развитие небесной механики сопровождалось многочисленными попытками внести те или иные малые поправки в точную форму закона тяготения, а также появлением ряда гипотез о механизме гравитационных взаимодействий. Эти попытки, связанные с отдельными трудностями небесной механики и с различными общими соображениями, оставались в течение двух столетий безуспешными, и только создание теории относительности привело к глубокому пересмотру концепции Ньютона.

2. Закон тяготения Ньютона как следствие законов Кеплера. По представлению Ньютона, закон тяготения является одним из немногих общих принципов, из которых «вытекают свойства и действия всех вещественных предметов». Однако, в свою очередь, этот закон должен быть индуктивно выведен из «явлений», т. е. из наблюдаемых в природе движений. Такими «явлениями» служили, как известно, особенности движения в задаче двух тел, найденные эмпирически на основе многолетних наблюдений планет Солнечной системы и получившие выражение в трех законах Кеплера. Первые два закона Кеплера относятся к гелиоцентрическому движению каждой отдельно взятой планеты, третий связывает средние расстояния планет от Солнца с периодами их обращения. В полярных геоцентрических координатах законы Кеплера можно выразить равенствами

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}; \quad r^2\dot{\varphi} = C; \quad \frac{a^3}{T^2} = f, \tag{1,2,1}$$

где p, e — фокальный параметр и эксцентриситет планетной орбиты, C — постоянная площадей, равная удвоенной секториальной скорости планеты, a — среднее расстояние от Солнца, T — период обращения планеты, f — постоянная.

Восстановим в общих чертах переход от законов Кеплера (1,2,1) к закону тяготения. Ограничиваясь случаем системы двух тел, будем принимать во внимание взаимодействие данной планеты с Солнцем, пренебрегая действием других планет.

Отнесем изучаемое движение двух тел к инерциальной системе отсчета и обозначим радиусы-векторы точечных масс M, m соответственно через $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$. Уравнения движения имеют вид

$$M\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = -\mathbf{F}; \quad m\frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} = \mathbf{F},$$

где через $\mathbf{F}$ обозначена сила, приложенная к массе m.

Перейдем к системе отсчета, связанной с массой M, т. е. к гелиоцентрическим координатам. Введя относительный радиус-вектор $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, получим уравнение относительного движения

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{m + M}{mM}\mathbf{F}. \tag{1,2,2}$$

Задача заключается в определении силы F, обеспечивающей выполнимость законов Кеплера (1,2,1).

Согласно первому из этих законов, относительное движение происходит в постоянной плоскости, проходящей через центральную массу. Введем в плоскости движения полярные координаты, совместив их начало с центральной массой и направив полярную ось через ближайшую точку орбиты, т. е. через перигелий. Проекции полного ускорения на радиус-вектор и на перпендикуляр к нему определяются известными формулами

$$\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_r = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2; \quad \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_\varphi = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right).$$

С помощью двух первых соотношений (1,2,1) получим

$$\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_r = -\frac{C^2}{pr^2}; \quad \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_\varphi = 0.$$

Вводя период T обращения планеты вокруг Солнца и воспользовавшись очевидными формулами

$$C = \frac{2\pi ab}{T}; \quad p = \frac{b^2}{a},$$

согласно третьему закону Кеплера, находим $\frac{C^2}{p} = 4\pi^2 f$.

Следовательно, приложенная к планете сила имеет проекции

$$F_r = -\frac{4\pi^2 f}{r^2}\frac{Mm}{M+m}; \quad F_\varphi = 0.$$

Это показывает, что между рассматриваемыми массами существует сила взаимного притяжения

$$F = \frac{4\pi^2 f}{M+m}\frac{Mm}{r^2}. \qquad (1,2,3)$$

Величина f, определяющая соотношение между средним расстоянием планеты от Солнца и периодом ее обращения, не может быть универсальной постоянной, поскольку, например, отношение $\frac{a^3}{T^2}$ для системы Солнце — Земля сильно отличается от его значения для системы планета — спутник. Остается предположить, что эта величина обусловлена самими взаимодействующими телами, хотя в случае Солнечной системы она может зависеть от планеты лишь в незначительной степени, так как для различных планет отношения $\frac{a^3}{T^2}$ оказываются очень близкими. Однако наблюдаемые особенности планетных движений, происходящих под действием силы тяготения, не дают возможности непосредственно установить, какие именно свойства взаимодействующих тел определяют величину постоянной f.

На основании уравнения (1,2,3) можно утверждать, что законы Кеплера вместе с общими законами динамики Ньютона определяют зависимость силы притяжения от расстояния между взаимодействующими материальными точками, но не позволяют найти связь между величиной этой силы и какими-либо физическими параметрами тел.

Гравитацию следует считать особым свойством материальных тел, которое качественно отличается от других механических свойств. Мерой этого свойства должна служить особая физическая величина, позволяющая дать количественное выражение способности данного тела к гравитационным взаимодействиям с другими телами. Эта величина получила название гравитационной, или тяжелой, массы. Гравитационная масса материальной точки представляет собой величину, пропорциональную силе, с которой она действует на другую определенным образом выбранную материальную точку, помещенную на стандартном расстоянии от первой. В качестве единицы измерения можно было бы принять гравитационную массу частицы, которая притягивает с определенной силой такую же частицу, находящуюся на расстоянии единицы длины. Однако имеется и другой, практически более удобный способ определения единицы измерения тяжелой массы. В качестве единицы принимают гравитационную массу стандартного тела, например шарика, изготовленного из определенного однородного материала и обладающего единичной инертной массой. При этом гравитационная масса другого тела, имеющего известную инертную массу, может быть найдена только путем измерений. Apriori невозможно судить о соотношении между инертной m и гравитационной m' массами какого-либо тела, отличного от выбранного стандарта.

Сила притяжения между двумя материальными точками должна быть пропорциональна гравитационной массе каждой из них. Поэтому закон притяжения можно представить в следующем виде:

$$F = \frac{\gamma m' M'}{r^2},$$

где γ — коэффициент пропорциональности, играющий роль универсальной постоянной и подлежащий опытному определению.

Сравнивая эту формулу с (1,2,3), находим выражение для постоянной третьего закона Кеплера

$$4\pi^2 f = \gamma (m + M) \frac{m'}{m} \frac{M'}{M}. \qquad (1,2,4)$$

Многочисленные измерения, выполненные с высокой степенью точности, показали, что отношение тяжелой и инертной масс одинаково для всех тел, вследствие чего при принятой единице гравитационной массы должно выполняться равенство $m = m'$.

Следовательно,

$$4\pi^2 f = \gamma(m + M). \qquad (1,2,5)$$

Третий закон Кеплера принимает при этом вид

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\gamma}{4\pi^2}(m + M), \qquad (1,2,6)$$

показывая, что его первоначальная формулировка нуждается в уточнении.

Итак, закон тяготения Ньютона для двух точечных масс, выражающийся обычной формулой

$$F = \frac{\gamma m M}{r^2}, \qquad (1,2,7)$$

представляет собой следствие трех законов Кеплера и найденной опытным путем пропорциональности инертной и гравитационной масс. В такой же форме этот закон выполняется для двух протяженных тел со сферическим распределением масс, если расстояние между их центрами не менее суммы их радиусов. Для произвольных тел, расположенных на достаточно большом расстоянии, формула (1,2,8) применима с точностью до членов порядка $\frac{l^2}{r^2}$, где l — линейные размеры тел, r — расстояние между центрами их масс.

3. Тяготение и тяжесть. После вывода формы закона притяжения важнейшим шагом в развитии ньютоновой теории гравитации было установление тождественности тяжести и тяготения. Доказательство единой природы гравитационного притяжения между небесными телами и силы тяжести на поверхности Земли явилось завершением физических основ теории Ньютона. В известном письме к Галлею (1686) Ньютон назвал это доказательство одним из важнейших своих открытий.

Сущность доказательства Ньютона состоит, как известно, в сравнении ускорения Луны в ее геоцентрическом обращении с ускорением силы тяжести у земной поверхности. Предположив, что оба ускорения обусловлены притяжением Земли, Ньютон показал, что величины этих ускорений хорошо согласуются с законом обратных квадратов.

Завершая вычисление, выполненное в Предложении IV третьей книги «Начал», Ньютон пишет: «Итак, сила, которою Луна удерживается на своей орбите, если ее опустить до поверхности Земли, становится равной силе тяжести, поэтому она и есть та самая сила, которую мы называем тяжестью или тяготением» [2].

Приводимый ниже расчет воспроизводит рассуждения Ньютона в уточненной форме с использованием современных значений астрономических постоянных.