Хилла, наблюдаемое движение Луны происходит по так называемой вариационной орбите, имеющей форму овала. Среднее расстояние Луны от Земли, отвечающее этой орбите, $a_0 = 3{,}84400 \cdot 10^{10}$ *см* (МАС, 1964). С большой полуосью невозмущенной геоцентрической орбиты Луны оно связано соотношением

$$a_0 = a\left(1 - \frac{1}{6}m^2 + \frac{1}{3}m^3 + \frac{407}{2304}m^4 - \frac{67}{288}m^5 - \cdots\right),$$

где параметр m равен 0,08084893... . Воспользовавшись этим соотношением, получим величину большой полуоси невозмущенной лунной орбиты $a = 3{,}84749 \cdot 10^{10}$ *см*.

Произведение $R\sqrt{g}$ отвечает невозмущенной круговой орбите воображаемого спутника. Движение его по такой орбите происходило бы при условии, что масса Земли сосредоточена в ее центре или что распределение массы является строго сферическим. В этом случае величина $R\sqrt{g}$ не зависит от радиуса R, поскольку вне Земли ускорение силы тяжести изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния от центра.

Величина $(R\sqrt{g})^2$ совпадает с так называемой геоцентрической гравитационной постоянной, равной произведению постоянной тяготения на массу Земли. Принятое в настоящее время значение $(R\sqrt{g})^2 = 3{,}98603 \cdot 10^{20}$ *см*^{2} · *сек*$^{-2}$ (МАС, 1964).

Отношение масс Луны и Земли, по тому же международному соглашению 1964 г., определяется величиной $\left(\frac{\mu}{M}\right)^{-1} = 81{,}30$. Однако имеется более точное значение, полученное из недавних наблюдений лунников и космических ракет (США): $\left(\frac{\mu}{M}\right)^{-1} = 81{,}3015 \pm 0{,}0033$.

Вычисления, выполненные с указанными значениями постоянных, дают $2{,}66170 \cdot 10^{-6}$ *рад* · *сек*$^{-1}$, что прекрасно согласуется с наблюдаемым значением среднего движения Луны. Относительная величина различия не превышает $2 \cdot 10^{-6}$.

В пределах доступной в настоящее время точности выводы небесной механики, вместе с результатами астрономических наблюдений, подтверждают гипотезу Ньютона о том, что тяжесть у земной поверхности и сила тяготения, определяющая движение небесных тел в мировом пространстве, имеют одинаковую природу.

4. Равенство инертной и тяжелой масс. Закон всемирного тяготения Ньютона, как мы видели, представляет собой следствие законов Кеплера и равенства инертной и тяжелой масс. Это равенство, выражающее наиболее характерную особенность полей гравитации, имеет в теории Ньютона фундаментальное значение, поэтому мы рассмотрим его подробнее.

Равенство инертной и тяжелой масс содержится уже в законе падения Галилея, согласно которому все тела при свободном падении в поле тяжести движутся с одинаковыми ускорениями. Пользуясь законом тяготения и вторым законом динамики, вычислим ускорение свободного падения.

Пусть на тело с тяжелой массой m' действует сила притяжения $\frac{\gamma M' m'}{R^2}$, где R и M' — радиус и тяжелая масса Земли. Согласно второму закону динамики, эта сила равна произведению инертной массы m данного тела на ускорение свободного падения. Следовательно,

$$g = \frac{\gamma M'}{R^2} \cdot \frac{m'}{m}. \qquad (1,4,1)$$

Поскольку первый множитель правой части является общим для всех тел, отношение $\frac{m'}{m}$ определяется величиной ускорения. Если последнее не зависит от падающего тела, то $\frac{m'}{m} = \text{const}$ и поэтому, при соответствующем выборе единиц, для всех тел должно выполняться равенство $m' = m$.

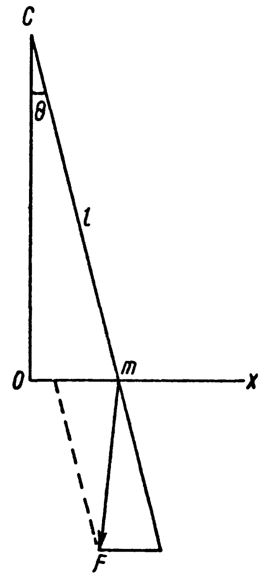

Рис. 1.

Непосредственное измерение ускорения при свободном падении тел в поле тяжести связано со значительными трудностями, поэтому проверка этого равенства с помощью (1,4,1) оказывается очень грубой.

Более точную эмпирическую проверку закона $m' = m$ можно произвести, изучая колебания маятников.

Рассмотрим математический маятник, состоящий из нити длиной l и материальной точки с инертной и тяжелой массами m, m'. На материальную точку со стороны Земли действует вертикальная сила притяжения $F = n^2 ml$, где

$$n^2 = \frac{gm'}{lm}, \; g = \frac{\gamma M}{R^2}.$$

При малых отклонениях горизонтальная проекция этой силы равна $-F\operatorname{tg}\theta = -n^2 mx$. Поэтому уравнение колебаний маятника имеет вид $\ddot{x} + n^2 x = 0$. Решением его служит функция $x = A\cos nt + B\sin nt$, отвечающая гармоническим колебаниям с периодом

$$T = \frac{2\pi}{n} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}\,\frac{m}{m'}}. \qquad (1,4,2)$$

Формула (1,4,2) показывает, что доказательством пропорциональности инертной и тяжелой масс может служить независимость периода колебаний от выбора тела маятника.

Впервые подобные опыты производились Ньютоном. Они описаны в Предложении VI третьей книги «Начал». «Я произвел такое испытание для золота, серебра, свинца, стекла, обыкновенной соли, дерева, воды, пшеницы»,— замечает Ньютон и после краткого рассказа об условиях экспериментов добавляет, что даже разность меньше 0,001 полной массы была бы «с ясностью обнаружена этими опытами» [2].

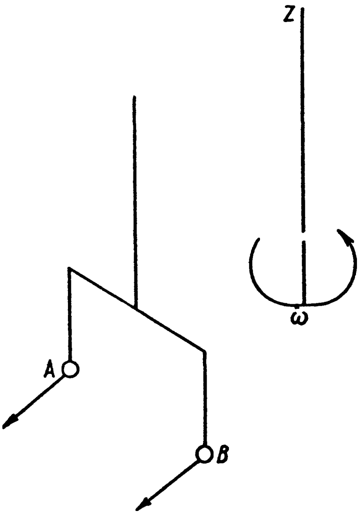

Рис. 2.

В 1828 г. опыты с маятниками повторил Бессель [4], применявший грузы из самых разнообразных материалов (различные сорта латуни, железо, свинец, серебро, золото, метеоритное железо, мрамор, кварц и др.). По тщательности они значительно превосходили опыты Ньютона, однако и их точность оставалась относительно низкой. Высокая точность была достигнута только в опытах Этвеша [5], результаты которых не оставили серьезных сомнений в пропорциональности тяжелой и инертной масс.

Первая серия экспериментов Этвеша выполнена в 1889, вторая — в 1908 г. Принципиальная схема этих экспериментов показана на рис. 2. Пусть унифиляр AB вместе с системой отсчета равномерно вращается вокруг вертикальной оси z с угловой скоростью ω. Считая тяжелые массы тел A и B одинаковыми, обозначим их инертные массы через m_1, m_2. Центробежное ускорение, обусловленное вращением всей системы, равно $\omega^2 r$, где r — расстояние унифиляра от оси вращения (это расстояние принимается весьма большим по сравнению с плечом AB). При различии инертных масс на тела A, B действуют различные центробежные силы $m_1\omega^2 r$ и $m_2\omega^2 r$, которые создают вращающий момент $(m_2 - m_1)\omega^2 r^2$. Вследствие этого унифиляр должен испытать кручение, при котором возникает такой же вращающий момент противоположного направления. Обозначив угол поворота через $\Delta\varphi$, можно написать

$$k\Delta\varphi = (m_2 - m_1)\,\omega^2 r^2, \qquad (1,4,3)$$

где k — коэффициент, зависящий от свойств унифиляра.

В опытах Этвеша вращающейся системой отсчета служила

Земля, вследствие чего угол между вертикальным направлением и осью вращения зависел от географической широты места наблюдения. Опыты Этвеша были выполнены весьма тщательно и подтвердили равенство инертной и тяжелой масс с относительной точностью $5 \cdot 10^{-9}$. В 1935 г. их повторил в Венгрии Реннер.

В 1961 г. очень интересный эксперимент осуществлен Дике [6]. Для выяснения его основной идеи представим унифиляр с двумя грузами, расположенный над полюсом и принимающий участие во вращении Земли. Вместе с Землей унифиляр каждые 24 *ч* поворачивается на 360°, совершая при этом движение в поле тяготения Солнца. В орбитальном движении вокруг Солнца грузы *A* и *B* имеют ускорения

$$\frac{\gamma M'_{\odot}}{a^2}\,\frac{m'_1}{m_1}, \quad \frac{\gamma M'_{\odot}}{a^2}\,\frac{m'_2}{m_2},$$

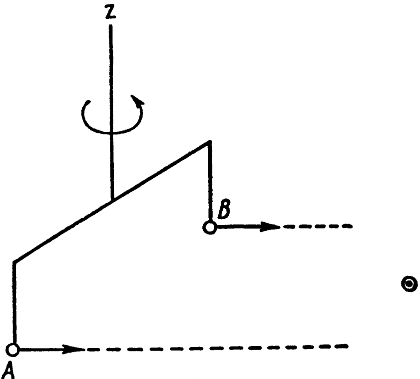

Рис. 3.

где m_1, m_2 и m'_1, m'_2 — их инертные и гравитационные массы соответственно, $M'_{\odot}$ — гравитационная масса Солнца, a — расстояние последнего от Земли. Если эти ускорения одинаковы, то коромысло унифиляра будет покоиться относительно Земли. Если же инертная и тяжелая массы не пропорциональны и потому указанные ускорения различны, то груз с бо́льшим ускорением периодически ускоряет или замедляет равномерное вращение коромысла. В системе отсчета, связанной с Землей, унифиляр должен в этом случае совершать колебания с периодом 24 *ч*. Отсутствие таких колебаний и будет служить доказательством пропорциональности инертной и тяжелой масс.

В опытах Дике, производившихся с соблюдением всевозможных предосторожностей и в условиях высокого вакуума, равенство инертной и тяжелой масс проверено с относительной точностью около 10^{-10} (по сравнению с экспериментами Этвеша точность повышена приблизительно в 50 раз).

Равенство инертной и гравитационной масс может быть также проверено путем сравнения выводов небесной механики с данными астрономических наблюдений, хотя по точности такая проверка значительно уступает лабораторному эксперименту. В качестве примера сравним отношения гравитационной и инертной масс для Луны и для искусственного спутника Земли.

Применив третий закон Кеплера к невозмущенному движению Луны и воспользовавшись соотношением (1,2,4), получим

$$\frac{a_1^3}{T_1^2}=\frac{\gamma}{4\pi^2}(M+\mu)\frac{M'}{M}\frac{\mu'}{\mu},$$

где a_1, T_1 — среднее невозмущенное расстояние и период обращения Луны, M, M' и μ, μ' — инертные и тяжелые массы Земли и Луны соответственно.

Для искусственного спутника, обращающегося вокруг Земли по круговой орбите радиуса R, этот же закон выражается уравнением

$$\frac{R^3}{T_1^2}=\frac{\gamma M}{4\pi^2}\frac{M'}{M}\frac{m'}{m},$$

где, как и прежде (см. п. 3), период обращения связан с ускорением силы тяжести формулой

$$T=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Комбинируя полученные равенства, имеем

$$\frac{4\pi^2a_1^3}{gR^2T_1^2}=\left(1+\frac{\mu}{M}\right)\frac{\mu'}{\mu}:\frac{m'}{m},$$

или, если ввести среднее движение Луны и геоцентрическую гравитационную постоянную,

$$\frac{\mu'}{\mu}:\frac{m'}{m}=\frac{n_1^2a_1^3}{E}\left(1+\frac{\mu}{M}\right)^{-1}. \qquad (1,4,4)$$

Подобным же образом можно произвести сравнение гелиоцентрического обращения Земли с Луной и искусственной планеты.

В этом случае получается формула

$$\frac{M'+\mu'}{M+\mu}:\frac{M_1'}{M}=\frac{n^2a^3}{S}\left(1+\frac{M+\mu}{M_\odot}\right)^{-1}, \qquad (1,4,5)$$

связывающая отношения гравитационных и инертных масс Земли с Луной и искусственной планеты в зависимости от гелиоцентрической гравитационной постоянной S, среднего движения Земли и большой полуоси a земной орбиты.

Вычисления показывают, что правые части формул (1,4,4) и (1,4,5) отличаются от единицы на величину порядка 10^{-6}. Более точная проверка оказывается невозможной, поскольку соотношение между входящими в эти формулы массами известно в настоящее время с относительно большими погрешностями.

Итак, мы видим, что принятое в механике Ньютона равенство инертной и тяжелой масс является надежно установленным эмпирическим законом, который с высокой степенью точности подтверждается лабораторными опытами и хорошо согласуется с результатами астрономических наблюдений.

5. Гравитационный потенциал. Основной характеристикой поля тяготения служит напряженность, т. е. отнесенная к единице массы сила, действующая на частицу, помещенную в данную точку поля. В дальнейшем напряженность обозначим через $\mathbf{f}$. Пользуясь этим понятием, гравитационное поле с математической точки зрения можно рассматривать как векторное поле, изображаемое семейством силовых линий, т. е. линий вектора $\mathbf{f}$.

Из закона тяготения Ньютона непосредственно следует, что векторное поле напряженности связано с полем скалярной функции, получившей название гравитационного потенциала. Эта связь определяется известным соотношением

$$\mathbf{f} = \operatorname{grad} \varphi, \tag{1,5,1}$$

показывающим, что в каждой точке поля напряженность направлена по нормали к поверхности равного потенциала. Таким образом, силовые линии поля гравитации являются семейством ортогональных траекторий поверхностей постоянных потенциалов.

Гравитационный потенциал в данной точке поля с декартовыми координатами x, y, z определяется формулой

$$\varphi = \gamma \iiint \frac{\rho d\tau}{r}; \quad r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2, \tag{1,5,2}$$

где $d\tau$ — элемент объема в точке x', y', z', ρ — плотность в той же точке, r — расстояние элемента $d\tau$ от данной точки x, y, z. Интегрируем по координатам x', y', z' в пределах объема тела, создающего рассматриваемое поле. Нетрудно показать, что если размеры и плотность этого тела конечны, то гравитационный потенциал и соответствующая ему, согласно (1,5,1), напряженность конечны и непрерывны во всех точках поля, расположенных как вне, так и внутри тела.

В простейшем случае, когда источником поля тяготения служит материальная точка с заданной массой M, потенциал поля на расстоянии r равен

$$\varphi = \frac{\gamma M}{r}. \tag{1,5,3}$$

Такой же формулой определяется потенциал во внешних точках поля, созданного телом со сферическим распределением массы.