Следовательно,

$$4\pi^2 f = \gamma(m + M). \qquad (1,2,5)$$

Третий закон Кеплера принимает при этом вид

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\gamma}{4\pi^2}(m + M), \qquad (1,2,6)$$

показывая, что его первоначальная формулировка нуждается в уточнении.

Итак, закон тяготения Ньютона для двух точечных масс, выражающийся обычной формулой

$$F = \frac{\gamma m M}{r^2}, \qquad (1,2,7)$$

представляет собой следствие трех законов Кеплера и найденной опытным путем пропорциональности инертной и гравитационной масс. В такой же форме этот закон выполняется для двух протяженных тел со сферическим распределением масс, если расстояние между их центрами не менее суммы их радиусов. Для произвольных тел, расположенных на достаточно большом расстоянии, формула (1,2,8) применима с точностью до членов порядка $\frac{l^2}{r^2}$, где l — линейные размеры тел, r — расстояние между центрами их масс.

3. Тяготение и тяжесть. После вывода формы закона притяжения важнейшим шагом в развитии ньютоновой теории гравитации было установление тождественности тяжести и тяготения. Доказательство единой природы гравитационного притяжения между небесными телами и силы тяжести на поверхности Земли явилось завершением физических основ теории Ньютона. В известном письме к Галлею (1686) Ньютон назвал это доказательство одним из важнейших своих открытий.

Сущность доказательства Ньютона состоит, как известно, в сравнении ускорения Луны в ее геоцентрическом обращении с ускорением силы тяжести у земной поверхности. Предположив, что оба ускорения обусловлены притяжением Земли, Ньютон показал, что величины этих ускорений хорошо согласуются с законом обратных квадратов.

Завершая вычисление, выполненное в Предложении IV третьей книги «Начал», Ньютон пишет: «Итак, сила, которою Луна удерживается на своей орбите, если ее опустить до поверхности Земли, становится равной силе тяжести, поэтому она и есть та самая сила, которую мы называем тяжестью или тяготением» [2].

Приводимый ниже расчет воспроизводит рассуждения Ньютона в уточненной форме с использованием современных значений астрономических постоянных.

Рассмотрим невозмущенное геоцентрическое движение Луны, происходящее по эллиптической орбите с большой полуосью a и с сидерическим периодом T. Следуя приему Ньютона, сравним это движение с невозмущенным движением воображаемого спутника Земли, обращающегося по орбите с большой полуосью a_1 и периодом T_1. Обозначив массы Земли и Луны соответственно через M и μ и пренебрегая массой воображаемого спутника, согласно третьему закону Кеплера, можно написать

$$\frac{a^3}{T^2(M+\mu)} = \frac{a_1^2}{T_1^2 M}. \qquad (1,3,1)$$

Пусть воображаемый спутник обращается непосредственно у земной поверхности, вследствие чего полуось a_1 можно положить равной радиусу Земли R. Если вблизи земной поверхности тяготение тождественно тяжести, то движение спутника происходит с ускорением свободного падения g. Поэтому должны выполняться очевидные равенства

$$T_1 = \frac{2\pi R}{v}; \quad \frac{v^2}{R} = g,$$

из которых следует $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$.

Уравнение (1,3,1) принимает вид

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{gR^2}{a^3}\left(1+\frac{\mu}{M}\right).$$

Если ввести среднее сидерическое движение Луны $n = \frac{2\pi}{T}$, то

$$n = a^{-\frac{3}{2}}\left(1+\frac{\mu}{M}\right)^{\frac{1}{2}} R\sqrt{g}. \qquad (1,3,2)$$

Среднее движение Луны известно из наблюдений с очень высокой точностью. Значение, принятое в 1964 г. Международным астрономическим союзом (МАС), составляет $2{,}6616994890 \cdot 10^{-6}$ *рад* · *сек*$^{-1}$, а теоретическое, выведенное на основании гипотезы Ньютона о тождестве тяжести и тяготения, выражается правой частью равенства (1,3,2). Сравнение теоретического значения с наблюдаемым и является количественной проверкой гипотезы Ньютона.

Переходя к вычислению величины (1,3,2), прежде всего заметим, что a нельзя отождествить со средним расстоянием Луны от Земли, найденным по параллаксу, поскольку действительное геоцентрическое движение Луны является возмущенным, тогда как a представляет собой полуось невозмущенной лунной орбиты. Согласно теории

Хилла, наблюдаемое движение Луны происходит по так называемой вариационной орбите, имеющей форму овала. Среднее расстояние Луны от Земли, отвечающее этой орбите, $a_0 = 3{,}84400 \cdot 10^{10}$ *см* (МАС, 1964). С большой полуосью невозмущенной геоцентрической орбиты Луны оно связано соотношением

$$a_0 = a\left(1 - \frac{1}{6}m^2 + \frac{1}{3}m^3 + \frac{407}{2304}m^4 - \frac{67}{288}m^5 - \cdots\right),$$

где параметр m равен 0,08084893... . Воспользовавшись этим соотношением, получим величину большой полуоси невозмущенной лунной орбиты $a = 3{,}84749 \cdot 10^{10}$ *см*.

Произведение $R\sqrt{g}$ отвечает невозмущенной круговой орбите воображаемого спутника. Движение его по такой орбите происходило бы при условии, что масса Земли сосредоточена в ее центре или что распределение массы является строго сферическим. В этом случае величина $R\sqrt{g}$ не зависит от радиуса R, поскольку вне Земли ускорение силы тяжести изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния от центра.

Величина $(R\sqrt{g})^2$ совпадает с так называемой геоцентрической гравитационной постоянной, равной произведению постоянной тяготения на массу Земли. Принятое в настоящее время значение $(R\sqrt{g})^2 = 3{,}98603 \cdot 10^{20}$ *см*$^2 \cdot$ *сек*$^{-2}$ (МАС, 1964).

Отношение масс Луны и Земли, по тому же международному соглашению 1964 г., определяется величиной $\left(\frac{\mu}{M}\right)^{-1} = 81{,}30$. Однако имеется более точное значение, полученное из недавних наблюдений лунников и космических ракет (США): $\left(\frac{\mu}{M}\right)^{-1} = 81{,}3015 \pm 0{,}0033$.

Вычисления, выполненные с указанными значениями постоянных, дают $2{,}66170 \cdot 10^{-6}$ *рад* $\cdot$ *сек*$^{-1}$, что прекрасно согласуется с наблюдаемым значением среднего движения Луны. Относительная величина различия не превышает $2 \cdot 10^{-6}$.

В пределах доступной в настоящее время точности выводы небесной механики, вместе с результатами астрономических наблюдений, подтверждают гипотезу Ньютона о том, что тяжесть у земной поверхности и сила тяготения, определяющая движение небесных тел в мировом пространстве, имеют одинаковую природу.

4. Равенство инертной и тяжелой масс. Закон всемирного тяготения Ньютона, как мы видели, представляет собой следствие законов Кеплера и равенства инертной и тяжелой масс. Это равенство, выражающее наиболее характерную особенность полей гравитации, имеет в теории Ньютона фундаментальное значение, поэтому мы рассмотрим его подробнее.