

ВВЕДЕНИЕ

1. Изучение колебательных процессов имеет основное значение для самых разнообразных разделов механики, физики и техники. Вибрации сооружений и машин, электромагнитные колебания в радиотехнике и оптике, автоколебания в системах регулирования и следящих системах, звуковые и ультразвуковые колебания — все эти, казалось бы, различные и непохожие друг на друга колебательные процессы объединяются методами математической физики в одно общее учение о колебаниях.

Следует заметить, что с развитием науки и техники быстро возрастает и роль учения о колебаниях. Не говоря о таких дисциплинах, как радиотехника и акустика, которые полностью «окупированы» учением о колебаниях, возьмем, например, хотя бы машиностроение. Еще не так давно изучению колебаний здесь не придавалось особого значения, и расчеты на прочность велись на основе статических представлений о зависимости деформаций от нагрузок. Однако вместе со стремлением к увеличению числа оборотов и уменьшению габаритов при переходе к скоростному машиностроению пренебрегать ролью колебаний и здесь стало уже невозможно. Многочисленные аварии, связанные с увеличением фактических нагрузок из-за возбуждения колебаний, сделали необходимым для конструкторов и инженеров тщательное исследование возможных вибраций узлов машины и оценку их интенсивности.

Истоки современного учения о колебаниях мы можем ясно заметить в классической механике времен Галилея, Гюйгенса, Ньютона в задаче о движении маятника. В трудах Лагранжа имеется уже сформировавшаяся теория малых колебаний. При дальнейшем развитии она получила название теории линейных колебаний, т. е. колебаний, характеризуемых линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами как однородными, так и со свободными членами, являющимися известными функциями времени.

В трудах ряда ученых линейные дифференциальные уравнения стали мощным орудием исследования. Так, А. Н. Крылов и его ученики, развивавшие теорию линейных колебаний, с успехом применяли ее к решению проблемы о качке корабля, к теории гироскопа, к задачам артиллерии.

Простота основных принципов теории линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами обусловила большую работанность теории линейных колебаний, общность формулировок ее законов и их физическую наглядность. Такие основные понятия этой теории, как собственная частота, декремент затухания, резонанс, нормальные вибраторы и т. д., приобрели самую широкую популярность и явились незаменимым средством исследований почти во всех разделах физики и техники. Свойство линейности дифференциальных операторов, интерпретируемое как принцип суперпозиции колебаний, факт перехода гармонических функций времени при применении этих операторов в гармонические же функции с той же частотой позволили сводить исследование влияния

произвольных приложенных сил на линейную колебательную систему к исследованию влияния сил простейшего типа, гармонически зависящих от времени. Тем самым выработался «спектральный» подход к колебательным процессам, получивший громадное значение и вне теории колебаний в собственном смысле.

Техника расчета конкретных линейных колебательных систем при стимулирующем влиянии электротехники обогатилась созданием так называемого символического метода и его различных вариантов, например метода комплексных амплитуд. Основная его идея состоит в том, что, поскольку оператор дифференцирования в комбинациях с постоянными коэффициентами подчиняется таким же законам дистрибутивности, ассоциативности, коммутативности, как и обычные числа, то можно заменить оператор дифференцирования по времени некоторым символом и формально привести систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами к линейным алгебраическим уравнениям. Решая их, мы получаем «символическое решение», которое надлежит затем раскрыть, пользуясь определенной рецептурой.

В случае колебательных систем с бесконечным числом степеней свободы (или, как говорят еще, с распределенными параметрами), описываемых уравнениями в частных производных, где, кроме дифференцирования по времени, содержится также дифференцирование и по другим независимым переменным, символический метод приводит к уравнениям с меньшим числом переменных, что уже представляет весьма существенное упрощение.

После основополагающих работ Хевисайда символический метод стал с успехом применяться главным образом в электротехнике для решения многочисленных задач. Однако он долгое время вызывал сомнения со стороны математиков в отношении его законности и обоснованности. Лишь с 20-х годов настоящего столетия, после работ Карсона, Дейча, Бромвича и др., математическая сторона символического метода начала существенно проясняться, связываясь с преобразованиями Лапласа и мощными методами теории функций комплексного переменного.

Вопросам теории и приложения символических методов в настоящее время посвящена обширная литература.

В Советском Союзе работы в области символического метода проводились А. М. Эфросом и А. М. Данилевским, Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым, А. И. Лурье и др.

Ввиду того, что теория линейных колебаний по указанным выше причинам разработана весьма детально и ее математический аппарат действует, можно сказать, почти автоматически, исследователи стремились изучаемые ими колебательные процессы по возможности подводить под линейные схемы, отбрасывая часто без должного обоснования нелинейные члены. При этом иногда совершенно упускалось из виду, что такая «линейная» трактовка может привести к существенным ошибкам не только количественного, но и принципиально качественного характера.

На первом этапе развития учения о колебаниях лишь в отдельных случаях не пользовались линеаризацией и рассматривали нелинейные колебания как таковые (Остроградский, Гельмгольц, Рэлей). Вместе с тем следует подчеркнуть, что уже в прошлом столетии существовал математический аппарат, который при надлежащем развитии и обобщении мог бы быть применен для исследования нелинейных колебаний, во всяком случае для колебаний, достаточно близких к линейным. Достаточно близкими к линейным называются обычно колебания, для которых соответствующие

дифференциальные уравнения хотя и являются нелинейными, но содержат некоторый параметр ε , входящий в эти уравнения так, что при нулевом значении ε они вырождаются в линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. При этом предполагается, что параметр ε является «малым», т. е. может принимать лишь достаточно малые по абсолютной величине значения. Говоря о таком математическом аппарате, мы имеем в виду прежде всего теорию возмущений, разработанную астрономами для изучения движения планет. Здесь также приходится иметь дело с изучением движений, описываемых дифференциальными уравнениями, содержащими малый параметр. При его нулевом значении они вырождаются в уравнения, интегрируемые элементарными приемами, обычно в уравнения «задачи двух тел». Такого рода задачи, в частности знаменитая «задача трех тел», рассматривались уже при самом возникновении небесной механики, причем быстро выяснилась существенная трудность, состоящая в невозможности использования обычных разложений по степеням малого параметра для получения результатов, пригодных для изучения движения за достаточно длительный промежуток времени.

Дело в том, что обычные разложения по степеням малого параметра приводят для искомых величин, характеризующих движение, к приближенным формулам, где наряду с членами, гармонически зависящими от времени, присутствуют еще так называемые секулярные члены типа

$$t^m \sin at, \quad t^m \cos at, \quad (1)$$

в которых время t входит вне знака синуса или косинуса. Вследствие того, что интенсивность секулярных членов быстро возрастает вместе с t , даже без детального анализа погрешности ясно, что область применимости полученных приближенных формул ограничена слишком коротким интервалом времени.

Эту трудность можно полностью проиллюстрировать на тривиальном примере затухающего движения, описываемого уравнением

$$\frac{dx}{dt} = -\varepsilon x \quad (2)$$

с малым положительным параметром ε . Решение этого уравнения есть

$$x = Ce^{-\varepsilon t}. \quad (3)$$

Но если бы мы применили для решения данного уравнения обычный метод разложения по степеням ε , то получили бы

$$x = C \left(1 - \varepsilon t + \frac{\varepsilon^2 t^2}{2} - \dots \right). \quad (4)$$

Остановившись здесь на одном, двух, трех членах, т. е. рассматривая формулы первого, второго и т. д. приближений, мы не сможем заметить по ним, что наша величина затухает при возрастании t , поскольку эти формулы будут применимы, лишь пока $t \ll \frac{1}{\varepsilon}$, а за это время x не успеет заметно измениться.

Указанное свойство обычных разложений по степеням малого параметра легко также выявляется при рассмотрении метода, предложенного Пуассоном при исследовании задачи о колебаниях маятника.

Метод Пуассона сводится к следующему: пусть требуется найти решение упомянутого нелинейного уравнения, содержащего малый пара-

метр ε , которое мы можем представить в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right). \quad (5)$$

Тогда решение, удовлетворяющее уравнению с точностью до величин порядка малости ε^{n+1} , ищут в виде ряда

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots + \varepsilon^n x_n. \quad (6)$$

Подставляя ряд (6) в левую часть уравнения (5), разлагают результат подстановки по степеням ε , причем отбрасывают члены, содержащие ε в степени выше n -й. После этого приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях параметра ε .

Таким образом, получают систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x_0}{dt^2} + \omega^2x_0 &= 0, \\ \frac{d^2x_1}{dt^2} + \omega^2x_1 &= f\left(x_0, \frac{dx_0}{dt}\right), \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} + \omega^2x_2 &= f'_x\left(x_0, \frac{dx_0}{dt}\right)x_1 + f'_{x'}\left(x_0, \frac{dx_0}{dt}\right)x'_1, \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Легко убедиться, однако, что применение изложенного метода приводит к появлению в решении вышеупомянутых секулярных членов.

Действительно, рассмотрим конкретное уравнение

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \alpha x + \gamma x^3 = 0, \quad \alpha > 0, \quad \gamma > 0, \quad (8)$$

которое может быть интерпретировано как уравнение незатухающих колебаний некоторой массы m , притягиваемой к положению равновесия восстанавливающей упругой силой:

$$p(x) = \alpha x + \gamma x^3. \quad (9)$$

Предположим, что характеристика восстанавливающей силы $p(x)$ близка к линейной.

Тогда, обозначая $\frac{\alpha}{m} = \omega^2$, $\frac{\gamma}{m} = \varepsilon$, образуем приближенное решение с точностью до величин второго порядка малости.

Имеем:

$$x = x_0 + \varepsilon x_1, \quad (10)$$

причем

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} + \omega^2x_0 = 0, \quad (11)$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \omega^2x_1 = -x_0^3. \quad (12)$$

Из уравнения (11) находим:

$$x_0 = a \cos(\omega t + \theta), \quad (13)$$

и, подставляя в правую часть (12), получаем:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \omega^2x_1 = -\frac{3}{4}a^3 \cos(\omega t + \theta) - \frac{1}{4}a^3 \cos 3(\omega t + \theta). \quad (14)$$

Отсюда находим для x_1 следующее значение:

$$x_1 = -\frac{3}{8\omega} ta^3 \sin(\omega t + \theta) + \frac{a^3}{32\omega^2} \cos 3(\omega t + \theta). \quad (15)$$

Подставляя (13) и (15) в (10), получаем искомое решение в виде

$$x = a \cos(\omega t + \theta) - \frac{3\varepsilon}{8\omega} a^3 t \sin(\omega t + \theta) + \frac{\varepsilon a^3}{32\omega^2} \cos 3(\omega t + \theta). \quad (16)$$

В найденном приближенном решении имеется секулярный член

$$-\frac{3\varepsilon}{8\omega} a^3 t \sin(\omega t + \theta),$$

и потому колебания, представляемые формулой (16), должны раскачиваться, а амплитуда их при неограниченном возрастании t должна неограниченно возрастать, что находится в явном противоречии с характером точного решения уравнения (8), которое, как известно, выражается через эллиптические функции и имеет следующий вид:

$$x = x_{\max} \operatorname{cn} \left\{ \frac{2K}{\pi} \psi \right\}, \quad (17)$$

где cn , K обозначают соответственно эллиптический косинус и полный эллиптический интеграл первого рода.

Несоответствие решения (16) действительности подтверждается еще следующим фактом.

Если умножить уравнение (8) на $\frac{dx}{dt}$ и проинтегрировать, то легко найдем первый интеграл — интеграл живых сил

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \alpha x^2 + \frac{\gamma}{4} x^4 = E, \quad (18)$$

выражающий закон сохранения энергии.

Из (18) следует, что при $\alpha > 0$, $\gamma > 0$ x^2 не может быть больше чем $\frac{2E}{\alpha}$, и, следовательно, амплитуда колебаний не может неограниченно увеличиваться.

Анализируя приведенные простые примеры, мы убеждаемся в том, что изложенный способ получения приближенных решений с помощью разложения x в ряд по степеням малого параметра ε пригоден только для очень малого интервала времени.

Ряд (16) из-за присутствия секулярных членов не пригоден не только для количественного, но также и для качественного анализа поведения решения уравнения (8) на всей действительной оси, даже в случае, если ряд (16) сходится [см., например, первый пример — уравнение (2)].

Заметим еще раз, что наличие в разложении (16) секулярных членов ни в коем случае не означает, что уравнение (8) вообще не имеет периодических решений. Это свидетельствует только о несоответствующем выборе разложения.

Проиллюстрируем сказанное следующим простым примером. Рассмотрим функцию

$$\sin(\omega + \varepsilon)t, \quad (19)$$

которая имеет период $\frac{2\pi}{\omega + \varepsilon}$; при малых ε и любых ω и t мы можем ее разложить в ряд

$$\sin(\omega + \varepsilon)t = \sin \omega t + \varepsilon t \cos \omega t - \frac{\varepsilon^2 t^2}{2!} \sin \omega t - \frac{\varepsilon^3 t^3}{3!} \cos \omega t + \dots \quad (20)$$

Рассматривая правую часть (20), трудно установить ее периодичность ввиду наличия секулярных членов.

Совершенно такой же характер имеет и упомянутая трудность вековых членов в теории возмущений. Для ее преодоления после трудов Лагранжа и Лапласа был предложен ряд эффективных методов. Правда, степенные ряды по степеням малого параметра, к которым они приводят, являются, как правило, расходящимися, но тем не менее приближенные формулы, получаемые здесь, если ограничиться некоторым фиксированным числом членов $m=1, 2, 3, \dots$, оказываются весьма пригодными для практических расчетов. Дело в том, что ряды эти являются асимптотическими в том смысле, что погрешность m -го приближения пропорциональна $(m+1)$ -й степени малого параметра ε . Поэтому для фиксированного $m=1, 2, 3, \dots$ погрешность будет сколь угодно мала при достаточно малых значениях ε . Разумеется, увеличивая неограниченно m , мы не получим вообще сходимости при $m \rightarrow \infty$, но ее отсутствие несущественно для практических расчетов, поскольку на практике определение коэффициентов при последующих степенях ε столь быстро усложняется, что фактически могут быть использованы приближения лишь первого, второго, вообще очень невысокого порядка, а их применимость всецело обуславливается свойством асимптотичности.

Упомянутые асимптотические методы оказались весьма эффективными в небесной механике и были затем перенесены в квантовую механику. Следует, однако, подчеркнуть, что эти методы были разработаны специально для консервативных динамических систем, описываемых каноническими уравнениями, и не могли быть без принципиального обобщения применены для изучения большинства рассматривавшихся нелинейных колебательных систем, поскольку эти последние являются неконсервативными, содержа источники как притока энергии, так и ее поглощения.

Кроме аппарата теории возмущений, был разработан математический аппарат, не связанный специально с консервативными системами. Здесь прежде всего следует указать на теорию линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, созданную А. М. Ляпуновым, и на локальную теорию периодических решений Ляпунова — Пуанкаре. В этой последней рассматриваются общие нелинейные дифференциальные системы, содержащие малый параметр ε , таким образом, что при $\varepsilon=0$ они обладают периодическими решениями, и устанавливаются явные критерии существования и устойчивости периодических решений при достаточно малых значениях $\varepsilon \neq 0$. Методы Ляпунова и Пуанкаре имеют перед обычными методами, теории возмущений то существенное преимущество, что являются методами, строго обоснованными, пригодными не только для количественного, но также и для качественного исследования.

Хотя, как видно из сказанного, математический аппарат, который можно было бы применить для изучения нелинейных колебаний, уже существовал, он не был, однако, систематически использован в этой области примерно до начала 30-х годов настоящего столетия. Не была также раскрыта его глубокая внутренняя связь с проблемами нелинейных колебаний.

Впервые методы Ляпунова — Пуанкаре были применены к систематическому исследованию нелинейных колебаний, начиная с 1929 г., советской школой физиков, связанной с именами Л. И. Мандельштама, Н. Д. Папалекси, А. А. Андропова, А. А. Витта.

Здесь следует отметить, что сами нелинейные колебания приобрели особую актуальность и стали вызывать к себе усиленный интерес лишь

с 20-х годов в связи с быстрым развитием радиотехники после появления электронной лампы. Такие проблемы, как проблема устойчивой генерации незатухающих колебаний, трансформации частоты, принудительной синхронизации, модуляции и т. д., могли быть решены лишь с помощью введения в колебательные системы нелинейных элементов, поскольку в чисто линейных колебательных системах не могут существовать установившиеся колебательные режимы, не зависящие от начальных условий; при действии внешних гармонических сил с некоторой частотой ω возбуждаются вынужденные колебания лишь с той же частотой ω и т. п. Электронные лампы оказались чрезвычайно гибким и удобным средством для создания соответствующих нелинейных элементов.

Только после появления многочисленных исследований, связанных с проблемами упомянутого типа, стало физически ясным то глубокое, принципиальное отличие механики нелинейных колебаний от механики линейных колебаний, которое полностью сохраняется даже при рассмотрении слабо нелинейных колебаний, описываемых дифференциальными уравнениями, отличающимися от линейных с постоянными коэффициентами лишь наличием весьма малых членов.

Представим себе, что система настолько близка к линейной, что колебания в течение одного периода имеют форму, весьма близкую к гармонической. Однако если рассматривать эти колебания на большом интервале времени по сравнению с периодом колебания, то уже существенно будет проявляться влияние даже малых отклонений системы от линейной, выражающееся в наличии малых нелинейных членов в дифференциальных уравнениях.

Так, например, в системе могут присутствовать источники и поглотители энергии, которые производят и поглощают весьма малую работу за один период колебаний, но при длительном их действии эффект, производимый ими, может накапливаться и оказывать существенное влияние на протекание колебательного процесса, на его затухание, раскачивание и устойчивость. Аналогично нелинейность квазиупругой силы будет при длительном воздействии оказывать влияние на фазу колебаний и т. п.

Таким образом, малые нелинейные члены могут оказывать как бы коммулятивное действие.

Подчеркнем еще, что из-за нелинейности нарушается принцип суперпозиции, и отдельные гармоники колебаний вступают во взаимодействие между собой, вследствие чего делается невозможным индивидуальное рассмотрение поведения каждого гармонического слагающего колебаний в отдельности.

Совершенно естественно, что наиболее доступными для исследования являются колебательные системы с малой нелинейностью, поскольку к ним в той или иной форме можно применять методы теории возмущений.

Исследование же системы с большой нелинейностью является с математической точки зрения весьма трудной проблемой, требующей индивидуального подхода в каждом конкретном случае.

Более или менее исследованными, и то лишь с качественной стороны, являются колебательные системы с одной степенью свободы, находящиеся под воздействием сил, не зависящих от времени.

Для систем же, слабо нелинейных, описываемых упоминавшимися ранее дифференциальными уравнениями с малым параметром при нелинейных членах, имеется теперь уже ряд достаточно общих методов, применимых ко многим типичным классам колебательных систем, часто встречающимся на практике.

Одним из первых таких методов явился метод Ван-дер-Поля. В своих исследованиях Ван-дер-Поль рассматривал главным образом уравнения вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \quad (21)$$

с малым положительным параметром ε . При этом обычно полагалось (уравнение Ван-дер-Поля):

$$f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = (1 - x^2) \frac{dx}{dt}. \quad (22)$$

При известной схематизации это уравнение, во всяком случае с качественной стороны, правильно описывает процессы самовозбуждающихся колебаний в электронных генераторах.

Для получения первого приближения Ван-дер-Поль предложил особый метод «медленно меняющихся» коэффициентов, аналогичный одному из методов, применявшихся еще Лагранжем в небесной механике, а именно: он представил истинное решение в виде функции, выражающей гармонические колебания

$$x = a \cos(\omega t + \varphi) \quad (23)$$

с медленно меняющимися амплитудой a и фазой φ . Эти последние величины должны находиться из дифференциальных уравнений с разделенными переменными

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A(a), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon B(a), \quad (24)$$

где $A(a)$, $B(a)$ — некоторые функции амплитуды, просто определяемые через заданное выражение $f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$. С помощью своего метода Ван-дер-Поль получил ряд важных результатов. Так, например, им были исследованы процесс установления колебаний, стационарные режимы, колебательный гистерезис и т. д.

Следует, однако, подчеркнуть, что в данной Ван-дер-Полем формулировке приближение выводилось с помощью чисто интуитивных рассуждений, и, хотя приближение это оказалось плодотворным в первый период работ в области нелинейной механики, оно не могло полностью удовлетворить запросам практики. Кроме того, оставались неясными вопросы его теоретического обоснования, пределов применимости и получения высших приближений.

Основной целью настоящей книги является изложение асимптотических методов нелинейной механики, разработанных Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым. Для исследования систем с медленно меняющимися параметрами изложен метод Ю. А. Митропольского. Главное внимание уделено слабо нелинейным системам с одной степенью свободы.

В конце книги некоторые из этих методов распространяются на более общие случаи.

Как мы уже говорили, системы изучаемого нами вида весьма часто встречаются на практике.

Рассмотрим поэтому ряд типичных примеров таких систем. В дальнейшем этими примерами мы будем пользоваться для иллюстрации излагаемых нами методов.

2. Наиболее простым примером нелинейной колебательной системы является обычный математический маятник (рис. 1). Если пренебречь трением, то уравнение, описывающее колебания маятника, имеет вид

$$ml^2 \frac{d^2x}{dt^2} + mgl \sin x = 0, \quad (25)$$

где m — масса маятника, l — длина, g — ускорение силы тяжести, x — угол отклонения от вертикального положения.

Для малых углов отклонения $\sin x$ с достаточной степенью точности можно заменить через x . В этом случае уравнение (25) может быть приведено к виду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l} x = 0. \quad (26)$$

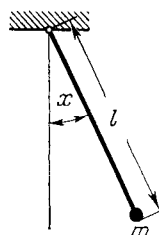


Рис. 1.

Уравнение (26) является уравнением гармонических колебаний, причем последние будут изохронными, т. е. период их $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ не будет зависеть от начальной скорости и отклонения.

Однако для больших отклонений маятника уравнение (26) является неточным. В случае, если отклонения не превышают углов порядка одного радиана, то $\sin x$ в уравнении (25) с достаточной степенью точности может быть заменен первыми двумя членами разложения в ряд

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots \quad (27)$$

Тогда уравнение (25) примет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l} \left(x - \frac{x^3}{6} \right) = 0. \quad (28)$$

Очевидно, как это будет подробно показано ниже, колебания в этом случае уже не будут являться изохронными, и частота их будет зависеть от амплитуды колебания:

$$\omega = \omega(a).$$

Рис. 2.

Рассмотрим также колебания некоторого груза массы m , подвешенного на пружине (рис. 2). Пусть $f(x)$ — сила, которую создает пружина, растянутая на длину x по отношению к состоянию покоя. В этом случае жесткость пружины для смещения x может быть определена как $f'(x)$. Пренебрегая опять-таки силой трения, имеем уравнение движения

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + f(x) = 0. \quad (29)$$

Если жесткость пружины возрастает с увеличением смещения, то, как принято говорить, пружина имеет жесткую характеристику нелинейной восстанавливающей силы (рис. 3). Если жесткость уменьшается с увеличением смещения, то пружина имеет мягкую характеристику (рис. 4). Очевидно, что колебания груза на пружине, описываемые уравнением (29), тоже не изохронны ввиду того, что период колебания будет уменьшаться при увеличении жесткости, а эффективная жесткость

в данном случае растет с амплитудой. Аналогично в случае мягкой характеристики период будет увеличиваться.

Например, в уравнении (28) восстанавливающая сила $f(x) = mgl\left(x - \frac{x^3}{6}\right)$ обладает мягкой характеристикой и, следовательно, период колебаний будет возрастать с увеличением амплитуды.

Приведем теперь пример нелинейной электрической колебательной системы.

Для этого рассмотрим колебательный контур, состоящий из самоиндукции L , железного сердечника и емкости C (рис. 5). Пусть

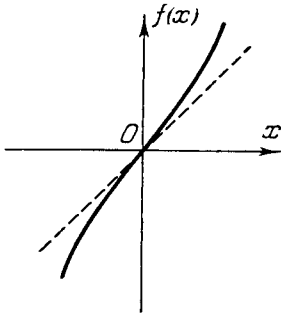


Рис. 3.

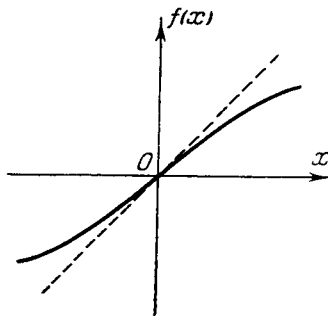


Рис. 4.

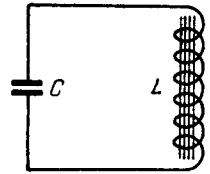


Рис. 5.

Φ — магнитный поток, проходящий сквозь катушку. Тогда уравнение для рассматриваемого контура можно написать в виде

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \frac{i}{C} = 0, \quad (30)$$

где i — сила тока. Для определения зависимости между силой тока и индуцируемым потоком в катушке при наличии железного сердечника воспользуемся следующей общепринятой формулой:

$$i = a\Phi - b\Phi^3, \quad (31)$$

где $a > 0$, $b > 0$.

Тогда, подставляя (31) в (30), получим следующее нелинейное уравнение:

$$\frac{d^3\Phi}{dt^3} + \frac{1}{C}(a\Phi - b\Phi^3) = 0, \quad (32)$$

для которого восстанавливающая сила также имеет мягкую характеристику.

В рассмотренных выше колебательных системах не принимались во внимание силы трения, вызывающие затухание собственных колебаний.

Как известно, законы механического трения, вообще говоря, весьма слабо исследованы.

На практике обычно пользуются следующими законами трения:

1) Сила трения пропорциональна скорости (при колебаниях в воздухе с небольшими скоростями).

2) Сила трения пропорциональна квадрату скорости (при колебаниях в жидкой среде или в воздухе, но при больших скоростях).

3) Сила трения постоянна по величине, не зависит от скорости и действует в направлении, противоположном скорости, — кулоновское трение.

4) Внутреннее трение, зависящее от потерь в материале при колебаниях (в пружине, в нити маятника и т. д.). В этом случае сила трения обычно выражается в виде более сложных зависимостей от смещения или скорости.

Так, например, рассматривая маятник, свободно качающийся в воздухе, и предполагая, что сила трения пропорциональна скорости, получим уравнение колебаний в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + \frac{g}{l} \sin x = 0, \quad (33)$$

где λ — коэффициент пропорциональности, обычно называемый коэффициентом затухания.

Если тело, подвешенное на пружине с восстанавливающей силой $f(x)$, погрузить в жидкость, то, предполагая, что сила трения пропорциональна квадрату скорости, получим следующее уравнение:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} \pm \alpha \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + f(x) = 0; \quad (34)$$

здесь α — коэффициент затухания, и, кроме того, знак «+» следует брать при $\frac{dx}{dt} > 0$, а знак «-» — при $\frac{dx}{dt} < 0$, так как сила трения всегда направлена противоположно скорости тела.

Предположим еще, что на это же тело, подвешенное на пружине, действует не квадратичное, а кулоновское трение.

Тогда уравнение движения будет:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + A \operatorname{sign} \left(\frac{dx}{dt} \right) + f(x) = 0, \quad (35)$$

где A — абсолютная величина силы трения и

$$\operatorname{sign} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \begin{cases} 1, & \text{если } \frac{dx}{dt} > 0, \\ -1, & \text{если } \frac{dx}{dt} < 0. \end{cases} \quad (36)$$

В качестве примера, иллюстрирующего учет сил внутреннего трения, рассмотрим вертикальные колебания некоторой массы m , подвешенной к стержню длины l сечением F и с модулем упругости E^*) (рис. 6).

Предположим, что масса m может совершать только вертикальные колебания, а масса стержня, играющего в нашем случае роль пружины, незначительна по сравнению с подвешенной массой m . Тогда систему можно рассматривать как систему с одной степенью свободы. При составлении дифференциального уравнения движения колеблющейся массы m будем учитывать потери энергии колебания на внутреннее рассеяние в материале стержня, массой же самого стержня будем пренебрегать.

Обозначая через x относительное удлинение стержня, получаем уравнение в виде

$$ml \frac{d^2x}{dt^2} + EF \overleftarrow{\Phi}(x) = 0, \quad (37)$$

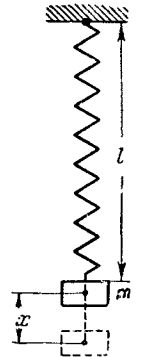


Рис. 6.

*) Этот пример подробно рассмотрен в Г. С. Писаренко [36]. В его исследовании разработан общий метод, позволяющий изучать влияние внутреннего трения в системах как с конечным, так и с бесконечным числом степеней свободы.

и Г. С. Писаренко [36]. В его исследовании изучается влияние внутреннего трения в системах как с конечным, так и с бесконечным числом степеней свободы.

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 [x + \overleftrightarrow{\Phi}(x)] = 0, \quad (38)$$

где $\omega^2 = \frac{EF}{ml}$ — собственная частота линейной системы, $\omega^2 \overleftrightarrow{\Phi}(x)$ — функция, учитывающая затухание в материале стержня, причем значение ее при восходящем и нисходящем движении различно; в уравнении это отмечено соответственно двумя различно направленными стрелками.

Таким образом, процесс колебания рассматриваемой системы, в которой происходит потеря энергии на рассеяние в материале стержня, фактически выражается двумя дифференциальными уравнениями.

Будем предполагать, что отклонение зависимости между напряжением σ и деформацией x в материале стержня мало отличается от линейного закона Гука. В этом случае уравнение (38) будет близким к линейному.

Приведем также явное выражение для

функции $\omega^2 \overleftrightarrow{\Phi}(x)$. Допустим, что при вертикальных колебаниях массы m , подвешенной на упругом стержне, петля гистерезиса, построенная в координатах: x — относительное удли-

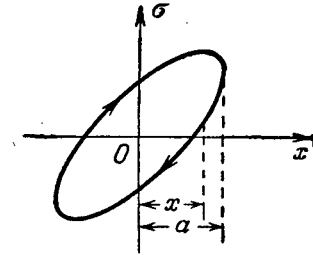


Рис. 7.

нение, σ — нормальное напряжение, будет симметрична (рис. 7).

В этом случае истинный модуль упругости будет переменным, и согласно гипотезе Н. Н. Давиденкова выражение для функции $\omega^2 \overleftrightarrow{\Phi}(x)$ имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 \overrightarrow{\Phi}(x) &= -\frac{\nu\omega^2}{n} [(a+x)^n - 2^{n-1}a^n], \\ \omega^2 \overleftarrow{\Phi}(x) &= \frac{\nu\omega^2}{n} [(a-x)^n - 2^{n-1}a^n], \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

где ν и n — постоянные, определяемые экспериментально, а a — амплитуда колебаний.

В рассмотренных выше колебательных системах в некоторых случаях не учитывались диссипативные силы (силы трения), однако в действительности диссипативные силы всегда в той или иной мере воздействуют на колебательную систему, в результате чего колебания со временем затухают.

Незатухающие колебания практически могут существовать в случае, если в системе имеется некоторый источник энергии, который может компенсировать расход энергии, возникший в результате наличия диссипативных сил.

Таким источником энергии может являться периодическая сила, воздействующая на колебательную систему. Так, например, если на обычный линейный вибратор воздействует внешняя периодическая сила, имеющая одну гармонiku, то мы получаем следующее уравнение движения:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + kx = E \sin \nu t, \quad (40)$$

согласно которому в колебательной системе будут существовать неза-
тухающие колебания. В данном случае потери на трение, вызываемые
наличием диссипативного члена $\lambda \frac{dx}{dt}$, будут компенсироваться за счет
энергии, поступающей извне и характеризующейся периодическим членом
 $E \sin \omega t$.

Однако источник энергии сам по себе может и не иметь никакой
определенной периодичности, но его воздействие на колебательную
систему играет роль как бы отрицательного трения, которое компенси-
рует обычное положительное трение, вносимое диссипативными силами.

Колебания такого типа, существенно отличающиеся от рассмотрен-
ного выше случая наличия периодического источника энергии, назы-
ваются автоколебаниями.

В автоколебательных системах при известных условиях положение
равновесия теряет устойчивость и возникает движение, переводящее
систему в режим стационарного периодического колебания (т. е. колеба-
ния, совершающегося с постоянной амплитудой и фазой).

Для осуществления стационарного периодического режима необхо-
димо, чтобы система состояла из трех частей: из колебательной системы;
из некоторого источника энергии, управляемого колебательной систе-
мой, воздействие которого на систему компенсирует потери на трение,
делает положение равновесия неустойчивым, а колебания нарастающими,
и из некоторого ограничителя, переводящего эти нарастающие колеба-
ния в стационарное состояние.

Первые две части системы могут быть линейными, ограничитель же
колебаний всегда является нелинейным, и поэтому любая автоколеба-
тельная система описывается нелинейным дифференциальным уравнением.

Автоколебательные системы широко распространены и имеют боль-
шое значение в физике и технике.

Для того чтобы наглядно составить себе представление о характере
возбуждения колебаний в автоколебательной системе, рассмотрим коле-
бания системы с одной степенью свободы.

Если колебания имеют малую амплитуду, то приходим к исследо-
ванию линейного дифференциального уравнения

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + kx = 0. \quad (41)$$

Общее решение этого уравнения, как известно, будет:

$$x = ae^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (42)$$

где a и φ — постоянные интегрирования,

$$\delta = \frac{\lambda}{2m}, \quad \omega^2 = \frac{k}{m} - \left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2. \quad (43)$$

Поэтому, если $\lambda > 0$, то, очевидно, амплитуда малых колебаний $ae^{-\delta t}$
будет затухать по экспоненциальному закону.

Если же, наоборот, $\lambda < 0$, то малые колебания будут раскачиваться
и их амплитуда будет возрастать по экспоненциальному закону.

Ввиду того, что амплитуда колебаний не может бесконечно увели-
чиваться, естественно предположить, что, начиная с некоторого момента,
коэффициент затухания меняет знак и становится положительным.

Это свойство колебательной системы можно отразить в дифферен-
циальном уравнении колебаний, заменив постоянный коэффициент λ

на переменный коэффициент, например, следующего вида:

$$\lambda = -A + B \left(\frac{dx}{dt} \right)^2, \quad (44)$$

где $A > 0$, $B > 0$.

В результате получаем уравнение вида

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \left\{ -A + B \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right\} \frac{dx}{dt} + kx = 0, \quad (45)$$

из которого следует, что затухание отрицательно для малых по абсолютной величине значений $\frac{dx}{dt}$ и положительно для больших. Таким образом, колебания малой амплитуды будут раскачиваться, а большой — затухать.

Итак, мы видим, что существуют незатухающие автоколебания, к которым стремятся как колебания с малой амплитудой, так и колебания с большой амплитудой.

Уравнение (45) называется уравнением Рэлея и имеет большое значение в теории автоколебаний.

Уравнение (45) с помощью замены переменных

$$\left. \begin{aligned} \tau &= t \sqrt{\frac{k}{m}}, \\ y &= \sqrt{\frac{3Bk}{Am}} \int x d\tau \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

может быть приведено к следующему:

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} - \varepsilon(1 - y^2) \frac{dy}{d\tau} + y = 0, \quad (47)$$

где $\frac{A}{\sqrt{km}} = \varepsilon$.

Уравнение автоколебаний, представленное в таком виде, называется уравнением Ван-дер-Поля.

Приведем теперь конкретные примеры автоколебательных систем.

Рассмотрим электронный генератор, схематически изображенный на рис. 8.

Пусть i_L , i_C , i_R — соответственно токи в самоиндукции L , емкости C и сопротивлении R колебательного контура.

Обозначим через E_a постоянное напряжение в анодной цепи, V_a — полное напряжение на аноде электронной

лампы, V_g — напряжение на сетке, i_a — анодный ток, M — коэффициент взаимной индукции между цепью сетки и колебательным контуром.

Согласно схеме рис. 8, пренебрегая сеточным током, имеем:

$$L \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{C} \int i_C dt = Ri_R = E_a - V_a, \quad (48)$$

$$M \frac{di_L}{dt} = V_g, \quad (49)$$

$$i_a = i_L + i_R + i_C, \quad (50)$$

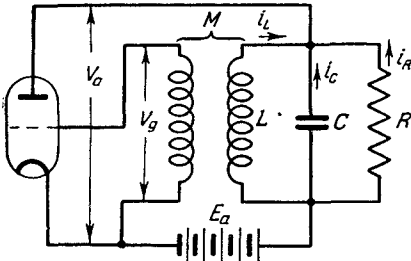


Рис. 8.

и, следовательно, можем написать дифференциальное уравнение:

$$LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} + i_L = i_a. \quad (51)$$

Как известно, анодный ток i_a является определенной функцией управляющего напряжения $u = V_g + DV_a$, т. е.

$$i_a = f(u) = f(V_g + DV_a), \quad (52)$$

где D — константа, называемая проницаемостью лампы. Обычно численная величина D мала по сравнению с единицей.

Подставляя (52) в (51) и принимая во внимание (48) и (49), получим:

$$LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} + i_L = f \left[DE_a + (M - DL) \frac{di_L}{dt} \right]. \quad (53)$$

Введем в рассмотрение следующие величины:

$$E_0 = DE_a, \\ V = (M - LD) \frac{di_L}{dt}.$$

Очевидно, V — переменная слагающая управляющего напряжения u , возбуждаемая вибрациями тока в колебательном контуре, а E_0 — постоянная слагающая, возбуждаемая источником постоянного тока.

Тогда для неизвестной V из (53) получаем уравнение следующего вида:

$$LC \frac{d^2 V}{dt^2} + V + \left\{ \frac{L}{R} - (M - LD) f'(E_0 + V) \right\} \frac{dV}{dt} = 0. \quad (54)$$

Произведя замену переменных по формуле

$$t = \tau \sqrt{LC},$$

получаем следующее уравнение для электронного генератора в безразмерной форме:

$$\frac{d^2 V}{d\tau^2} + V + \frac{1}{\sqrt{LC}} \left\{ \frac{L}{R} - (M - LD) f'(E_0 + V) \right\} \frac{dV}{d\tau} = 0. \quad (55)$$

При некоторых допущениях уравнение (55) может быть сведено к уравнению Ван-дер-Поля.

Действительно, предположим, что постоянная слагающая управляющего напряжения E_0 выбрана таким образом, что она является абсциссой точки перегиба характеристики лампы:

$$i_a = f(u),$$

т. е. так, что

$$f''(E_0) = 0$$

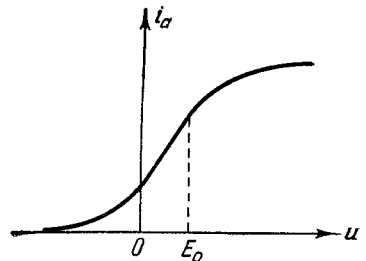


Рис. 9.

(рис. 9).

Тогда для некоторого интервала значений V можем приближенно положить:

$$f(E_0 + V) = f(E_0) + Vf'(E_0) + \frac{V^3}{6} f'''(E_0). \quad (56)$$

Допустим, что

$$(M - LD) f''(E_0) < 0,$$

$$(M - LD) f'(E_0) - \frac{L}{R} > 0.$$

Тогда уравнение (55) преобразуется к уравнению Ван-дер-Поля:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon(1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x = 0, \quad (57)$$

где введены обозначения:

$$\frac{(M - LD) f'(E_0) - \frac{L}{R}}{\sqrt{LC}} = \varepsilon, \quad \alpha V = x,$$

$$\alpha^2 = \frac{-(M - LD) f''(E_0)}{2 \left\{ (M - LD) f'(E_0) - \frac{L}{R} \right\}}.$$

Приведем еще один пример автоколебательной системы, встречающейся в электротехнике.

Рассмотрим электрический колебательный контур (рис. 10), состоящий из емкости C , самоиндукции L и некоторого элемента с нелинейной характеристикой напряжение — ток: $e = F'(i)$ (рис. 11).

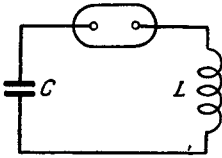


Рис. 10.

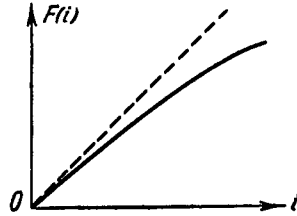


Рис. 11.

Тогда колебания в контуре будут описываться уравнением

$$LC \frac{d^2i}{dt^2} + i + CF'(i) \frac{di}{dt} = 0 \quad (58)$$

или, если положить, что характеристика аппроксимируется полиномом пятой степени

$$F(i) = A + Bi + Di^2 + Ei^3 + Fi^4 + Gi^5, \quad (59)$$

следующим уравнением:

$$LC \frac{d^2i}{dt^2} + i + C(B + 2Di + 3Ei^2 + 4Fi^3 + 5Gi^4) \frac{di}{dt} = 0, \quad (60)$$

для которого в зависимости от характера полинома (59) может существовать решение, соответствующее стационарному колебательному режиму.

В качестве механической автоколебательной системы рассмотрим маятник Фроуда.

Устройство этого маятника схематически представлено на рис. 12: на вал O , вращающийся с равномерной скоростью, надета муфта M , жестко связанная с маятником; трение муфты при вращении на валу

известно. Обозначим через θ угол отклонения оси маятника от вертикали (рис. 13), u — угловую скорость вращения вала, J — момент инерции маятника, $\lambda \frac{d\theta}{dt}$ — момент сил трения маятника о воздух, пропорциональный угловой скорости колебаний маятника $\frac{d\theta}{dt}$.

Кроме сил трения маятника о воздух, при составлении уравнения необходимо учесть также момент сил трения между муфтой и валом.

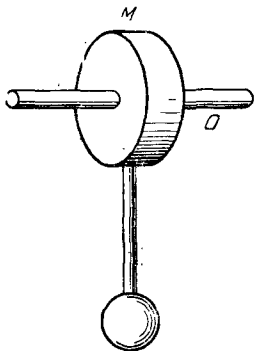


Рис. 12.

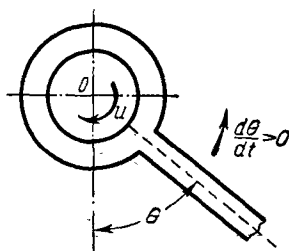


Рис. 13.

Допустим для упрощения, что этот момент \mathfrak{M} является определенной функцией F от относительной угловой скорости v (маятника относительно вала)

$$\mathfrak{M} = F(v). \tag{61}$$

В рассматриваемом случае, очевидно, имеем:

$$v = u + \frac{d\theta}{dt},$$

и поэтому уравнение колебаний маятника Фруда (идеализированного) может быть представлено в виде

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + \lambda \frac{d\theta}{dt} + F\left(u + \frac{d\theta}{dt}\right) + mga \sin \theta = 0, \tag{62}$$

где m — масса маятника, a — расстояние от центра тяжести маятника до центра оси вала, g — ускорение силы тяжести.

Характеристика трения между муфтой и валом (61) имеет, вообще говоря, падающие участки (рис. 14), на которых

$$F'(v) < 0.$$

Выберем скорость u так, чтобы u была абсциссой точки перегиба падающего участка:

$$F''(u) = 0,$$

причем допустим, что

$$F'(u) + \lambda < 0,$$

$$F'''(u) > 0.$$

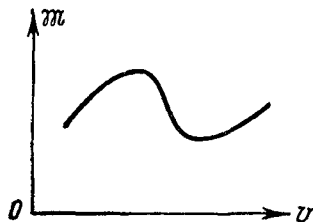


Рис. 14.

Для $\frac{d\theta}{dt}$, лежащего в известных пределах, можно положить:

$$F\left(u + \frac{d\theta}{dt}\right) = F(u) + F'(u)\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{6}F''(u)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^3. \quad (63)$$

Тогда, рассматривая случай малых колебаний и полагая $\sin \theta \approx \theta$, приводим уравнение (62) к уравнению Рэля или уравнению Ван-дер-Поля.

Приведем еще один пример механической автоколебательной системы.

Допустим, что некоторое тело массы m находится на шероховатой поверхности ремня, натянутого между двумя шкивами и двигающегося

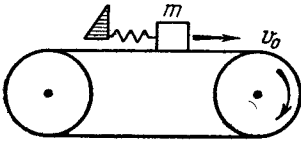


Рис. 15.

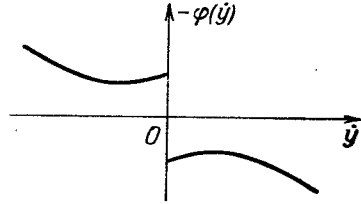


Рис. 16.

с постоянной скоростью v_0 (рис. 15). Тело прикреплено к неподвижной точке при помощи пружины, упругость которой изменяется по линейному закону.

Как известно, для определенных значений v_0 тело не будет находиться в состоянии покоя, а будет совершать прерывистые колебания. Это является следствием того, что сила сухого трения между телом и ремнем — не постоянная величина, а изменяется в зависимости от скорости скольжения $\frac{dy}{dt}$ тела относительно ремня (рис. 16). Пока тело находится в покое относительно ремня ($\frac{dy}{dt} = 0$), сила трения $\varphi\left(\frac{dy}{dt}\right)$ возрастает, оставаясь в каждый момент равной силе натяжения пружины; когда эта сила достигает некоторого значения, равного критической величине силы трения, начинается движение тела относительно ремня, причем сначала сила трения будет уменьшаться при возрастании $\left|\frac{dy}{dt}\right|$, а затем при достаточно большом $\left|\frac{dy}{dt}\right|$ — увеличиваться.

Выберем начало координат в точке, в которой пружина находится в недеформированном состоянии. Тогда скорость скольжения тела можно записать в виде

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} - v_0,$$

и уравнение движения тела будет иметь следующий вид:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \varphi\left(\frac{dx}{dt} - v_0\right) + kx = 0. \quad (64)$$

Если за начало отсчета принять положение тела, в котором оно находится в равновесии при одновременном действии упругой силы

и силы трения, т. е. положение, для которого

$$\varphi(-v_0) + kx = 0, \quad (65)$$

то для новой координаты z :

$$z = x + \frac{1}{k} \varphi(-v_0),$$

уравнение движения будет иметь вид

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + F\left(\frac{dz}{dt}\right) + kz = 0, \quad (66)$$

где

$$F\left(\frac{dz}{dt}\right) = \varphi\left(\frac{dz}{dt} - v_0\right) - \varphi(-v_0).$$

Рассмотренные выше колебательные системы достаточно близки к линейным.

В полученных дифференциальных уравнениях нелинейные члены, являясь малыми, могут рассматриваться как слабое возмущение, пропорциональное некоторому малому параметру.

Поэтому в общем случае для таких колебательных систем дифференциальное уравнение удобно записывать в виде

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right), \quad (67)$$

где правая часть содержит малые нелинейные члены ($\varepsilon \ll 1$), характеризующие нелинейное трение, нелинейные добавки к восстанавливающей упругой силе, нелинейные члены, обуславливающие существование автоколебательного режима, и т. д.

Введение малого параметра ε является очень удобным средством математического представления того обстоятельства, что в течение времени порядка $\frac{2\pi}{\omega}$ (периода колебания) форма колебаний близка к синусоидальной.

Если говорить об общих свойствах таких нелинейных колебаний, то следует подчеркнуть, что в отличие от линейных колебаний их частоты и амплитуды могут быть переменными. Если даже пренебречь высшими гармониками и приближенно положить

$$x = a \cos \theta, \quad (68)$$

то при этом надо учесть, что a и θ , вообще говоря, переменны.

В нелинейных системах амплитуда колебания может изменяться в зависимости от поступления или убыли энергии в системе. В слабо нелинейных системах это изменение, естественно, очень мало, так что практически оно сказывается лишь за время T , намного большее времени одного цикла колебания.

Рассматривая выражение мгновенной мощности, создаваемой силами, представленными в уравнении малыми возмущающими нелинейными членами, мы видим, что это выражение, являясь периодической функцией фазового угла θ , зависит также от амплитуды a .

Поскольку фазовый угол вращается с частотой ω , а амплитуда меняется достаточно медленно, то при усреднении за промежуток времени, в течение которого амплитуда еще не успеет заметно отклониться от начального значения, а фаза уже успеет сделать достаточно большое число

оборотов, члены, содержащие $\cos n\theta$ и $\sin n\theta$, сделаются весьма малыми, так как выражения

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \cos n\theta dt &= \frac{1}{n\omega T} \sin n\theta \Big|_0^T, \\ \frac{1}{T} \int_0^T \sin n\theta dt &= -\frac{1}{n\omega T} \cos n\theta \Big|_0^T \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

содержат T в знаменателе.

Таким образом, мощность, развиваемая указанными силами за промежуток времени T , будет в результате зависеть лишь от амплитуды колебания.

Поэтому естественно рассматривать приближенное уравнение, определяющее ход изменения амплитуды, в следующем виде:

$$\frac{da}{dt} = F(a). \quad (70)$$

В дальнейшем мы убедимся, что последовательное применение асимптотического метода действительно приводит к уравнению именно такого типа.

Функцию $F(a)$ целесообразно представить в виде $-\delta(a)a$, вводя эффективный декремент $\delta(a)$, подчеркивающий здесь аналогию с линейными системами, в которых δ является постоянной.

Таким образом, естественно положить:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\delta(a)a, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega(a), \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

где $\omega(a)$ — «эффективная частота колебаний», а $\delta(a)$ — «эффективное затухание», определяемое наличием в системе источников или поглотителей энергии.

В системах с трением при любых значениях a

$$\delta(a) > 0,$$

в автоколебательных же системах для некоторых значений амплитуды колебания

$$\delta(a) = 0.$$

Остановимся еще на одном типе колебательных систем, имеющих очень широкое распространение в природе, однако существенно отличающихся от приведенных выше автоколебательных систем с малой нелинейностью тем, что в них параметр ε — большой параметр, и, в частности, рассмотрим случай $\varepsilon \rightarrow \infty$.

Колебания, описываемые уравнениями такого вида, получили название релаксационных. Это название отражает наличие двух различных и характерных стадий, на которые распадается колебательный процесс в релаксационной колебательной системе, а именно: медленное накопление энергии системой и последующая разрядка энергии, происходящая почти мгновенно после того, как достигнут некоторый критический потенциальный порог для указанного накопления энергии.

Колебательные системы релаксационного типа (\approx достаточно велико), так же как и рассмотренные выше системы, близкие к линейным, могут быть охвачены достаточно общими методами исследования.

В качестве примера рассмотрим релаксационные колебания, происходящие при известных условиях в цепи с неоновой лампой, составленной согласно схеме рис. 17. В этой схеме неоновая лампа N замкнута на источник постоянного напряжения E_a через сопротивление R и зашунтирована емкостью C . При рассмотрении этой схемы будем пренебрегать силами инерции в колебательной системе, что приведет нас в итоге к дифференциальным уравнениям не второго порядка, а первого.

Нелинейность колебательной системы, приведенной на схеме рис. 17, обуславливается неоновой лампой, для которой зависимость между напряжением v и током i не подчиняется линейному закону Ома.

При идеализации процесс изменения тока i в зависимости от изменения напряжения v протекает следующим образом: при изменении v от нулевого значения в сторону увеличения вначале лампа не горит и ток в ней отсутствует. По достижении определенного

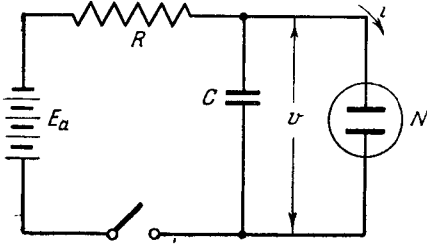


Рис. 17.

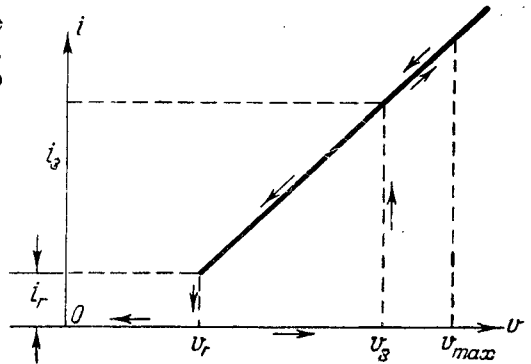


Рис. 18.

напряжения v_z , называемого напряжением зажигания, лампа загорается, ее сопротивление резко падает, и ток скачком получает значение i_z ; дальнейшее увеличение v вызывает линейное нарастание тока. Если теперь, после того как напряжение достигло некоторого значения $v_{max} > v_z$, начать производить непрерывное уменьшение его, ток i будет уменьшаться по линейному закону, пока v не дойдет до так называемого напряжения гашения v_r . В этот момент лампа гаснет и ток i срывается, становясь равным нулю. В принятой идеализации рассмотренная зависимость графически представлена характеристикой рис. 18, состоящей из прямолинейных участков и обладающей гистерезисной петлей.

Поэтому можно положить $i = 0$ для погашенной лампы и $i = i_r + \frac{v - v_r}{R_N}$ для горящей лампы.

Для составления дифференциального уравнения заметим, что, поскольку ток через конденсатор равен $C \frac{dv}{dt}$, ток в сопротивлении R будет

$C \frac{dv}{dt} + i$ и, следовательно, падение напряжения на R представится равенством

$$R \left(C \frac{dv}{dt} + i \right) = E_a - v,$$

откуда находим:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{E_a - v - Ri}{CR}. \quad (72)$$

При замыкании ключа в схеме рис. 17 начинается процесс заряда конденсатора.

Так как в начальный момент напряжение на зажимах лампы равно нулю, то в течение некоторого периода времени оно будет меньше v_3 . В течение этого времени неоновая лампа не зажигается и, следовательно, согласно (72) имеем:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{E_a - v}{RC}. \quad (73)$$

Если $E_a > v_3$, то согласно уравнению (73) спустя некоторое время v достигает значения v_3 , лампа загорается, после чего начинается при достаточно большом значении R процесс разряда конденсатора через неоновую лампу. Для этого процесса мы имеем:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{E_a - v - R \left[i_r + \frac{v - v_r}{R_N} \right]}{RC}. \quad (74)$$

Пусть R столь велико, что

$$E_a - v - Ri_r < 0.$$

Тогда v согласно (74) монотонно убывает до значения $v = v_r$, после чего лампа гаснет и начинается опять процесс заряда конденсатора, затем снова процесс разряда через лампу и т. д.

Таким образом, в нашей схеме совершаются периодические релаксационные колебания, при которых v изменяется между v_r и v_3 .

Уравнение колебаний, очевидно, может быть записано в виде

$$\frac{dv}{dt} = \Phi(v), \quad (75)$$

где $\Phi(v)$ на интервале $v_r \leq v \leq v_3$ согласно (73) и (74) имеет два значения:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(v) &= \frac{E_a - v}{RC} \quad (\text{для } v \text{ возрастающих}), \\ \Phi(v) &= \frac{E_a - v - Ri_r - \frac{R}{R_N}(v - v_r)}{RC} \quad (\text{для } v \text{ убывающих}). \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

3. В приведенных выше примерах колебательных систем возмущающие силы не зависели явно от времени. Эти колебательные системы были изолированы от внешних влияний, вследствие чего все действующие на систему силы зависели только от динамического состояния самой системы.

Приведем теперь типичные примеры нелинейных колебательных систем, находящихся под воздействием внешних периодических сил, и проанализируем с физической точки зрения характерные явления, могущие возникнуть в нелинейных системах в этом случае.

Начнем с рассмотрения самого простого примера — нелинейного вибратора, на который действует слабая гармоническая возбуждающая сила $\epsilon E \cos \nu t$.

Уравнение движения в этом случае запишется в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) + \varepsilon E \cos \nu t. \quad (77)$$

Ввиду малости внешней силы и малости нелинейного члена колебания за один цикл будут иметь форму, близкую к гармонической:

$$\left. \begin{aligned} x &\approx a \cos(\omega t + \phi), \\ \frac{dx}{dt} &\approx -a\omega \sin(\omega t + \phi). \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

Амплитуды и фазы будут здесь претерпевать существенные изменения лишь за время, включающее большое количество циклов.

Рассмотрим среднюю мощность

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \varepsilon E \cos \nu t \frac{dx}{dt} dt, \quad (79)$$

вносимую в систему внешней силой за время T , в течение которого она еще не успевает заметно изменить форму колебания. Так как внешняя сила считается малой, это время T , в течение которого колебание приближенно является «собственным», может быть взято достаточно большим по сравнению с циклом колебания.

Подставляя (78) в выражение (79), получим среднюю мощность в виде

$$A = \frac{a\omega\varepsilon E}{2T} \left[\frac{\cos[(\nu + \omega)t + \phi]}{\nu + \omega} - \frac{\cos[(\nu - \omega)t - \phi]}{\nu - \omega} \right]_{t_0}^{t_0+T}. \quad (80)$$

Для достаточно больших T это выражение практически отлично от нуля только тогда, когда внешняя частота достаточно близка к собственной.

Таким образом, малая возмущающая сила, действующая в течение продолжительного времени, может оказывать заметное влияние на рассматриваемый вибратор лишь в случае резонанса $\nu \approx \omega$. Такой резонанс условимся называть «главным» или обыкновенным резонансом.

В нашем рассуждении мы исходили из чисто гармонической формы собственных колебаний.

Однако из-за наличия яелинейного члена в собственном колебании непременно будут появляться (и при отсутствии внешней возбуждающей силы) высшие гармоники.

Подставляя в (79) вместо x выражение собственного колебания, содержащее высшие гармоники с частотами $n\omega$, и повторяя вышеприведенное рассуждение, убеждаемся в том, что рассматриваемая средняя мощность при достаточно большом T может быть практически отлична от нуля не только при $\omega \approx \nu$, но и при $n\omega \approx \nu$, где $n=2, 3$ и т. д. Эти дополнительные резонансы, которые можно заметить лишь в следующем приближении, при учете наличия обертонов в собственных колебаниях, будем называть резонансом деления частоты или демультимпликативным резонансом.

В еще более высоких приближениях можно заметить и более сложные резонансы дробного типа

$$n\omega \approx m\nu,$$

обусловленные тем, что при достаточно высоком приближении в выраже-

нии $\frac{dx}{dt}$ следует учитывать не только обертоны собственной частоты, но и комбинационные тоны с частотами типа $n\omega \pm r\nu$.

В рассматривавшемся случае слабо нелинейного вибратора с приложенной малой гармонической силой в первом приближении мы обнаружили лишь главный резонанс $\omega \approx \nu$. Однако в некоторых слабо нелинейных системах уже в первом приближении проявляются и резонансы другого типа, например резонансы деления на два.

Так, например, если рассматривать колебательную систему, жесткость которой изменяется периодически, то получаем известное уравнение Матвея:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 (1 + h \cos \nu t) x = 0. \quad (81)$$

Предполагая, что коэффициент модуляции частоты $\omega^2 h$ мал, и считая член

$$\omega^2 h \cos \nu t \cdot x \quad (82)$$

внешним возбуждением, подсчитаем выражение для средней мощности.

Здесь уже в первом приближении имеем:

$$A = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \omega^2 h \cos \nu t \cos (\omega t + \phi) a \omega \sin (\omega t + \phi) dt = \\ = \frac{\omega^3 h}{4T} \left[\frac{\cos [(\nu + 2\omega) t + 2\phi]}{\nu + 2\omega} - \frac{\cos [(\nu - 2\omega) t - 2\phi]}{\nu - 2\omega} \right]_{t_0}^{t_0+T}, \quad (83)$$

и, следовательно, работа, произведенная возмущающей силой (82), в среднем за большой промежуток времени практически не исчезает в случае, если $\nu \approx 2\omega$, т. е. $\omega \approx \frac{\nu}{2}$.

Таким образом, в колебательной системе, описываемой уравнением (81), мы уже в первом приближении можем обнаружить резонанс деления частоты на два.

Рассмотрим еще влияние внешнего гармонического возбуждения на автоколебательную систему. Для этого возьмем обобщенное уравнение Ван-дер-Поля в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon (1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x = E \sin \nu t. \quad (84)$$

Предполагая, что ν не принимает значений, близких к единице, произведем замену переменных согласно формуле

$$x = y + U \sin \nu t, \quad (85)$$

где $U = \frac{E}{1 - \nu^2}$.

Тогда имеем:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \varepsilon [1 - (y + U \sin \nu t)^2] \left[\frac{dy}{dt} + U \nu \cos \nu t \right]. \quad (86)$$

Проанализируем, какие резонансы могут быть обнаружены в первом приближении для данного уравнения.

Подсчитывая среднюю мощность, производимую малой возмущающей силой,

$$\varepsilon [1 - (y + U \sin \nu t)^2] \left[\frac{dy}{dt} + U \nu \cos \nu t \right] \quad (87)$$

в режиме чисто гармонического колебания

$$y = a \cos(\omega t + \phi),$$

$$\frac{dy}{dt} = -a\omega \sin(\omega t + \phi),$$

нетрудно заметить, что она не исчезает, если $2\omega \approx \nu$, а также если $2\nu \approx \omega$, причем резонанс $2\omega \approx \nu$ возникает от слагаемого возмущающей силы (87), амплитуда которого пропорциональна U , а резонанс $2\nu \approx \omega$ — от слагаемого, амплитуда которого пропорциональна U^2 .

Таким образом, если E — величина малая, то резонанс $2\omega \approx \nu$ можно обнаружить во втором приближении, а резонанс $2\nu \approx \omega$ — только в третьем приближении.

Уже из сделанного предварительного анализа ясно, что в случаях резонанса весьма слабые периодические возмущения могут оказывать существенное влияние на протекание колебательного процесса в течение достаточно больших интервалов времени.

При этом в отличие от возмущений, не зависящих явно от времени, типа $\varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$, здесь существенную роль будут играть фазовые соотношения.

В самом деле, взяв типичную формулу (80) и положив в ней для простоты $\omega = \nu$, найдем:

$$A \approx -\frac{a\omega\varepsilon E}{2} \sin \phi. \quad (88)$$

Итак, при $\sin \phi < 0$ энергия поступает в систему, при $\sin \phi > 0$ энергия забирается из системы. Уже на этом простом примере мы видим важность фазовых соотношений в случае резонанса.

Поэтому приближенные уравнения, определяющие протекание колебания, должны включить не только амплитуду, но и фазу колебания, так что вместо одного уравнения (70) мы будем теперь иметь систему двух связанных уравнений типа

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= F(a, \phi), \\ \frac{d\phi}{dt} &= \Phi(a, \phi). \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

Вопрос о фактическом определении правых частей этих уравнений применительно к первому и высшим приближениям рассмотрен в главе III. В этой главе будут изложены расчетные, асимптотические методы, подтверждающие правильность приведенных здесь предварительных рассуждений качественного характера и дающие им надлежащее развитие.

В рассмотренных выше примерах мы имели дело с колебательными системами, описываемыми уравнениями типа

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right), \quad (90)$$

где $f\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right)$ — периодическая функция с периодом 2π относительно νt .

В случае нелинейного вибратора мы имеем:

$$\varepsilon f\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right) = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) + \varepsilon E \cos \nu t.$$

В случае уравнения (81) (уравнение Матье):

$$\varepsilon f\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right) = -\omega^2 h \cos \nu t \cdot x.$$

Следует подчеркнуть, что к уравнению такого вида сводится большое число практически важных колебательных систем.

Примером колебательной системы, описываемой уравнением (77), может являться задача о колебаниях груза единичной массы, подвешенного на пружине с нелинейной характеристикой упругости при наличии трения и находящегося под воздействием возмущающей силы $\varepsilon E \cos \nu t$ (рис. 19).

Задача о крутильных колебаниях вала, состоящего из двух масс, соединенных при помощи нелинейной упругой связи, на одну из

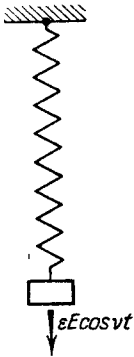


Рис. 19.

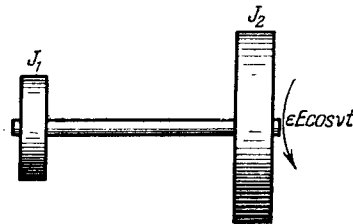


Рис. 20.

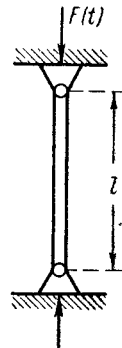


Рис. 21.

которых действует синусоидальный крутящий момент $F(t) = \varepsilon E \cos \nu t$ (рис. 20), приводится к уравнению вида

$$J_1 J_2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + (J_1 + J_2) c(\theta) + f\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \varepsilon E \cos \nu t, \quad (91)$$

также принадлежащему к уравнению типа (77). Здесь J_1 и J_2 — моменты инерции масс, $\theta = \theta_1 - \theta_2$ — угол скручивания, $f\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$ — функция скорости, учитывающая влияние трения.

Задача о колебаниях маятника, находящегося под воздействием внешней периодической силы, также приводится к уравнению типа (77) и т. д.

К уравнению типа Матье (81) сводится, например, задача о поперечных колебаниях шарнирно закрепленного стержня, находящегося под воздействием продольной пульсирующей силы $F(t) = \varepsilon E_1 \cos \nu t$.

В этом случае получаем уравнение

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 \left[1 - \frac{l^2 \varepsilon E_1}{EJ\pi} \cos \nu t \right] x = 0, \quad (92)$$

где введены обозначения: EJ — жесткость стержня, l — длина стержня (рис. 21).

Уравнение более общего типа, чем уравнение Матье, имеет место при рассмотрении нелинейного вибратора, в котором некоторые пара-

метры, например собственная частота соответствующей линейной системы, периодически изменяются.

Тогда имеем уравнение вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 (1 + h \sin vt) x = \varepsilon f \left(x, \frac{dx}{dt} \right). \quad (93)$$

В качестве примера рассмотрим колебания в контуре, состоящем из обычной самоиндукции L , катушки с характеристикой (магнитный поток — ток) вида

$$\Phi = \Phi(i),$$

малого омического сопротивления R и переменной емкости

$$C = C_0 (1 + \rho \sin vt)$$

(рис. 22).

Тогда полный поток магнитной индукции в контуре будет:

$$Li + \Phi(i),$$

и, таким образом, имеем следующее уравнение:

$$\frac{d[Li + \Phi(i)]}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i dt = 0, \quad (94)$$

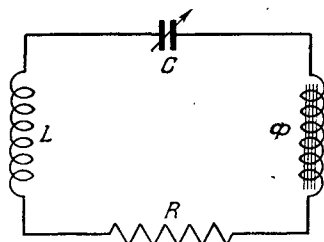


Рис. 22.

или, вводя в качестве неизвестной заряд на обкладках конденсатора

$$q = \int_0^t i dt,$$

получим:

$$\left\{ L + \Phi' \left(\frac{dq}{dt} \right) \right\} \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C_0 (1 + \rho \sin vt)} = 0. \quad (95)$$

Предполагая, что самоиндукция L достаточно велика по сравнению с «нелинейной самоиндукцией»:

$$L \gg \Phi'(i),$$

и, кроме того, коэффициент ρ , характеризующий «глубину изменения» емкости, достаточно мал, можем уравнение (95) с точностью до величин второго порядка малости привести к виду

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega^2 (1 - \rho \sin vt) q = -\frac{R}{L} \left(1 - \frac{\Phi' \left(\frac{dq}{dt} \right)}{L} \right) \frac{dq}{dt} + \omega^2 \frac{\Phi \left(\frac{dq}{dt} \right)}{L} q, \quad (96)$$

где $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

В качестве примера автоколебательной системы, находящейся под воздействием внешнего синусоидального возбуждения, рассмотрим регенеративный приемник, схематически приведенный на рис. 23.

В этом случае получаем уравнение

$$LC \frac{d^2i}{dt^2} + RC \frac{di}{dt} + i = i_a, \quad (97)$$

причем

$$i_a = f(V_s) \quad (98)$$

— характеристика лампы.

Так как

$$V_s = M_r \frac{di}{dt} + E_0 \sin \nu t, \quad (99)$$

где $M_r = M - DL$, то подстановкой

$$i_1 = i - \frac{E_0}{M_r \nu} \cos \nu t \quad (100)$$

уравнение (97) можно привести к виду

$$CL \frac{d^2 i_1}{dt^2} + RC \frac{di_1}{dt} + i_1 = f \left(M_r \frac{di_1}{dt} \right) + E_1 \cos(\nu t + \varphi), \quad (101)$$

где

$$E_1 = \frac{E_0 C \sqrt{(LC\nu^2 - 1)^2 + R^2 C^2 \nu^2}}{M_r \nu}.$$

Уравнение (101) принадлежит к типу уравнения (93), а при помощи подстановки

$$i_1 = I + \frac{E_1}{\omega^2 - \nu^2} \cos(\nu t + \varphi), \quad (102)$$

где $\omega^2 = \frac{1}{LC}$, приводится к виду (86).

Рассмотрим еще некоторые примеры, приводящиеся к более сложным уравнениям, чем уравнения типа (67) или (90).

В качестве первого примера рассмотрим задачу о колебаниях маятника с переменной длиной.

Пусть m обозначает массу маятника, g — ускорение силы тяжести, ϑ — угол отклонения от вертикального положения, $l = l(t)$ — длину маятника, зависящую от времени. Тогда, пренебрегая силой трения, получаем уравнение

$$\frac{d}{dt} \left[m l^2(t) \frac{d\vartheta}{dt} \right] + gl(t) \sin \vartheta = 0. \quad (103)$$

Рассмотрим еще работу отражательного клистрона в режиме сверхрегенеративного усиления. Пусть $G_E = G_R + G_H$ — суммарная активная проводимость; G_R — проводимость, характеризующая потери в резонаторе; G_H — проводимость, характеризующая нагрузку; G_e — активная часть электронной проводимости; $E(t)$ — э. д. с. сигнала; $\mathcal{E}(t)$ — переменное напряжение суперизации.

Тогда уравнение, характеризующее работу клистрона, будет иметь следующий вид:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \rho (G_E - G_e) \frac{du}{dt} + u = E(t) \sin(1 + \mathcal{E}(t)) \omega_0 t, \quad (104)$$

где $\rho = \omega_0 L$, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$.

Если в уравнениях (103) и (104) коэффициенты, являясь переменными, изменяются медленно, что мы будем обозначать в дальнейшем

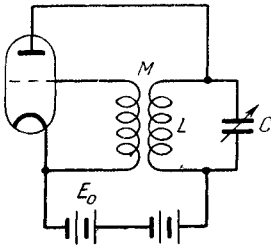


Рис. 23.

в виде зависимости не от t , а от τ , где $\tau = \varepsilon t$, ε — малый параметр, то эти уравнения будут принадлежать к уравнениям вида

$$\frac{d}{dt} \left\{ m(\tau) \frac{dx}{dt} \right\} + c(\tau) x = \varepsilon f \left(\tau, x, \frac{dx}{dt} \right), \quad (105)$$

или

$$\frac{d}{d\tau} \left\{ m(\tau) \frac{dx}{d\tau} \right\} + c(\tau) x = \varepsilon f \left(\tau, \theta, x, \frac{dx}{d\tau} \right), \quad (106)$$

где $\tau = \varepsilon t$, $\frac{d\theta}{d\tau} = \nu(\tau)$.

К уравнениям типа (105) или (106) приводятся многие задачи физики и техники, как, например, задача о прохождении через резонанс, исследование неустановившихся процессов в колебательных контурах, вопросы частотной модуляции, ряд задач из теории ускорительных устройств и т. д.

До сих пор мы рассматривали воздействие внешних периодических сил на колебательные системы, близкие к линейным. Можно, однако, также рассмотреть вопрос о влиянии малых периодических возмущающих сил и на релаксационные колебательные системы, описываемые, например, уравнением типа

$$\frac{dx}{dt} = \Phi(x) + \varepsilon E \cos \nu t, \quad (107)$$

где, как и в случае уравнения (75) свободных релаксационных колебаний, $\Phi(x)$ представляет определенную на интервале (a, b) двузначную функцию.

В частности мы получим уравнение (107), если в ранее рассматривавшейся схеме генератора релаксационных колебаний включим последовательно с постоянным напряжением E_a переменное гармоническое напряжение $\varepsilon E_\nu \cos \nu t$.

Так, для схемы, приведенной на рис. 24, имеем, очевидно:

$$\frac{di}{dt} = \Phi(i) + \frac{\varepsilon E_\nu \cos \nu t}{L}. \quad (108)$$

Ввиду того, что в свободных релаксационных колебаниях существенную роль играют обертоны вплоть до весьма большого порядка, мы видим, анализируя выражение

$$\frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon E_\nu \cos \nu t \frac{dx}{dt} dt,$$

что в системе имеют место резонансы типа деления частоты

$$\nu = \frac{\omega}{n},$$

где n может быть достаточно большим числом.

Поэтому резонансы деления частоты на большое число удобнее всего наблюдать на релаксационных системах.

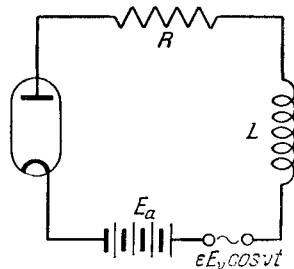


Рис. 24.