всем пространстве, стремясь на бесконечности к нулю, как $\frac{1}{r}$, то она имеет единственное значение, совпадающее с (1,5,2). Из этой важной теоремы следует, что задание гравитационного потенциала соотношением (1,5,2) эквивалентно его заданию с помощью уравнений (1,5,6) и (1,5,7). При указанных свойствах гравитационного потенциала уравнения Лапласа и Пуассона вместе с формулой (1,5,1) являются лишь иным выражением закона тяготения Ньютона.

6. Небесная механика. На основе общих законов классической динамики и закона всемирного тяготения Ньютона возникла и получила широкое развитие небесная механика, предметом которой является изучение движения небесных тел, главным образом тел Солнечной системы. Обыкновенно в небесной механике учитываются только гравитационные взаимодействия между изучаемыми телами, тогда как силы иной природы не принимаются во внимание. В большинстве случаев такие силы (например, сопротивление среды, электромагнитные взаимодействия и др.) не оказывают заметного влияния на движение небесных тел, но при определенных условиях они могут играть значительную роль. При изучении движения тел Солнечной системы учитываются лишь внутренние силы, поскольку внешние воздействия на систему, т. е. силы, приложенные со стороны других небесных тел (например, со стороны ближайших звезд), обыкновенно пренебрежимы. Расстояния между членами Солнечной системы велики по сравнению с их размерами, поэтому при изучении движения эти тела можно рассматривать как материальные точки. Такому упрощению способствует также почти сферическая форма всех крупных членов Солнечной системы — Солнца, больших планет и их спутников.

Простейшей из задач небесной механики является задача двух тел, исчерпывающее решение которой найдено еще Ньютоном. С математической точки зрения она приводит к системе дифференциальных уравнений шестого порядка. Поэтому общее решение задачи содержит шесть постоянных интегрирования, которые играют роль параметров, однозначно определяющих все обстоятельства движения. В астрономии принят исторически сложившийся выбор таких параметров, получивших название элементов орбиты.

На рис. 4 изображена система декартовых прямоугольных координат, начало которой совмещено с центром Солнца. Плоскость xy совпадает с плоскостью эклиптики, в которой происходит годичное обращение Земли вокруг Солнца, а направление оси x связано с некоторой точкой небесной сферы (так называемой точкой весны), которая может быть с большой точностью определена из наблюдений. В соответствии с задачей двух тел геоцентрическое движение планеты происходит вокруг Солнца по законам Кеплера. Плоскость

орбиты пересекается с плоскостью эклиптики по линии узлов ON. Узел N, в котором планета находится в момент перехода из области отрицательных значений координаты z в область положительных значений, называется *восходящим*; противоположный узел орбиты называется *нисходящим*. Угол Ω, определяющий направление из центра Солнца на восходящий узел орбиты, служит одним из элементов орбиты; он называется *долготой восходящего узла*. Вторым элементом является угловое расстояние ω от узла до *перигелия*, т. е. до ближайшей к Солнцу точки орбиты, обозначенной на нашем рисунке буквой π. Угол между плоскостью орбиты и эклиптикой равен углу i, образованному осью z с нормалью к плоскости движения планеты; он называется наклонностью и служит третьим элементом. Большая полуось a и эксцентриситет e определяют размеры и форму планетной орбиты, а момент прохождения через перигелий τ позволяет связать положение планеты на орбите со временем. Совокупность всех шести элементов Ω, i, ... τ дает возможность однозначно определить положение планеты в пространстве в любой момент времени.

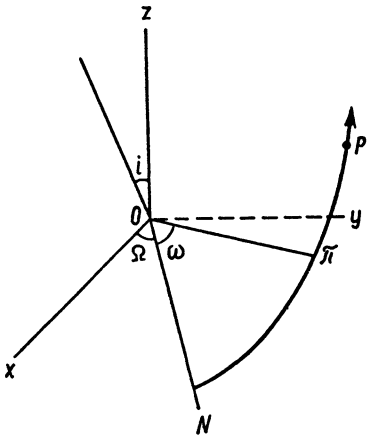

Рис. 4.

При изучении движения спутников планет перечисленные элементы орбиты могут иметь несколько иной смысл. Например, в случае искусственного спутника Земли ориентировку плоскости орбиты в пространстве удобнее определять наклонностью по отношению к плоскости экватора, а параметром τ считать момент прохождения спутника через *перигей*, т. е. точку орбиты, ближайшую к земной поверхности.

При гиперболическом движении параметрами орбиты могут служить те же шесть элементов. Что касается параболического движения, то для его задания достаточно пяти элементов орбиты (парабола характеризуется одним лишь фокальным *параметром* p — половиной хорды, проведенной через фокус перпендикулярно к оси симметрии; вместо *параметра* часто употребляют *перигелийное* расстояние $q = \frac{p}{2}$).

Во всех трех случаях постоянные элементы орбиты служат характеристиками невозмущенного движения, ко-

торое происходит под действием гравитационного притяжения со стороны центрального тела. В Солнечной системе движение тела можно считать невозмущенным только в соответствующем приближении, поскольку в действительности оно подвергается притяжению со стороны всех других членов системы. Поэтому главное содержание небесной механики состоит в изучении задачи n тел, т. е. задачи о движении нескольких материальных точек, взаимодействующих по закону тяготения Ньютона. При $n \geqslant 3$ строгое и в то же время практически эффективное решение этой задачи в общем случае оказывается невозможным. Поэтому в небесной механике рассматриваются различные специальные случаи и разрабатываются приближенные методы с учетом тех или иных особенностей Солнечной системы. К числу специальных случаев относится, например, случай Лагранжа в задаче трех тел, имеющий место при определенных начальных условиях, и так называемая ограниченная задача трех тел, когда два массивные тела движутся вокруг общего центра масс под влиянием взаимного притяжения, а третье тело имеет бесконечно малую массу. Однако частные случаи, допускающие строгое математическое решение, играют в небесной механике второстепенную роль. Обыкновенно дифференциальные уравнения движения небесных тел интегрируются приближенно с помощью аналитических или численных методов, позволяющих получить решение задачи с достаточной точностью. Не имея возможности даже кратко останавливаться на характеристике этих методов, мы приведем здесь группу формул небесной механики, которые будут неоднократно использоваться в дальнейшем при исследовании возмущенного движения.

При интегрировании уравнений невозмущенного движения, происходящего в поле тяготения одного лишь центрального тела, шесть элементов орбиты играют роль произвольных постоянных. Это значит, в частности, что под влиянием притяжения Солнца каждая планета совершает кеплерово движение с постоянными элементами орбиты. Пользуясь методом вариации произвольных постоянных, нетрудно показать, что возмущенное движение можно представить как кеплерово движение с переменными элементами орбиты. Эти элементы, называемые оскулирующими, должны изменяться со временем в соответствии с весьма сложной системой дифференциальных уравнений Лагранжа. Отвечающая им оскулирующая орбита определяется для каждого заданного момента положением и скоростью планеты по формулам невозмущенного движения, применяемым в предположении, что начиная с этого момента возмущающая сила не действует на планету.

Допустим, что к данному телу, кроме притяжения со стороны центрального тела, приложена возмущающая сила. Обусловленное этой силой возмущающее ускорение зададим тремя

проекциями: на направление радиуса-вектора, на перпендикуляр к нему и на нормаль к плоскости оскулирующей орбиты. Обозначим эти проекции соответственно через R, S, W. Проекцию R условимся считать положительной, если она отвечает возрастанию радиуса-вектора, т. е. направлена от планеты в противоположную от центрального тела сторону. Положительная проекция S соответствует направлению обращения планеты, образуя острый угол со скоростью последней. Нормаль к плоскости орбиты направим в ту сторону, при наблюдении с которой обращение планеты представляется происходящим против часовой стрелки.

Система уравнений Лагранжа для оскулирующих элементов имеет вид (см., например, [7]):

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r\sin(\omega+\varphi)}{na^2(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\sin i} W;$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{r\cos(\omega+\varphi)}{na^2(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} W;$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi}{nae} R + \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\sin\varphi}{nae}\left(1+\frac{r}{p}\right)S - \frac{r\sin(\omega+\varphi)\operatorname{ctg} i}{na^2(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} W;$$

$$\frac{da}{dt} = \frac{2e\sin\varphi}{n(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} R + \frac{2a(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{nr} S; \quad \frac{de}{dt} = \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\sin\varphi}{na} R + \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{na^2e}\left[\frac{a^2(1-e^2)}{r} - r\right]S; \tag{1,6,1}$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{1}{na}\left(\frac{2r}{a} - \frac{1-e^2}{e}\cos\varphi\right)R - \frac{(1-e^2)\sin\varphi}{nae}\left(1+\frac{r}{p}\right)S.$$

Для элементов орбиты здесь приняты указанные выше обозначения. Величина n представляет собой среднее движение, соответствующее оскулирующей орбите, $\sigma = -n\tau$. Полярный угол φ (так называемая истинная аномалия) отсчитывается от оси, проведенной из фокуса через перигелий орбиты.

Если возмущающее ускорение достаточно мало, то элементы орбиты изменяются со временем медленно, и потому, применяя уравнения (1,6,1) к не очень большим промежуткам времени, в правых частях этих уравнений можно сохранить постоянные значения элементов.

Во многих случаях оскулирующие элементы удобно рассматривать в виде функций истинной аномалии. С этой целью уравнения (1,6,1) следует преобразовать с помощью законов Кеплера, которые мы напишем в форме

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}, \quad \frac{dt}{d\varphi} = r^2\mu^{-\frac{1}{2}}p^{-\frac{1}{2}}, \quad n = \mu^{\frac{1}{2}}p^{-\frac{3}{2}}(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}, \tag{1,6,2}$$

где $\mu = \gamma(M + m)$.

Умножая уравнения Лагранжа на $\frac{dt}{d\varphi}$, приведем их к следующему виду:

$$\begin{aligned}
\frac{d\Omega}{d\varphi} &= \frac{\sin(\omega + \varphi)}{\mu p \sin i} r^3 W;\\
\frac{di}{d\varphi} &= \frac{\cos(\omega + \varphi)}{\mu p} r^3 W;\\
\frac{d\omega}{d\varphi} &= -\frac{\cos\varphi}{\mu e} r^2 R + \frac{(2 + e\cos\varphi)\sin\varphi}{\mu p e} r^3 S - \frac{\sin(\omega + \varphi)\cot i}{\mu p} r^3 W;\\
\frac{da}{d\varphi} &= \frac{2pe\sin\varphi}{\mu(1 - e^2)^2} r^2 R + \frac{2p^2}{\mu(1 - e^2)^2} rS;\\
\frac{de}{d\varphi} &= \frac{\sin\varphi}{\mu} r^2 R + \frac{e + 2\cos\varphi + e\cos^2\varphi}{\mu p} r^3 S;\\
\frac{d\sigma}{d\varphi} &= -\frac{(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}{\mu p e}(2e - \cos\varphi - e\cos^2\varphi) r^3 R -\\
&\quad - \frac{(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}\sin\varphi}{\mu p e}(2 + e\cos\varphi) r^3 S.
\end{aligned} \tag{1,6,3}$$

Если X, Y, Z — декартовы проекции возмущающего ускорения, вычисленные в системе координат рис. 4, то принятые в уравнениях Лагранжа проекции R, S, W находятся по формулам

$$\begin{aligned}
R &= X\cos\alpha_1 + Y\cos\alpha_2 + Z\cos\alpha_3;\\
S &= X\cos\beta_1 + Y\cos\beta_2 + Z\cos\beta_3;\\
W &= X\cos\gamma_1 + Y\cos\gamma_2 + Z\cos\gamma_3,
\end{aligned} \tag{1,6,4}$$

где $\alpha_1, \ldots, \beta_1, \ldots, \gamma_1, \ldots$ — углы между направлениями R, S, W и осями декартовых координат. Из рис. 4 непосредственно следуют соотношения

$$\cos\alpha_1 = \cos(\omega + \varphi), \quad \cos\alpha_2 = \sin(\omega + \varphi)\cos i,$$
$$\cos\alpha_3 = \sin(\omega + \varphi)\sin i;$$

$$\cos\beta_1 = -\sin(\omega+\varphi), \quad \cos\beta_2 = \cos(\omega+\varphi)\cos i,$$
$$\cos\beta_3 = \cos(\omega+\varphi)\sin i; \qquad (1,6,5)$$
$$\cos\gamma_1 = 0; \quad \cos\gamma_2 = -\sin i; \quad \cos\gamma_3 = \cos i.$$

В некоторых случаях возмущающее ускорение удобнее задавать другим способом, чем это принято в уравнениях (1,6,1) и (1,6,3). В плоскости орбиты ускорение проектируют на радиальное направление и на направление скорости планеты. Возмущающее ускорение задают при этом проекциями R, T, W, преобразуя соответствующим образом уравнения для оскулирующих элементов.

Далее мы будем во всех случаях пользоваться уравнениями Лагранжа в форме (1,6,1) или (1,6,3), так как возмущающее ускорение T нетрудно заменить проекциями на радиус-вектор и на перпендикуляр к нему. Эти проекции определяются формулами

$$R = T\cos\alpha, \quad S = T\sin\alpha, \qquad (1,6,6)$$

где через α обозначен угол между направлением радиуса-вектора и скоростью движения планеты. Его находят с помощью соотношений

$$\cos\alpha = \frac{e\sin\varphi}{\sqrt{1+e^2+2e\cos\varphi}}, \quad \sin\alpha = \frac{1+e\cos\varphi}{\sqrt{1+e^2+2e\cos\varphi}}. \qquad (1,6,7)$$

7. Принципиальные недостатки теории Ньютона. Как известно, небесная механика Ньютона широко разрабатывалась и долгое время служила образцом для других разделов классической физики. Она позволила с большой точностью объяснить особенности движений тел Солнечной системы и привела к открытию новой планеты, предсказанной Леверье и Адамсом путем анализа наблюдаемых неравенств в движении Урана. Однако, отмечая быстрое и успешное развитие небесной механики Ньютона, необходимо также указать на серьезные принципиальные недостатки в ее физических основах.

Одним из них является необъяснимость пропорциональности инертной и тяжелой масс. Эта пропорциональность свидетельствует о глубокой связи между двумя совершенно различными физическими свойствами материальных тел: пассивным стремлением сохранить состояние движения и способностью к активному гравитационному взаимодействию с другими телами. В механике Ньютона равенство $m' = m$ никак не объясняется; оно как бы случайно, а выраженная им связь между тяготением и инерцией не находит истолкования. Мы можем только сказать, что, при соблюдении равенства $m' = m$ в заданном поле тяготения, ускорение материальной точки не зависит от ее массы и является характеристикой поля, совпадая с вектором напряженности в данной точке. Эта закономерность представляет собой наиболее общую и харак-