Итак, мы видим, что принятое в механике Ньютона равенство инертной и тяжелой масс является надежно установленным эмпирическим законом, который с высокой степенью точности подтверждается лабораторными опытами и хорошо согласуется с результатами астрономических наблюдений.

**5. Гравитационный потенциал.** Основной характеристикой поля тяготения служит напряженность, т. е. отнесенная к единице массы сила, действующая на частицу, помещенную в данную точку поля. В дальнейшем напряженность обозначим через $\mathbf{f}$. Пользуясь этим понятием, гравитационное поле с математической точки зрения можно рассматривать как векторное поле, изображаемое семейством силовых линий, т. е. линий вектора $\mathbf{f}$.

Из закона тяготения Ньютона непосредственно следует, что векторное поле напряженности связано с полем скалярной функции, получившей название гравитационного потенциала. Эта связь определяется известным соотношением

$$\mathbf{f} = \operatorname{grad} \varphi, \qquad (1,5,1)$$

показывающим, что в каждой точке поля напряженность направлена по нормали к поверхности равного потенциала. Таким образом, силовые линии поля гравитации являются семейством ортогональных траекторий поверхностей постоянных потенциалов.

Гравитационный потенциал в данной точке поля с декартовыми координатами $x$, $y$, $z$ определяется формулой

$$\varphi = \gamma \iiint \frac{\rho d\tau}{r}; \quad r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2, \qquad (1,5,2)$$

где $d\tau$ — элемент объема в точке $x'$, $y'$, $z'$, $\rho$ — плотность в той же точке, $r$ — расстояние элемента $d\tau$ от данной точки $x$, $y$, $z$. Интегрируем по координатам $x'$, $y'$, $z'$ в пределах объема тела, создающего рассматриваемое поле. Нетрудно показать, что если размеры и плотность этого тела конечны, то гравитационный потенциал и соответствующая ему, согласно (1,5,1), напряженность конечны и непрерывны во всех точках поля, расположенных как вне, так и внутри тела.

В простейшем случае, когда источником поля тяготения служит материальная точка с заданной массой $M$, потенциал поля на расстоянии $r$ равен

$$\varphi = \frac{\gamma M}{r}. \qquad (1,5,3)$$

Такой же формулой определяется потенциал во внешних точках поля, созданного телом со сферическим распределением массы.

Во внутренних точках этого тела потенциал на расстоянии $r$ от центра равен

$$\varphi = \frac{\gamma M(r)}{r} + 4\pi\gamma \int_r^R \rho(r)\, r dr. \tag{1,5,4}$$

Через $M(r)$ здесь обозначена масса внутренней части тела, ограниченной сферой радиуса $r$.

Соответствующая потенциалу (1,5,4) напряженность, как нетрудно убедиться, равна $\frac{\gamma M(r)}{r^2}$ и направлена к центру; она обусловлена массой $M(r)$ внутренней области, тогда как внешний сферический слой создает в этой области поле с постоянным потенциалом, которому отвечает нулевая напряженность.

В частном случае, когда $\rho = \text{const}$, формула (1,5,4) дает

$$\varphi = 2\pi\gamma\rho\left(R^2 - \frac{1}{3}r^2\right), \tag{1,5,5}$$

вследствие чего напряженность по абсолютному значению оказывается равной $\frac{4}{3}\pi\gamma\rho r$.

В приложениях встречаются случаи, когда распределение плотности заметно отличается от сферического. Вблизи такого тела поле гравитации может иметь очень сложное строение. Однако, по мере удаления от тела, резкие особенности в строении поля постепенно сглаживаются, и на достаточно большом расстоянии поле имеет почти такую же структуру, как в случае материальной точки. Если $r$ — расстояние от центра массы тела, $R$ — характерный размер последнего, то с относительной точностью порядка $\frac{R}{r}$ включительно гравитационный потенциал при любой форме тела совпадает с (1,5,3).

Во внешних точках гравитационный потенциал удовлетворяет дифференциальному уравнению Лапласа

$$\nabla^2\varphi = 0, \tag{1,5,6}$$

а во внутренних точках тела — уравнению Пуассона

$$\nabla^2\varphi = -4\pi\gamma\rho. \tag{1,5,7}$$

Изучение уравнений Лапласа и Пуассона составляет предмет теории потенциала, рассмотрение которой не входит в нашу задачу. Отметим только, что в этой теории фундаментальное значение имеет следующая теорема Дирихле: если функция $\varphi$ вне масс отвечает уравнению (1,5,6), внутри масс — уравнению (1,5,7) и вместе со своим градиентом остается конечной и непрерывной во всем пространстве, стремясь на бесконечности к нулю, как $\frac{1}{r}$, то она имеет единственное значение, совпадающее с (1,5,2). Из этой важной теоремы следует, что задание гравитационного потенциала соотношением (1,5,2) эквивалентно его заданию с помощью уравнений (1,5,6) и (1,5,7). При указанных свойствах гравитационного потенциала уравнения Лапласа и Пуассона вместе с формулой (1,5,1) являются лишь иным выражением закона тяготения Ньютона.

**6. Небесная механика.** На основе общих законов классической динамики и закона всемирного тяготения Ньютона возникла и получила широкое развитие небесная механика, предметом которой является изучение движения небесных тел, главным образом тел Солнечной системы. Обыкновенно в небесной механике учитываются только гравитационные взаимодействия между изучаемыми телами, тогда как силы иной природы не принимаются во внимание. В большинстве случаев такие силы (например, сопротивление среды, электромагнитные взаимодействия и др.) не оказывают заметного влияния на движение небесных тел, но при определенных условиях они могут играть значительную роль. При изучении движения тел Солнечной системы учитываются лишь внутренние силы, поскольку внешние воздействия на систему, т. е. силы, приложенные со стороны других небесных тел (например, со стороны ближайших звезд), обыкновенно пренебрежимы. Расстояния между членами Солнечной системы велики по сравнению с их размерами, поэтому при изучении движения эти тела можно рассматривать как материальные точки. Такому упрощению способствует также почти сферическая форма всех крупных членов Солнечной системы — Солнца, больших планет и их спутников.

Простейшей из задач небесной механики является задача двух тел, исчерпывающее решение которой найдено еще Ньютоном. С математической точки зрения она приводит к системе дифференциальных уравнений шестого порядка. Поэтому общее решение задачи содержит шесть постоянных интегрирования, которые играют роль параметров, однозначно определяющих все обстоятельства движения. В астрономии принят исторически сложившийся выбор таких параметров, получивших название элементов орбиты.

На рис. 4 изображена система декартовых прямоугольных координат, начало которой совмещено с центром Солнца. Плоскость $xy$ совпадает с плоскостью эклиптики, в которой происходит годичное обращение Земли вокруг Солнца, а направление оси $x$ связано с некоторой точкой небесной сферы (так называемой точкой весны), которая может быть с большой точностью определена из наблюдений. В соответствии с задачей двух тел геоцентрическое движение планеты происходит вокруг Солнца по законам Кеплера. Плоскость