Принимая теперь во внимание, что h_{t_0} и $f(t_0, \theta(t_0))$ принадлежат области U_{σ_0}, окончательно получаем:

$$|x(t) - f(t, \theta(t))| \leqslant C_1(\varepsilon)\, e^{-\varepsilon\gamma(t-t_0)}.$$

Неравенство (28.96) непосредственно следует из установленного в следствии 2 к лемме III неравенства (28.108), где вместо переменной g положено θ.

Утверждения 5 и 6 теоремы непосредственно следуют из леммы III и ее следствия 2.

Таким образом, теорема полностью доказана.

Заметим, что все сформулированные выше результаты непосредственно переносятся на тот случай, когда основное уравнение имеет несколько более общую форму

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x, \varepsilon), \tag{29.34}$$

а в уравнении первого приближения, соответствующем рассматриваемому уравнению (29.34), положено

$$X_0(\xi) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x, 0)\, dt. \tag{29.35}$$

При этом достаточно, чтобы условия, наложенные на $X(t, x)$, выполнялись для функции $X(t, x, \varepsilon)$ равномерно по отношению к ε в некотором интервале $0 < \varepsilon < \varepsilon'$.

Действительно, в таком случае уравнение (29.34) теми же заменами переменных приводится к системе вида (27.105) со всеми указанными свойствами.

§ 30. Периодические и почти периодические решения

В настоящем параграфе рассмотрим важный частный случай, когда функции (29.20) $f(t, \theta)$ и правые части уравнений $F(t, \theta)$ являются периодическими функциями времени t с некоторым периодом T (не зависящим от θ) и число производных m взято равным двум.

В соответствии со свойством 2) и 3) теоремы II § 29 такой «случай периодичности» будет иметь место, например, когда функции $X(t, x)$ обладают по отношению к t этим периодом T.

В этом случае вместо системы (27.105):

$$\left.\begin{aligned} \frac{dg}{dt} &= G(\varepsilon) + P(t, g, h, \varepsilon), \\ \frac{dh}{dt} &= Hh + Q(t, g, h, \varepsilon), \end{aligned}\right\} \tag{30.1}$$

выбираем систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dg}{d\tau} &= \omega + \Pi\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, g, h, \varepsilon\right), \\ \frac{dh}{d\tau} &= Hh + \Gamma\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, g, h, \varepsilon\right), \end{aligned}\right\} \tag{30.2}$$

и поэтому в неравенстве (29.22) теоремы II получаем:

$$\Omega(\varepsilon) = \omega. \tag{30.3}$$

«Случай периодичности» функций $f(t, \theta)$ и $F(t, \theta)$ также имеет место, если в уравнениях (27.47)

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \varepsilon\omega + \varepsilon W(t, \varphi, b), \\ \frac{db}{dt} &= \varepsilon H b + \varepsilon B(t, \varphi, b), \end{aligned}\right\} \tag{30.4}$$

функции $W(t, \varphi, b)$, $B(t, \varphi, b)$, как об этом указывалось на стр. 351, имеют вид (27.103), т. е.

$$\left.\begin{aligned} W(t, \varphi, b) &= \overline{W}(t, \varphi + \nu t, b), \\ B(t, \varphi, b) &= \overline{B}(t, \varphi + \nu t, b), \end{aligned}\right\} \tag{30.5}$$

где $\overline{W}(t, \varphi, b)$, $\overline{B}(t, \varphi, b)$ обладают по отношению к t периодом T.

Тогда в качестве системы (30.1) принимается система уравнений (27.104):

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{d\tau} &= \omega + \frac{\nu}{\varepsilon} + \overline{\Pi}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \vartheta, h, \varepsilon\right), \\ \frac{dh}{dt} &= Hh + \overline{\Gamma}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \vartheta, h, \varepsilon\right), \end{aligned}\right\} \tag{30.6}$$

правые части которых являются периодическими функциями независимой переменной τ.

В данном случае в неравенстве (29.22) теоремы II будет:

$$\Omega(\varepsilon) = \omega + \frac{\nu}{\varepsilon}. \tag{30.7}$$

Рассматриваемый «случай периодичности» функции $f(t, \theta)$ и $F(t, \theta)$ представляет особый интерес, потому что здесь, опираясь на классические результаты Пуанкаре, дополненные Данжуа, можно провести анализ структуры решений, лежащих на многообразии S_t.

Этим и займемся в настоящем параграфе.

Возьмем уравнение:

$$\frac{d\theta}{dt} = \varepsilon F(t, \theta), \tag{30.8}$$

и будем рассматривать его решение $\theta(t)$ как функцию от начальных значений t_0, $\theta_0 = \theta(t_0)$ и разности $t - t_0$:

$$\theta(t) = \theta(t_0) + \Phi(t - t_0, t_0, \theta(t_0)). \tag{30.9}$$

Заметим теперь, что в силу свойства периодичности правой части уравнения (30.8), т. е. функции $F(t, \theta)$ по t и θ с периодами соответственно T и 2π, функция $\Phi(\tau, t_0, \theta_0)$ будет периодической по отношению к t_0, θ_0 соответственно с периодами T и 2π.

Пусть теперь

$$\theta_n = \theta(t_0 + nT).$$

Тогда, полагая в (30.9) вместо t и t_0 соответственно $t_0 + (n+1)T$ и $t_0 + nT$, получаем:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Phi(T, t_0 + nT, \theta_n)$$

или, обозначая

$$\Phi(\theta_n) = \Phi(T, t_0, \theta_n)$$

и учитывая, что $\Phi(T, t_0, \theta_n)$ — функция периодическая по t с периодом T, имеем:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Phi(\theta_n), \tag{30.10}$$

где $\Phi(\theta)$ является периодической функцией θ с периодом 2π. Ввиду того, что в условиях теоремы II § 29 мы приняли $m = 2$, функция $\Phi(\theta)$ будет обладать непрерывными производными первого и второго порядков.

Далее, из уравнения (30.8), учитывая неравенство (29.23):

$$|F(t, \theta') - F(t, \theta'')| \leqslant \eta^*(\varepsilon)\,|\theta' - \theta''|,$$

следует, что

$$\left|\frac{d\theta_{n+1}}{dt} - \frac{d\theta_n}{dt}\right| \leqslant \varepsilon\eta^*(\varepsilon)\,|\theta_{n+1} - \theta_n|,$$

откуда, учитывая (30.10), непосредственно получаем:

$$|\Phi'(\theta)| \leqslant \varepsilon\rho(\varepsilon), \tag{30.11}$$

где $\rho(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

При рассматриваемых достаточно малых значениях ε, для которых

$$\varepsilon\rho(\varepsilon) < 1,$$

согласно (30.11) имеем:

$$1 + \Phi'(\theta) > 0. \tag{30.12}$$

Таким образом, функция

$$F(\theta) = \theta + \Phi(\theta) \tag{30.13}$$

в силу (30.12) является монотонно возрастающей и обладает свойством периодичности «второго рода»:

$$F(\theta + 2\pi) = F(\theta) + 2\pi.$$

Поэтому преобразование

$$\theta \to F(\theta) \tag{30.14}$$

может рассматриваться как взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение окружности на саму себя.

Благодаря (30.10) видим, что последовательные значения решения уравнения (30.8) в точках $t = t_0 + nT$ получаются итерацией преобразования (30.14), исходя из начального значения θ_0.

Итак, в дальнейшем вместо уравнения (30.8) и его решений будем рассматривать эквивалентное ему итерационное уравнение (30.10) и его решения.

Заметим теперь, что итерации преобразований рассматриваемого здесь типа были предметом исследований Пуанкаре и Данжуа *), в которых было установлено следующее:

1) Для решений θ_n итерационного уравнения (30.10), т. е. согласно обозначению (30.13) уравнения

$$\theta_{n+1} = F(\theta_n), \tag{30.15}$$

---

*) A. Denjoy, Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore, Journ. de Math., 11 (1932).

существует предел

$$\bar{\nu} = \lim_{n \to \infty} \frac{\theta_n}{2\pi n}, \tag{30.16}$$

не зависящий от θ_0.

2) Если $\bar{\nu}$ иррационально, то общее решение итерационного уравнения (30.15) имеет вид

$$\theta_n = 2\pi\bar{\nu}n + \psi + E(2\pi\bar{\nu}n + \psi), \tag{30.17}$$

где ψ — произвольная постоянная, а $E(\varphi)$ — непрерывная периодическая функция с периодом 2π. Выражение $\varphi + E(\varphi)$ является монотонно возрастающей функцией, не остающейся постоянной ни в каком, сколь угодно малом интервале.

3) Если $\bar{\nu}$ рационально:

$$\bar{\nu} = \frac{r}{s},$$

где r, s — взаимно простые числа, то рассматриваемое итерационное уравнение (30.15) имеет периодические решения, для которых выполняются соотношения:

$$\theta_{n+s} - \theta_n = 2\pi r, \tag{30.18}$$

причем любые решения θ_n при неограниченном возрастании n приближаются к одному из таких периодических решений.

Кроме того, если θ_m будет каким-либо решением рассматриваемого уравнения (30.15), исходящим из начального значения θ_0, лежащего внутри интервала $(0, 2\pi)$, то для него можно указать такие постоянные α_m и β_m, удовлетворяющие неравенствам:

$$\alpha_m > 0, \ \beta_m > 0, \ \alpha_m + \beta_m < 2\pi, \tag{30.19}$$

что

$$-\alpha_m \leqslant \theta_{ms} - 2\pi m r \leqslant \beta_m. \tag{30.20}$$

Установим теперь ряд следствий из указанных результатов Пуанкаре — Данжуа.

Рассмотрим сначала случай иррационального $\bar{\nu}$.

Заменяя в (30.19) t_0 на $t_0 + nT$ и учитывая периодичность функции $\Phi(\tau, t_0, \theta_0)$ по t_0, получаем:

$$\theta(t) = \theta_n + \Phi(t - t_0 - nT, T_0, \theta_n),$$

откуда в силу (30.17) имеем:

$$\theta(t) = 2\pi\bar{\nu}n + \psi + E(2\pi\bar{\nu}n + \psi) + \Phi(t - t_0 - nT, t_0, 2\pi\bar{\nu}n + \\ + \psi + E(2\pi\bar{\nu}n + \psi)). \tag{30.21}$$

Введем для сокращения следующее обозначение:

$$-\xi + E(\varphi) + \Phi\left(\frac{T}{2\pi\bar{\nu}}\xi, t_0, \varphi + E(\varphi)\right) = f(\xi, \varphi).$$

Тогда, полагая в (30.21)

$$\xi = 2\pi\bar{\nu}\frac{t - t_0 - nT}{T},$$

получим:

$$\theta(t) = 2\pi\frac{\bar{\nu}(t-t_0)}{T} + \psi + f\left(2\pi\bar{\nu}\frac{t-t_0-nT}{T},\ 2\pi\bar{\nu}n + \psi\right), \qquad (30.22)$$

так как

$$2\pi\bar{\nu}\frac{t-t_0}{T} = \xi + 2\pi\bar{\nu}n.$$

Заметим, кстати, что введенная функция $f(\xi, \varphi)$ непрерывна и обладает по отношению к φ периодом 2π, так как $E(\varphi)$ и $\Phi(\tau, t_0, \theta_0)$ — периодические по φ и θ_0 с периодом 2π.

Далее, так как соотношение (30.22) справедливо при любом n, то можем написать следующее тождество:

$$f\left(2\pi\bar{\nu}\frac{t-t_0-nT}{T} - 2\pi\bar{\nu},\ 2\pi\bar{\nu}n + \psi + 2\pi\bar{\nu}\right) = \\ = f\left(2\pi\bar{\nu}\frac{t-t_0-nT}{T},\ 2\pi\bar{\nu}n + \psi\right). \qquad (30.23)$$

Величина t здесь также произвольна. Введем вместо t новую независимую переменную u по формуле

$$t - t_0 - nT = \frac{T}{2\pi\bar{\nu}}u.$$

Тогда тождество (30.23), очевидно, можно представить в виде

$$f(u - 2\pi\bar{\nu},\ 2\pi\bar{\nu}n + \psi + 2\pi\bar{\nu}) = f(u,\ 2\pi\bar{\nu}n + \psi). \qquad (30.24)$$

Поскольку числа $2\pi\bar{\nu}n$ образуют на окружности всюду плотное множество, то в силу непрерывности из (30.24) можно заключить, что для любых φ будет выполняться соотношение

$$f(u - 2\pi\bar{\nu},\ \varphi + 2\pi\bar{\nu}) = f(u, \varphi). \qquad (30.25)$$

Заметив это, построим функцию

$$f\left(2\pi\bar{\nu}R\left(\frac{u}{2\pi}\right),\ \varphi - 2\pi\bar{\nu}R\left(\frac{u}{2\pi}\right)\right) = \bar{f}(u, \varphi), \qquad (30.26)$$

где $R(\alpha)$ — дробная часть вещественного числа α. Так как $R\left(\frac{u}{2\pi}\right)$ является периодической функцией u с периодом 2π и притом непрерывна, кроме точек $u = 2\pi m$ (m — целое), где она терпит разрыв, равный единице, то построенная функция $\bar{f}(u, \varphi)$ будет периодической функцией по отношению к φ и u, обладающей периодом 2π и, кроме того, непрерывной, так как ввиду тождества (30.25) свойство непрерывности сохраняется также в точках разрыва функции $R\left(\frac{u}{2\pi}\right)$.

Положим теперь в правой части формулы (30.22):

$$n = \frac{t-t_0}{T} - R\left(\frac{t-t_0}{T}\right).$$

Тогда формулу (30.22), учитывая соотношение (30.26), можно представить в виде:

$$\theta(t) = 2\pi\bar{\nu}\frac{t-t_0}{T} + \psi + \bar{f}\left(2\pi\frac{t-t_0}{T},\ 2\pi\bar{\nu}\frac{t-t_0}{T} + \psi\right). \qquad (30.27)$$

Подставляя это выражение в (29.20)

$$x = f(t, \theta(t)), \tag{30.28}$$

убеждаемся, что решения рассматриваемого основного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x),$$

лежащие на интегральном многообразии S_t, имеют в рассматриваемом случае иррационального $\bar{\nu}$ следующий вид:

$$x(t) = \Phi(\alpha_e t, \alpha_p t + \psi) \quad \left(\alpha_e = \frac{2\pi}{T}, \ \alpha_p = \frac{2\pi\bar{\nu}}{T}, \ \psi = \text{const}\right), \tag{30.29}$$

где $\Phi(\varphi, \vartheta)$ — непрерывная функция угловых переменных φ и ϑ с периодом 2π.

Итак, рассматриваемые решения уравнения (29.16), лежащие на многообразии S_t, оказываются квазипериодическими функциями и обладают двумя основными частотами — «внешней» частотой $\alpha_e = \frac{2\pi}{T}$ и «собственной» частотой $\alpha_p = \frac{2\pi\bar{\nu}}{T}$.

Заметим еще, что согласно (30.27) имеем:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\theta(t)}{t} = \frac{2\pi\bar{\nu}}{T},$$

и поэтому благодаря неравенству (29.22) и уравнению (30.8) получим:

$$|\alpha_p - \Omega(\varepsilon)| \leqslant \varepsilon\delta^*(\varepsilon). \tag{30.30}$$

Таким образом, в случае иррационального $\bar{\nu}$ $\Omega(\varepsilon)$ является асимптотическим приближением для собственной частоты $\alpha_p = \frac{2\pi\bar{\nu}}{T}$.

Перейдем теперь к рассмотрению случая, когда число $\bar{\nu}$ рациональное:

$$\bar{\nu} = \frac{r}{s},$$

где r и s — взаимно простые числа.

Тогда ввиду приведенного выше результата Пуанкаре — Данжуа на интегральном многообразии S_t имеются периодические решения уравнения (30.8) с периодом sT, причем любое решение, принадлежащее S_t, приближается к одному из этих периодических решений с периодом sT при $t \to \infty$.

Заметим, между прочим, что, поскольку здесь у периодических решений частоты будут кратными $\frac{2\pi}{sT}$, мы можем представить их линейными комбинациями частот

$$\alpha_e = \frac{2\pi}{T}; \quad \alpha_p = \frac{2\pi}{sT} r = \frac{2\pi}{T}\bar{\nu}. \tag{30.31}$$

Таким образом, и в данном случае рационального значания числа $\bar{\nu}$ стационарные решения уравнения (29.16) (периодические решения, лежащие на многообразии S_t) можно формально представить как функции, обладающие основными частотами α_e и α_p.

Перейдем теперь к рассмотрению решений, не лежащих на многообразии S_t, ограничиваясь при этом тем случаем, когда все $n-1$ характеристических показателей имеют отрицательные вещественные части.

В этом случае покажем, что любое решение основного уравнения (29.16), проходящее при $t=t_0$ через какую-либо точку области U_{σ_0}, приближается при $t\to\infty$ к одному из стационарных решений, т. е. к квазипериодическому решению в случае иррационального $\bar{\nu}$ или к периодическому в случае рационального $\bar{\nu}$.

Для этого, как видно из неравенств (29.25), (29.26),

$$|x(t)-f(t,\theta(t))|\leqslant C_1(\varepsilon)e^{-\varepsilon\gamma(t-t_0)},$$
$$\left|\frac{d\theta(t)}{dt}-\varepsilon F(t,\theta(t))\right|\leqslant C_2(\varepsilon)e^{-\varepsilon\gamma(t-t_0)},$$

достаточно доказать, что если какая-либо непрерывная и дифференцируемая функция $\theta(t)$ в интервале (t_0,∞) удовлетворяет неравенству (29.26), то

$$\theta(t)-\varphi(t)\underset{t\to\infty}{\longrightarrow}0, \tag{30.32}$$

где $\varphi(t)$ является решением уравнения

$$\frac{d\varphi}{dt}=\varepsilon F(t,\varphi). \tag{30.33}$$

В свою очередь для доказательства этого утверждения достаточно доказать, что для любой последовательности θ_n, для которой

$$|\theta_{n+1}-F(\theta_n)|\leqslant Q(\varepsilon)e^{-\varepsilon\gamma_0 n},\quad \gamma_0=\gamma T, \tag{30.34}$$

будет иметь место соотношение

$$\theta_n-\varphi_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0, \tag{30.35}$$

где φ_n удовлетворяет итерационному уравнению

$$\varphi_{n+1}=F(\varphi_n). \tag{30.36}$$

Итак, для завершения доказательства нашего утверждения о стремлении любого решения основного уравнения (29.16), проходящего при $t=t_0$ через какую-либо точку области U_{σ_0}, к одному из стационарных решений остается рассмотреть последовательность θ_n, удовлетворяющую неравенству (30.34), и установить для нее справедливость предельного соотношения (30.35).

Этим сейчас мы и будем заниматься.

Рассмотрим вначале следующие выражения:

$$\begin{aligned}
&\theta_{m+1}+Ke^{-\varepsilon\gamma_0(m+1)}-F(\theta_m+Ke^{-\varepsilon\gamma_0 m})=\theta_{m+1}-F(\theta_m)+\\
&\qquad\qquad+Ke^{-\varepsilon\gamma_0 m}(e^{-\varepsilon\gamma_0}+\widetilde{F}'_0),\\
&\theta_{m+1}-Ke^{-\varepsilon\gamma_0(m+1)}-F(\theta_m-Ke^{-\varepsilon\gamma_0 m})=\theta_{m+1}-F(\theta_m)-\\
&\qquad\qquad-Ke^{-\varepsilon\gamma_0 m}(e^{-\varepsilon\gamma_0}-\widetilde{F}'_\theta),
\end{aligned} \tag{30.37}$$

где K — некоторая постоянная, вообще говоря, малая, выбор которой будет нами сделан ниже.

В силу неравенства (30.11) и уравнения (30.13) имеем:

$$F'_\theta(\theta) = 1 + \Phi'(\theta),$$
$$|\Phi'(\theta)| \leqslant \varepsilon\rho(\varepsilon),$$

откуда находим:

$$1 - \varepsilon\rho(\varepsilon) \leqslant F'_\theta(\theta) \leqslant 1 + \varepsilon\rho(\varepsilon). \tag{30.38}$$

Поэтому, учитывая неравенства (30.38) и (30.34), из соотношения (30.37) получаем следующие неравенства:

$$\left.\begin{aligned} \theta_{m+1} + Ke^{-\varepsilon\gamma_0(m+1)} < F(\theta_m + Ke^{-\varepsilon\gamma_0 m}) + Q(\varepsilon)\, e^{-\varepsilon\gamma_0 m} - \\ - Ke^{-\varepsilon\gamma_0 m}(1 - \varepsilon\rho(\varepsilon) - e^{-\varepsilon\gamma_0}), \\ \theta_{m+1} - Ke^{-\varepsilon\gamma_0(m+1)} > F(\theta_m - Ke^{-\varepsilon\gamma_0 m}) - Q(\varepsilon)\, e^{-\varepsilon\gamma_0 m} + \\ + Ke^{-\varepsilon\gamma_0 m}(1 - \varepsilon\rho(\varepsilon) - e^{-\varepsilon\gamma_0}). \end{aligned}\right\} \tag{30.39}$$

Пусть теперь число ε_0 взято столь малым, что для любого положительного ε меньшего ε_0 выполняется следующее соотношение:

$$1 - \varepsilon\rho(\varepsilon) - e^{-\varepsilon\gamma_0} > 0. \tag{30.40}$$

Тогда, полагая, что постоянная K определена выражением

$$K = \frac{Q(\varepsilon)}{1 - \varepsilon\rho(\varepsilon) - e^{-\varepsilon\gamma_0}}, \tag{30.41}$$

и вводя обозначения

$$\psi'_m = \theta_m + Ke^{-\varepsilon\gamma_0 m}, \quad \psi''_m = \theta_m - Ke^{-\varepsilon\gamma_0 m}, \tag{30.42}$$

из неравенств (30.39) находим:

$$\begin{aligned} \psi'_{m+1} &< F(\psi'_m), \\ \psi''_{m+1} &> F(\psi''_m). \end{aligned} \tag{30.43}$$

Рассмотрим теперь системы чисел

$$\varphi'_{m,\,n}, \quad \varphi''_{m,\,n}, \tag{30.44}$$

являющиеся по отношению к индексу m решениями итерационного уравнения (30.36):

$$\varphi_{m+1} = F(\varphi_m)$$

при начальных условиях

$$\left.\begin{aligned} \varphi'_{m,\,n} = \theta_n + Ke^{-\varepsilon\gamma_0 n} = \psi'_n, \\ \varphi''_{m,\,n} = \theta_n - Ke^{-\varepsilon\gamma_0 n} = \psi''_n \end{aligned} \qquad (m = n).\right\} \tag{30.45}$$

Вследствие неравенств (30.43), принимая во внимание монотонное возрастание функции $F(\theta)$, заключаем, что

$$\left.\begin{aligned} \psi'_m \leqslant \varphi'_{m,\,n}, \\ \psi''_m \geqslant \varphi''_{m,\,n} \end{aligned} \qquad (m = n,\ n+1,\ n+2,\ \ldots).\right\} \tag{30.46}$$

Согласно (30.45) имеем:

$$\theta_m = \psi'_m - Ke^{-\varepsilon\gamma_0 m},$$
$$\theta_m = \psi''_m + Ke^{-\varepsilon\gamma_0 m},$$

откуда, учитывая (30.46), получаем следующее неравенство:

$$\varphi''_{m,n} + Ke^{-\varepsilon\gamma_0 m} \leqslant \theta_m \leqslant \varphi'_{m,n} - Ke^{-\varepsilon\gamma_0 m}. \tag{30.47}$$

Рассмотрим вначале случай иррационального $\bar{\nu}$. В этом случае на основании второго свойства Пуанкаре — Данжуа (стр. 389) $\varphi'_{m,n}$ и $\varphi''_{m,n}$ как решения итерационного уравнения (30.36) могут быть представлены в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \varphi'_{m,n} &= 2\pi\bar{\nu}m + \xi_n + E(2\pi\bar{\nu}m + \xi_n), \\ \varphi''_{m,n} &= 2\pi\bar{\nu}m + \eta_n + E(2\pi\bar{\nu}m + \eta_n), \end{aligned}\right\} \tag{30.48}$$

где ξ_n и η_n — произвольные постоянные.

Принимая во внимание (30.47) (откуда следует, что $\varphi''_{m,n} < \varphi'_{m,n}$) и учитывая, что $\varphi + E(\varphi)$ является монотонно возрастающей функцией, не остающейся постоянной ни в каком сколь угодно малом интервале, можем утверждать, что стоящие в соотношении (30.48) постоянные ξ_n и η_n удовлетворяют неравенству

$$\xi_n > \eta_n. \tag{30.49}$$

Полагая в неравенствах (30.47) $m = n+1$ и учитывая (30.45), имеем:

$$\left.\begin{aligned} \varphi'_{n+1,n} &\geqslant \theta_{n+1} + Ke^{-\varepsilon\gamma_0(n+1)} = \varphi'_{n+1,n+1}, \\ \varphi''_{n+1,n} &\leqslant \theta_{n+1} - Ke^{-\varepsilon\gamma_0(n+1)} = \varphi''_{n+1,n+1}. \end{aligned}\right\} \tag{30.50}$$

Сравнивая (30.50) и (30.48), находим:

$$\xi_n + E(2\pi(\bar{\nu}n + \bar{\nu}) + \xi_n) \geqslant \xi_{n+1} + E(2\pi(\bar{\nu}n + \bar{\nu}) + \xi_{n+1}),$$
$$\eta_n + E(2\pi(\bar{\nu}n + \bar{\nu}) + \eta_n) \leqslant \eta_{n+1} + E(2\pi(\bar{\nu}n + \bar{\nu}) + \eta_{n+1}),$$

и потому ввиду монотонного возрастания функции $\varphi + E(\varphi)$ видим, что

$$\left.\begin{aligned} \xi_{n+1} &\leqslant \xi_n, \\ \eta_{n+1} &\geqslant \eta_n. \end{aligned}\right\} \tag{30.51}$$

С другой стороны, из равенств (30.48) и (30.45) следует:

$$\xi_n + E(2\pi\bar{\nu}n + \xi_n) - \eta_n - E(2\pi\bar{\nu}n + \eta_n) = 2Ke^{-\varepsilon\gamma_0 n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

откуда

$$\xi_n - \eta_n \to 0, \quad n \to \infty. \tag{30.52}$$

Только что установленные соотношения (30.49), (30.51), (30.52) показывают, что последовательности ξ_n и η_n, первая убывая, а вторая возрастая, стремятся к некоторому общему пределу $\bar{\psi}$.

С другой стороны, отбрасывая в неравенствах (30.47) слагаемое $Ke^{-\varepsilon\gamma_0 m}$ и учитывая соотношение (30.48), имеем:

$$2\pi\bar{\nu}m + \xi_m + E(2\pi\bar{\nu}m + \xi_m) > \theta_m > 2\pi\bar{\nu}m + \eta_m + E(2\pi\bar{\nu}m + \eta_m), \tag{30.53}$$

откуда при $m \to \infty$ находим:

$$\theta_m - \{(2\pi\bar{\nu}m + \bar{\psi}) + E(2\pi\bar{\nu}m + \psi)\} \to 0,$$

или

$$\theta_m - \varphi_m \to 0, \quad m \to \infty, \tag{30.54}$$

что и требовалось доказать.

Перейдем теперь к рассмотрению случая рационального $\bar{\nu}$:

$$\bar{\nu} = \frac{r}{s}, \tag{30.55}$$

где r и s — взаимно простые числа.

Введем функцию, получающуюся в результате s-кратного применения преобразования F:

$$\Phi_1(\varphi) = F(\ldots F(\varphi) \ldots) - 2\pi r, \tag{30.56}$$

и заметим, что она будет непрерывно и монотонно возрастающей функцией φ.

Так как $F(\varphi)$ обладает свойством периодичности «второго рода» с периодом 2π, то, следовательно, разность

$$\Phi_1(\varphi) - \varphi \tag{30.57}$$

будет периодической с периодом 2π по φ.

Ввиду того, что в рассматриваемом случае рационального $\bar{\nu}\left(\bar{\nu} = \frac{r}{s}\right)$ на основании свойства 3), установленного Пуанкаре — Данжуа, периодические решения итерационного уравнения (30.36)

$$\varphi_{n+1} = F(\varphi_n)$$

удовлетворяют соотношению

$$\varphi_{n+s} - \varphi_n = 2\pi r, \tag{30.58}$$

то для них

$$\varphi_{n+s} = F(\ldots F(F(\varphi)) \ldots),$$

или на основании (30.56)

$$\varphi_{n+s} - 2\pi r = \Phi_1(\varphi_n), \tag{30.59}$$

откуда, учитывая (30.58) и полагая $n = ms$, находим:

$$\varphi_{ms} = \Phi_1(\varphi_{ms}).$$

Таким образом, принимая в качестве начального значения φ_0 один из корней уравнения

$$\varphi = \Phi_1(\varphi), \tag{30.60}$$

получаем решение итерационного уравнения (30.36) φ_{ms}, исходящее из начального значения φ_0, которое согласно (30.58) можем записать в виде

$$\varphi_{ms} = \varphi_0 + 2\pi r m. \tag{30.61}$$

Однако имеем:

$$\varphi_{ms+1} - F(\varphi_{ms}) = 0. \tag{30.62}$$

Согласно соотношению (30.34) имеем также:

$$\theta_{ms+1} - F(\theta_{ms}) \to 0, \quad m \to \infty. \tag{30.63}$$

Поэтому в данном случае рационального $\bar{\nu}$ для того, чтобы доказать соотношение

$$\theta_n - \varphi_n \to 0, \quad n \to \infty,$$

нам надо показать, что

$$\theta_{ms} - \varphi_{ms} \to 0, \quad m \to \infty \tag{30.64}$$

или, что непосредственно вытекает из (30.62) и (30.63),

$$\theta_{ms+1} - \varphi_{ms+1} \to 0, \quad m \to \infty,$$

или, наконец, вообще

$$\theta_{ms+k} - \varphi_{ms+k} \to 0, \quad m \to \infty,$$

где $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ s-1$.

Учитывая (30.61), соотношение (30.64) можем записать в виде

$$\theta_{ms} - 2\pi rm \to \varphi_0, \quad m \to \infty, \tag{30.65}$$

где φ_0 — один из корней уравнения (30.60).

Поэтому для доказательства нашего утверждения о стремлении всякого решения основного уравнения (29.16), проходящего при $t = t_0$ через какую-либо точку области U_{σ_0} к одному из стационарных решений, нам в случае рационального $\bar{\nu}$ остается установить справедливость предельного перехода (30.65).

Итак, приступим к доказательству предельного соотношения (30.65).

Возьмем какое-либо решение φ_m итерационного уравнения (30.36), исходящее из начального значения φ_0, произвольно фиксированного в интервале $(0,\ 2\pi)$.

Учитывая, что согласно (30.61)

$$\varphi_0 = \varphi_{ms} - 2\pi rm,$$

положим для сокращения

$$\bar{\varphi}_m = \varphi_{ms} - 2\pi rm.$$

Тогда согласно свойству 3), установленному Пуанкаре — Данжуа (см. стр. 389), имеем:

$$-\alpha_m \leqslant \bar{\varphi}_m \leqslant \beta_m, \tag{30.66}$$

где

$$\alpha_m > 0, \quad \beta_m > 0, \quad \alpha_m + \beta_m < 2\pi.$$

С другой стороны, согласно (30.19) и (30.59) можем написать:

$$\bar{\varphi}_{m+1} = \varphi_{ms+s} - 2\pi r - 2\pi mr = \Phi_1(\varphi_{ms}) - 2\pi mr.$$

Но так как

$$\varphi_{ms} = \bar{\varphi}_m + 2\pi mr,$$

то, учитывая, что $\Phi_1(\varphi)$ обладает свойством периодичности второго рода, имеем:

$$\bar{\varphi}_{m+1} = \Phi_1(\bar{\varphi}_m), \tag{30.67}$$

и потому ввиду монотонного возрастания функции $\Phi_1(\varphi)$ в случае, если рассматриваемое решение итерационного уравнения (30.36) φ_m не является периодическим, т. е. если числа $\bar{\varphi}_m$ не постоянны по отношению к индексу m, последовательность

$$\bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \ldots, \bar{\varphi}_m, \ldots$$

будет, монотонно убывая или возрастая, стремиться к некоторому пределу, являющемуся корнем уравнения (30.60).

Установим теперь следующие леммы.

Лемма а). Последовательность

$$\bar{\varphi}_m \, (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

никогда не может «перескочить» через какой-либо корень уравнения (30.60)

$$\varphi = \Phi_1(\varphi),$$

т. е. не существует такого целого m_0, что

$$\bar{\varphi}_{m_0} < \varphi_0 < \bar{\varphi}_{m_0+1} \tag{30.68}$$

или

$$\bar{\varphi}_{m_0} > \varphi_0 > \bar{\varphi}_{m_0+1}. \tag{30.69}$$

Доказательство. Допустим, что имеет место неравенство (30.68). Тогда вследствие монотонного возрастания функции $\Phi_1(\varphi)$ имеем:

$$\Phi_1(\bar{\varphi}_{m_0}) < \Phi_1(\varphi_0),$$

откуда, учитывая соотношение (30.67), получаем:

$$\bar{\varphi}_{m_0+1} < \varphi_0,$$

что противоречит (30.68).

Аналогично доказывается также невозможность неравенства (30.69).

Лемма б). Если последовательности

$$\bar{\varphi}'_m, \bar{\varphi}''_m \; (m = 0, 1, 2, \ldots), \tag{30.70}$$

соответствующие решениям итерационного уравнения (30.36), стремятся к различным корням уравнения (30.60), то между величинами

$$\bar{\varphi}'_m, \bar{\varphi}''_m$$

всегда лежит, по крайней мере, один корень этого уравнения (30.60).

Доказательство. Прежде чем приступить к доказательству, заметим, что здесь могут представиться два случая: 1) когда обе рассматриваемые последовательности одновременно возрастают или убывают и 2) когда одна из них возрастает, а другая убывает.

Рассмотрим вначале случай одновременного возрастания. Пусть, например, для определенности

$$\bar{\varphi}'_0 > \bar{\varphi}''_0.$$

Тогда, так как обе последовательности возрастают и стремятся к различным корням уравнения (30.60), то, очевидно, что для всех m

$$\bar{\varphi}'_m > \bar{\varphi}''_m.$$

Переходя к пределу, получим

$$\varphi' > \varphi'',$$

где φ' и φ'' — корни уравнения (30.60), являющиеся соответственно пределами последовательностей $\overline{\varphi}'_m$, $\overline{\varphi}''_m$.

Благодаря монотонному возрастанию последовательности $\overline{\varphi}''_m$, очевидно, получим:

$$\overline{\varphi}''_m < \varphi''. \tag{30.71}$$

Так как последовательность $\overline{\varphi}'_m$ на основании леммы а) не может «перепрыгнуть» через φ'', то для всех m имеем:

$$\overline{\varphi}'_m > \varphi''. \tag{30.72}$$

Из неравенств (30.71) и (30.72) получаем:

$$\overline{\varphi}''_m < \varphi'' < \overline{\varphi}'_m,$$

что и доказывает в рассматриваемом случае справедливость нашей леммы.

Аналогичные рассуждения имеют место и в случае одновременного убывания последовательностей (30.70).

Пусть теперь одна из последовательностей (30.70) убывает, а другая возрастает.

В этом случае знаки следующих двух выражений:

$$\overline{\varphi}'_{m+1} - \overline{\varphi}'_m = \Phi_1(\overline{\varphi}'_m) - \overline{\varphi}'_m,$$

$$\overline{\varphi}''_{m+1} - \overline{\varphi}''_m = \Phi_1(\overline{\varphi}''_m) - \overline{\varphi}''_m,$$

различны (так как одна последовательность возрастает, а другая убывает).

Поэтому на основании непрерывности уравнение (30.60)

$$\Phi_1(\varphi) - \varphi = 0$$

имеет, по крайней мере, один корень в интервале

$$[\overline{\varphi}'_m, \overline{\varphi}''_m].$$

Итак, лемма б) полностью доказана.

Возвратимся теперь к рассмотрению неравенств (30.47):

$$\varphi''_{m,n} + Ke^{-\varepsilon\gamma_0 m} \leqslant \theta_m \leqslant \varphi'_{n,m} - Ke^{-\varepsilon\gamma_0 m} \; (m = n, n+1, n+2, \ldots,).$$

Полагая для сокращения

$$\left.\begin{aligned} \varphi'_{ms,\,ns} - 2\pi rm &= \overline{\varphi}'_{m,\,n}, \\ \varphi''_{ms,\,ns} - 2\pi rm &= \overline{\varphi}''_{m,\,n}, \\ \theta_{ms} - 2\pi rm &= \overline{\theta}_m, \end{aligned}\right\} \tag{30.73}$$

заменяя в (30.47) m и n соответственно на ms и ns и вычитая из всех частей неравенства $2\pi rm$, получаем следующие неравенства:

$$\begin{gathered} \overline{\varphi}''_{m,\,n} + Ke^{-\varepsilon\gamma_0 ms} \leqslant \overline{\theta}_m \leqslant \overline{\varphi}'_{m,\,n} - Ke^{-\varepsilon\gamma_0 ms} \\ (m = n, n+1, n+2, \ldots), \end{gathered} \tag{30.74}$$

причем, полагая в (30.45) $m = n$ и учитывая (30.73), находим:

$$\left.\begin{aligned} \overline{\varphi}'_{n,\,n} &= \overline{\theta}_n + Ke^{-\varepsilon\gamma_0 ns}, \\ \overline{\varphi}''_{n,\,n} &= \theta_n - Ke^{-\varepsilon\gamma_0 ns}. \end{aligned}\right\} \tag{30.75}$$

Если теперь для какого-либо фиксированного n при $m \to \infty$ последовательности

$$\bar{\varphi}'_{m,\,n},\ \bar{\varphi}''_{m,\,n} \tag{30.76}$$

стремятся к одному и тому же корню φ_0 уравнения (30.60), то из (30.74) следует, что

$$\bar{\theta}_m \to \varphi_0 \qquad \text{при } m \to \infty,$$

или учитывая третье обозначение (30.73), имеем:

$$\theta_{ms} - 2\pi r m \to \varphi_0,\quad m \to \infty,$$

что и доказывает наше утверждение.

Если же, наоборот, при любом n последовательности (30.76) при $m \to \infty$ стремятся к различным корням уравнения (30.60), то на основании леммы б) в интервалах

$$l_n = [\bar{\varphi}'_{n,\,n},\ \bar{\varphi}''_{n,\,n}]$$

всегда лежит, по крайней мере, один корень уравнения (30.60).

Легко доказать, однако, что при произвольном положительном k интервалы

$$l_{n+k} = [\bar{\varphi}'_{n+k,\,n+k},\ \bar{\varphi}''_{n+k,\,n+k}],\quad l_n = [\bar{\varphi}'_{n,\,n},\ \bar{\varphi}''_{n,\,n}]$$

имеют общую часть.

В самом деле, если бы эти интервалы не имели общей части, то выполнялось бы одно из следующих двух соотношений:

$$\bar{\varphi}'_{n+k,\,n+k} > \bar{\varphi}''_{n+k,\,n+k} > \bar{\varphi}'_{n,\,n} > \bar{\varphi}''_{n,\,n} \tag{30.77}$$

или

$$\bar{\varphi}'_{n+k,\,n+k} < \bar{\varphi}''_{n+k,\,n+k} < \bar{\varphi}'_{n,\,n} < \bar{\varphi}''_{n,\,n}. \tag{30.78}$$

Допустим сначала, что выполняется соотношение (30.77). Тогда, полагая в (30.74) $m = n + k$, имеем:

$$\bar{\varphi}'_{n+k,\,n} - Ke^{-\varepsilon\gamma_0 (n+k)s} \geqslant \bar{\theta}_{n+k} \geqslant \bar{\varphi}''_{n+k,\,n} + Ke^{-\varepsilon\gamma_0 (n+k)s}. \tag{30.79}$$

Учитывая (30.75), можем написать:

$$\bar{\theta}_{n+k} + Ke^{-\varepsilon\gamma_0 (n+k)s} = \bar{\varphi}'_{n+k,\,n+k},$$

и потому из (30.77) и (30.78) находим:

$$\bar{\varphi}'_{n+k,\,n} \geqslant \bar{\varphi}'_{n+k,\,n+k} > \bar{\varphi}''_{n+k,\,n+k} > \bar{\varphi}''_{n,\,n}. \tag{30.80}$$

Обозначим через α^*_{n+k} корень уравнения (30.60), лежащий в интервале $l_{n+k} = [\bar{\varphi}'_{n+k,\,n+k}, \bar{\varphi}''_{n+k,\,n+k}]$. На основании (30.80) этот корень α^*_{n+k} удовлетворяет также соотношению

$$\bar{\varphi}'_{n+k,\,n} > \alpha^*_{n+k} > \bar{\varphi}'_{n,\,n},$$

и таким образом, мы видим, что последовательность

$$\bar{\varphi}'_{n,\,n}, \bar{\varphi}'_{n+1,\,n}, \bar{\varphi}'_{n+2,\,n}, \ldots, \bar{\varphi}'_{n+k,\,n}$$

«перепрыгивает» через корень уравнения (30.60), что противоречит лемме а).

Аналогично доказывается невозможность неравенства (30.78).

Итак, интервалы

$$l_{n+k},\ l_n$$

имеют общие части. Так как, с другой стороны, согласно (30.75) длина интервала l_n равна $2Ke^{-\varepsilon\gamma_0 ns}$ и в каждом из этих интервалов находятся $\overline{\theta}_n$ и корни уравнения (30.60), то убеждаемся, что при $n \to \infty$

$$\overline{\theta}_n \to \varphi_0,$$

где φ_0 — корень уравнения (30.60), или согласно обозначению (30.73)

$$\theta_{ms} - 2\pi rm \to \varphi_0, \ m \to \infty,$$

что и требовалось доказать для случая рационального $\overline{\nu}$.

Резюмируем теперь полученные результаты в форме следующей теоремы.

Теорема III. Пусть для уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x) \tag{30.81}$$

выполняются условия а) и б) теоремы II § 29 (см. стр. 382), а также условие в) при $m = 2$.

Кроме того, пусть выполняется одно из следующих двух условий:

α) $X(t, x)$ — периодическая функция по t с периодом T равномерно по отношению к $x \in U_\rho$ или

β) в уравнениях (30.4) функции $W(t, \varphi, b)$, $B(t, \varphi, b)$ имеют вид:

$$W(t, \varphi, b) = \overline{W}(t, \varphi + \nu t, b),$$

$$B(t, \varphi, b) = \overline{B}(t, \varphi + \nu t, b),$$

причем функции $\overline{W}(t, \varphi, b)$, $\overline{B}(t, \varphi, b)$ обладают по отношению к t периодом T равномерно относительно φ, b.

Тогда можно указать такое достаточно малое положительное число ε' и положительное σ_0 ($\sigma_0 < \rho$), что при любом положительном $\varepsilon < \varepsilon'$ уравнение (30.81) имеет единственное интегральное многообразие S_t, лежащее для всех вещественных t в области U_σ, удовлетворяющее результатам 2) и 3) теоремы II, в которых следует положить $m = 2$.

Поведение решений

$$x = f(t, \theta),$$

где θ определяется из уравнения

$$\frac{d\theta}{dt} = \varepsilon F(t, \theta)$$

(причем $f(t, \theta)$ и $F(t, \theta)$ являются периодическими функциями по t с периодом T, не зависящим от θ), характеризуется числом $\overline{\nu}$ и может быть представлено в виде

$$x(t) = \Phi(\alpha_e t, \alpha_p t + \psi), \ \psi = \text{const},$$

где $\alpha_e = \frac{2\pi}{T}$ — («внешняя» частота), $\alpha_p = \frac{2\pi}{T}\overline{\nu}$ («собственная» частота), а $\Phi(\varphi, \psi)$ — непрерывная функция угловых переменных φ, ψ с периодом 2π.

Таким образом, если $\overline{\nu}$ иррационально, каждое из решений $x(t)$, лежащее на интегральном многообразии S_t, является квазипериодической функцией t с двумя основными частотами α_e и α_p; если $\overline{\nu}$ рационально, то на интегральном многообразии S_t существуют периодические решения с этими же основными частотами, и любое непериодическое решение, лежащее на интегральном многообразии S_t, приближается к одному из таких периодических решений при $t \to \infty$.

В случае выполнения условия α) имеет место неравенство

$$|\alpha_p - \varepsilon\omega| \leqslant \varepsilon\delta(\varepsilon), \quad \delta(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0;$$

в случае выполнения условия β) — неравенство

$$|\alpha_p - \nu - \varepsilon\omega| \leqslant \varepsilon\delta(\varepsilon), \quad \delta(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Пусть в дополнение к уже наложенным условиям все $n-1$ рассматриваемых характеристических показателей имеют отрицательные вещественные части.

Тогда любое решение уравнения (30.81), проходящее при $t=t_0$ через какую-либо точку области U_σ, приближается при $t\to\infty$ к одному из стационарных решений (к квазипериодическому решению в случае иррационального $\bar{\nu}$ или к периодическому решению в случае рационального $\bar{\nu}$).

Укажем в заключение ряд приложений теорем I, II, III к теории нелинейных колебаний в системах с одной степенью свободы.

Начнем с рассмотрения свободных колебаний, характеризуемых дифференциальным уравнением вида (1.1):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right),$$

с малым положительным параметром ε.

Тогда уравнение первого приближения для амплитуды колебаний будет (1.24):

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a),$$

причем на основании (1.27)

$$A_1(a) = -\frac{1}{2\pi\omega}\int\limits_0^{2\pi} f(a\cos\psi, \ -a\omega\sin\psi)\sin\psi\,d\psi.$$

Покажем теперь, что с помощью теоремы I и сделанного к ней примечания можно строго установить те результаты, относящиеся к свойствам периодичности и устойчивости, которые были получены в главе I для приближенных решений.

Для этого совершим в уравнении (1.1) замену переменных:

$$x = a\cos\psi,$$
$$\frac{dx}{dt} = -a\omega\sin\psi.$$

В результате получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{\omega} f(a\cos\psi, \ -a\omega\sin\psi)\sin\psi, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega - \frac{\varepsilon}{\omega a} f(a\cos\psi, \ -a\omega\sin\psi)\cos\psi, \end{aligned}\right\} \tag{30.82}$$

откуда

$$\frac{da}{d\psi} = -\frac{\varepsilon}{\omega^2}\,\frac{f(a\cos\psi, \ -a\omega\sin\psi)\sin\psi}{1-\dfrac{\varepsilon}{a\omega^2} f(a\cos\psi, \ -a\omega\sin\psi)\cos\psi}. \tag{30.83}$$

Таким образом, приходим к уравнению вида (26.1).

Соответствующее уравнение первого приближения (26.2) будет:

$$\frac{da}{d\psi} = -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega^2}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, \ -a\omega\sin\psi)\sin\psi\, d\psi,$$

т. е.

$$\frac{da}{d\psi} = \frac{\varepsilon}{\omega} A_1(a).$$

Пусть уравнение

$$A_1(a) = 0$$

имеет нетривиальное решение

$$a = a_0, \qquad a_0 \neq 0,$$

для которого

$$A_1'(a_0) \neq 0.$$

Предположим также, что функция $f(x, x')$ на плоскости (x, x') непрерывна со своими частными производными первого порядка в окрестности эллипса

$$x^2 + \frac{x'^2}{\omega^2} = a_0^2. \tag{30.84}$$

Тогда на основании упомянутой теоремы можем утверждать, что при достаточно малых ε точное уравнение (30.83) имеет периодическое решение

$$a = a_0(\psi)$$

с периодом 2π, близкое к a_0. Это решение будет устойчиво в случае

$$A_1'(a_0) < 0 \tag{30.85}$$

и обладает свойством притяжения близких решений.

В случае

$$A_1'(a_0) > 0 \tag{30.86}$$

оно неустойчиво и обладает свойством отталкивания.

Принимая во внимание сделанную замену переменных и второе из уравнений (30.82), видим, что рассматриваемое уравнение (1.1) имеет при достаточно малых ε предельный цикл, соответствующий периодическому решению, близкий к эллипсу (30.84). При условии (30.85) этот предельный цикл будет устойчивым, при условии (30.84) — неустойчивым.

Это как раз те выводы, которые были сделаны в излагавшейся ранее приближенной теории.

Перейдем теперь к исследованию колебательных систем, описываемых более общим уравнением (13.1):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right),$$

в котором $f\left(\theta, x, \frac{dx}{dt}\right)$ является периодической функцией θ с периодом 2π.

Рассмотрим сначала случай резонанса, когда

$$\omega^2 = \left(\frac{p}{q}\nu\right)^2 + \varepsilon\Delta,$$

где p, q — взаимно простые числа.

Соответствующие уравнения первого приближения будут:

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a, \vartheta), \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \varepsilon B_1(a, \vartheta), \tag{30.87}$$

где в силу (13.14), (14.23) имеем:

$$\left.\begin{aligned} A_1(a, \vartheta) &= -\frac{1}{2\pi p}\int\limits_0^{\frac{2\pi q}{\nu}} f_0\left(a, \nu t, \frac{p}{q}\nu t + \vartheta\right)\sin\left(\frac{p}{q}\nu t + \vartheta\right) dt, \\ B_1(a, \vartheta) &= \frac{\Delta q}{2p\nu} - \frac{1}{2\pi p a}\int\limits_0^{\frac{2\pi q}{\nu}} f_0\left(a, \nu t, \frac{p}{q}\nu t + \vartheta\right)\cos\left(\frac{p}{q}\nu t + \vartheta\right) dt. \end{aligned}\right\} \tag{30.88}$$

Чтобы воспользоваться нашими теоремами, совершим в основном уравнении (13.1) замену переменных:

$$x = \xi\cos\frac{p}{q}\nu t + \eta\sin\frac{p}{q}\nu t, \quad \frac{dx}{dt} = -\xi\frac{p}{q}\nu\sin\frac{p}{q}\nu t + \eta\frac{p}{q}\nu\cos\frac{p}{q}\nu t, \tag{30.89}$$

приведя его к системе в стандартной форме:

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X(t, \xi, \eta), \quad \frac{d\eta}{dt} = \varepsilon Y(t, \xi, \eta), \tag{30.90}$$

где

$$X(t, \xi, \eta) = -\frac{F(t, \xi, \eta)\sin\frac{p}{q}\nu t}{\frac{p}{q}\nu}, \qquad Y(t, \xi, \eta) = \frac{F(t, \xi, \eta)\cos\frac{p}{q}\nu t}{\frac{p}{q}\nu},$$

$$\begin{aligned} F(t, \xi, \eta) = f\Big(\nu t,\ \xi\cos\frac{p}{q}\nu t + \eta\sin\frac{p}{q}\nu t,\ -\xi\frac{p}{q}\nu\sin\frac{p}{q}\nu t + \eta\frac{p}{q}\nu\cos\frac{p}{q}\nu t\Big) - \\ - \Delta\left(\xi\cos\frac{p}{q}\nu t + \eta\sin\frac{p}{q}\nu t\right). \end{aligned}$$

Как видно, правые части уравнений (30.87) являются периодическими функциями t с периодом $\frac{2\pi q}{\nu}$.

Заметим также, что уравнения первого приближения, соответствующие системе (30.90):

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon\frac{\nu}{2\pi q}\int\limits_0^{\frac{2\pi q}{\nu}} X(t, \xi, \eta)\, dt,$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \varepsilon\frac{\nu}{2\pi q}\int\limits_0^{\frac{2\pi q}{\nu}} Y(t, \xi, \eta)\, dt,$$

эквивалентны уравнениям (30.87) и переходят в них посредством замены

$$\xi = a\cos\vartheta, \quad \eta = -a\sin\vartheta.$$

Предположим, что уравнения (30.87) имеют постоянное решение

$$a = a_0, \quad \vartheta = \vartheta_0 \tag{30.91}$$

и что в окрестности эллипса

$$x^2 + \frac{x'^2}{\left(\frac{p}{q}\nu\right)^2} = a_0^2 \tag{30.92}$$

функция $f(t, x, x')$ непрерывна со своими частными производными первого порядка по x, x'.

Пусть, далее, оба корня характеристического уравнения, соответствующего уравнениям в вариациях для решения (30.81), имеют отрицательные вещественные части.

Тогда, очевидно, условия теоремы I выполнены.

Принимая во внимание установленные в ней свойства, можем утверждать, что в рассматриваемом случае, при достаточно малых ε уравнение (13.1) имеет периодическое решение с периодом $\frac{2\pi q}{\nu}$, близкое к гармоническому

$$a_0\cos\left(\frac{p}{q}\nu t + \varphi_0\right).$$

Любое решение, проходящее через точку некоторой окрестности эллипса (30.92), будет асимптотически приближаться к периодическому решению при $t \to +\infty$.

Пусть теперь уравнения первого приближения имеют периодическое решение с характеристическим показателем, вещественная часть которого отлична от нуля, и пусть функция $f(t, x, x')$ в некоторой окрестности орбиты этого решения обладает непрерывными частными производными по x, x' до второго порядка включительно.

В этом случае условия теоремы II и теоремы III (с условием а)) выполнены.

Поэтому можем утверждать, например, что при достаточно малых ε в некоторой окрестности указанной орбиты имеются стационарные решения, обладающие двумя основными частотами: «собственной» и «вынужденной». При иррациональном отношении этих частот стационарные решения квазипериодичны, при рациональном — периодичны.

В случае, когда вещественная часть характеристического показателя положительна, стационарные решения неустойчивы. Если, наоборот, эта вещественная часть отрицательна, всякое решение уравнения (13.1), для которого при каком-либо t_0 точка

$$\xi(t) = x(t)\cos\frac{p}{q}\nu t - \frac{x'(t)}{\frac{p}{q}\nu}\sin\frac{p}{q}\nu t,$$

$$\eta(t) = x(t)\sin\frac{p}{q}\nu t + \frac{y'(t)}{\frac{p}{q}\nu}\cos\frac{p}{q}\nu t$$

лежит достаточно близко около указанной орбиты, асимптотически приближается к стационарному для $t \to +\infty$.

Перейдем теперь к рассмотрению нерезонансного случая, когда уравнения первого приближения имеют вид

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a), \qquad \frac{d\psi}{dt} = \omega + \varepsilon B_1(a), \tag{30.93}$$

где $A_1(a)$ $B_1(a)$ определяются формулами (13.15), (13.35):

$$A_1(a) = -\frac{1}{4\pi^2\omega}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta,\ a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi)\sin\psi\, d\psi\, d\theta,$$

$$B_1(a) = -\frac{1}{4\pi^2\omega a}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta,\ a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi)\cos\psi\, d\psi\, d\theta.$$

Для удобства применения теорем II, III совершим в уравнении (13.1) замену переменных:

$$x = a\cos(\omega t + \varphi), \qquad \frac{dx}{dt} = -a\omega\sin(\omega t + \varphi).$$

Получим уравнения в стандартной форме:

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A(\nu t,\ \omega t + \varphi,\ a), \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon B(\nu t,\ \omega t + \varphi,\ a), \tag{30.94}$$

где

$$A(\theta,\ \psi,\ a) = -\frac{1}{\omega} f(\theta,\ a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi)\sin\psi,$$

$$B(\theta,\ \psi,\ a) = -\frac{1}{\omega a} f(\theta,\ a\cos\psi,\ -a\omega\sin\varphi)\cos\psi.$$

Правые части этих уравнений являются, как видно, квазипериодическими функциями t с двумя основными частотами — ω и ν.

Если отношение этих частот иррационально, имеем:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T A(\nu t,\ \omega t + \varphi,\ a)\,dt &= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} A(\theta,\ \psi,\ a)\,d\theta\,d\psi = A_1(a), \\ \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T B(\nu t,\ \omega t + \varphi,\ a)\,dt &= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} B(\theta,\ \psi,\ a)\,d\theta\,d\psi = B_1(a). \end{aligned}\right\} \tag{30.95}$$

Заметим, что эти равенства могут выполняться не только при иррациональном значении отношения $\frac{\omega}{\nu}$.

Возьмем, например, случай, рассматривавшийся в главе III, когда $f(\nu t,\ x,\ x')$ представляется конечной суммой вида

$$\sum_{-N}^{N} e^{in\nu t} f_n(x,\ x'),$$

в которой $f_n(x,\ x')$ — полиномы по отношению к $x,\ x'$.

Как легко видеть, в этом случае можно указать конечную совокупность рациональных чисел таким образом, что если $\frac{\omega}{\nu}$ не равно одному из чисел этой совокупности, то равенства (30.95) выполняются.

Пусть так или иначе справедливость этих равенств обеспечена.

Тогда уравнения (30.93) оказываются уравнениями первого приближения (усредненными уравнениями) для системы (30.94).

Предположим, что уравнение

$$A_1(a) = 0$$

имеет нетривиальное решение:

$$a = a_0 \neq 0,$$

для которого

$$A_1'(a) \neq 0.$$

Предположим также, что функция $f(\theta, x, x')$ обладает непрерывными частными производными по x, x' до второго порядка включительно в некоторой окрестности эллипса

$$x^2 + \frac{x'^2}{\omega^2} = a_0^2.$$

В таком случае, как видно, выполнены условия теоремы II и теоремы III (условие) б)).

Следовательно, можем утверждать, что для достаточно малых значений ε уравнение (13.1) действительно имеет стационарные решения с амплитудой, близкой к a_0, которые как функции t обладают двумя основными частотами — собственной и вынужденной.

При

$$A_1'(a_0) > 0$$

семейство стационарных решений обладает свойством отталкивания, а при

$$A_1'(a_0) < 0$$

— свойством притяжения близких решений.

Интересно отметить, что наложенные условия, обеспечивающие возможность применения теорем II, III, являются настолько общими, что при их выполнении даже ряд (13.46), входящий в улучшенное первое приближение, может оказаться расходящимся*).

Мы рассмотрели вопросы об установлении свойств точных решений по свойствам решений уравнений первого приближения.

В ряде случаев, однако, может представить интерес использование для этой цели уравнений более высокого приближения.

Так, например, вещественные части характеристических показателей могут обратиться в нуль для уравнений первого приближения.

Может также возникнуть вопрос о теоретической оценке погрешности для асимптотического приближения высшего порядка.

Для таких случаев нетрудно обобщить методику изложенную в § 29, например, с помощью использования выражений улучшенного m-го приближения как формул замены переменных. Тогда придем к системе типа (27.105), в которой «дополнительные члены» P, Q будут уже величинами порядка малости ε^{m+1}, что, разумеется, соответственно повышает порядок полученных оценок.

Естественно, что такое рассмотрение требует наложения более жестких условий на характер регулярности функций, входящих в исследуемые дифференциальные уравнения.

*) Из-за наличия «малых делителей» вида $\omega^2 - (n\alpha + m\omega)^2$.