) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x, 0)\, dt. \tag{29.35}$$

При этом достаточно, чтобы условия, наложенные на $X(t, x)$, выполнялись для функции $X(t, x, \varepsilon)$ равномерно по отношению к ε в некотором интервале $0 < \varepsilon < \varepsilon'$.

Действительно, в таком случае уравнение (29.34) теми же заменами переменных приводится к системе вида (27.105) со всеми указанными свойствами.

§ 30. Периодические и почти периодические решения

В настоящем параграфе рассмотрим важный частный случай, когда функции (29.20) $f(t, \theta)$ и правые части уравнений $F(t, \theta)$ являются периодическими функциями времени t с некоторым периодом T (не зависящим от θ) и число производных m взято равным двум.

В соответствии со свойством 2) и 3) теоремы II § 29 такой «случай периодичности» будет иметь место, например, когда функции $X(t, x)$ обладают по отношению к t этим периодом T.

В этом случае вместо системы (27.105):

$$\left.\begin{aligned} \frac{dg}{dt} &= G(\varepsilon) + P(t, g, h, \varepsilon), \\ \frac{dh}{dt} &= Hh + Q(t, g, h, \varepsilon), \end{aligned}\right\} \tag{30.1}$$

выбираем систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dg}{d\tau} &= \omega + \Pi\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, g, h, \varepsilon\right), \\ \frac{dh}{d\tau} &= Hh + \Gamma\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, g, h, \varepsilon\right), \end{aligned}\right\} \tag{30.2}$$

и поэтому в неравенстве (29.22) теоремы II получаем:

$$\Omega(\varepsilon) = \omega. \tag{30.3}$$