Глава II. ПОПЫТКИ УТОЧНЕНИЯ ЗАКОНА НЬЮТОНА

1. Закон тяготения в форме Клеро. В течение XVIII и XIX ст. развитие небесной механики сопровождалось попытками уточнить закон тяготения Ньютона путем введения различных малых поправок в формулу обратных квадратов. До создания теории относительности такие попытки в большинстве случаев имели характер формальных гипотез, высказывавшихся без глубокого пересмотра основ механики Ньютона. Появление этих гипотез связано с отдельными трудностями небесной механики, которые вызывали сомнения в точности закона обратных квадратов, а также с различными общими соображениями, в частности со стремлением отказаться от принципа дальнодействия.

Первая теория возмущенного движения Луны была разработана Ньютоном и изложена в третьей книге «Начал». Однако полученная Ньютоном оценка движения линии апсид лунной орбиты оказалась ошибочной. Учитывая среднее значение возмущающей силы солнечного притяжения, Ньютон нашел, что в течение одного обращения Луны линия апсид ее орбиты перемещается в прямом направлении на 1° 31′ 28″, тогда как в действительности это перемещение приблизительно в два раза больше и превышает 3°.

В 1745 г. в известном мемуаре «О системе мира согласно началу тяготения» Клеро [1] подтвердил оценку Ньютона, придя, таким образом, к выводу о том, что закон обратных квадратов не может объяснить наблюдаемое движение лунного перигея. В связи с этим Клеро предложил заменить обычный закон тяготения формулами вида $\frac{\gamma M}{r^2}\left(1+\frac{\alpha}{r}\right)$ или $\frac{\gamma M}{r^2}\left(1+\frac{\beta}{r^2}\right)$, где α, β — постоянные, значения которых должны отвечать наблюдаемому движению перигея геоцентрической орбиты Луны. Из-за малости этих значений предполагалось, что на расстояниях порядка радиусов гелиоцентрических планетных орбит дополнительные члены в формуле закона силы будут пренебрежимо малы.

Впоследствии Клеро отказался от этой идеи и вернулся к обычной формуле обратных квадратов. В 1752 г. он представил в Петербургскую Академию наук работу «Теория Луны, выведенная из единственного начала притяжения, обратно пропорционального

квадратам расстояний», в которой развита более точная теория возмущенного движения Луны, позволившая, в частности, получить вполне удовлетворительное решение задачи о движении линии апсид лунной орбиты [2].

В конце XIX ст. изучение так называемой «Портсмутской коллекции» рукописей Ньютона показало, что создатель закона всемирного тяготения нашел правильное решение задачи задолго до работ Клеро, хотя это решение, остававшееся неизвестным до 1872 г., не могло иметь значения для небесной механики XVIII ст.

Не останавливаясь на других обстоятельствах этого важного этапа в развитии небесной механики, подробно описанного в интересной статье Н. И. Идельсона [3], рассмотрим закон тяготения

$$\mathbf{f} = -\frac{\gamma M}{r^3}\left(1 + \frac{\varepsilon}{r^n}\right)\mathbf{r}, \qquad (2,1,1)$$

который можно назвать законом Клеро *.

Основной интерес могут представить особенности движения в задаче двух тел, обусловленные дополнительной компонентой силы, которая отличает (2,1,1) от обычного закона Ньютона.

Обозначим радиусы-векторы точечных масс M, m через $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ соответственно. Уравнения движения масс имеют вид

$$\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = \frac{\gamma m}{r^3}\left(1 + \frac{\varepsilon}{r^n}\right)\mathbf{r}; \quad \frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} = -\frac{\gamma M}{r^3}\left(1 + \frac{\varepsilon}{r^n}\right)\mathbf{r},$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ — радиус-вектор второй массы относительно первой.

Относительное движение определяется уравнением

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \frac{\gamma(M+m)}{r^3}\mathbf{r} = -\frac{\gamma\varepsilon(M+m)}{r^{n+3}}\mathbf{r}. \qquad (2,1,2)$$

Это уравнение показывает, что с точки зрения обычной небесной механики движение происходит под действием ньютоновой силы и центростремительного возмущающего ускорения. Из трех проекций возмущающего ускорения, входящих в общие уравнения для оскулирующих элементов, отличной от нуля является лишь радиальная проекция R.

Согласно (2,1,2) имеем

$$r^2R = -\frac{\gamma\varepsilon(M+m)}{r^n}. \qquad (2,1,3)$$

Найдем возмущения в большой полуоси, эксцентриситете и в движении линии апсид относительной орбиты. Воспользовавшись

* Такое название условно, поскольку, независимо от Клеро, этот закон был предложен также Даламбером. Впервые движение под действием центральной силы вида (2,1,1) рассматривалось Ньютоном.

общими уравнениями (1,6,3) и соотношением (2,1,3), находим

$$\frac{da}{d\varphi} = -\frac{2e\varepsilon}{a^{n-1}(1-e^2)^{n+2}} \sin\varphi\,(1+e\cos\varphi)^n;$$

$$\frac{de}{d\varphi} = -\frac{\varepsilon}{a^n(1-e^2)^n} \sin\varphi\,(1+e\cos\varphi)^n;$$

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{\varepsilon}{ea^n(1-e^2)^n} \cos\varphi\,(1+e\cos\varphi)^n.$$

Изменение элементов за время одного обращения находится интегрированием по полярному углу. Выполняя его, легко убедиться в том, что большая полуось и эксцентриситет не испытывают вековых изменений, тогда как линия апсид в течение каждого периода поворачивается в прямом направлении на угол

$$\Delta\omega = \frac{\varepsilon}{ea^n(1-e^2)^n} \int_0^{2\pi} \cos\varphi\,(1+e\cos\varphi)^n d\varphi. \qquad (2,1,4)$$

При $n = 1$ имеем

$$\Delta\omega = \frac{\varepsilon\pi}{a(1-e^2)}. \qquad (2,1,5)$$

В случае закона (2,1,1) этот эффект должен наблюдаться в невозмущенной задаче двух тел. Для его проверки формулу (2,1,5) необходимо сравнить с величиной невязки между наблюдаемым движением линии апсид и результатом вычислений, выполненных на основе обычной теории возмущений. Как известно, необъяснимое вековое перемещение перигелия Меркурия, остающееся после учета возмущений, было открыто в 1859 г. Леверье [4] на основании составленных им таблиц движения больших планет. Полученная Леверье невязка (38″,3 в столетие) неоднократно уточнялась. Подробное исследование этого эффекта, выполненное с привлечением обширного наблюдательного материала, выполнил Ньюкомб [5], который в 1898 г. получил величину 41″,24. Более поздние исследования (например, Гроссмана, [6] и др.) не внесли в эту оценку существенных изменений. В начале 30-х годов нашего столетия вопрос потребовал пересмотра в связи с необходимостью учета неравномерности вращения Земли. Глейх [7], сделавший первую попытку такого учета, получил значительно меньшую невязку. Однако последующие работы Фосерингема [8] и др. не подтвердили этой оценки. Тщательный пересмотр вопроса был произведен Г. А. Чеботаревым [9], результат которого составляет 42″,65 ± 0″,60.

Ниже приводятся невязки для трех первых планет Солнечной системы, согласно [10].

Меркурий	Венера	Земля
43″,11 ± 0,45 (Клеменс)	8″,4 ± 4,8 (Данкомб)	5″,0 ± 1,2 (2,1,6) (Клеменс, Морган, Данкомб)

Для Меркурия величина $\Delta\omega$, выраженная в радианах и отнесенная к одному обращению, составляет $0{,}50 \cdot 10^{-6}$. Если эту величину отождествить с эффектом (2,1,5), обусловленным дополнительной компонентой силы в законе Клеро, то получится $\varepsilon = 8{,}8 \cdot 10^5$ *см*. Для Венеры и Земли значения $\Delta\omega$ оказываются при этом равными $2{,}6 \cdot 10^{-7}$ и $1{,}8 \cdot 10^{-7}$, т. е. 8″,6 и 3″,8 в столетие, что хорошо согласуется с (2,1,6).

Мы видим, что закон тяготения в форме Клеро при соответствующем выборе постоянной ε позволяет дать удовлетворительное количественное объяснение невязок в движении линий апсид планетных орбит. Однако этот закон оказывается неприемлемым даже с чисто формальной точки зрения, поскольку он противоречит наблюдениям в другом отношении.

Наблюдаемое движение лунного перигея, как было указано, обусловлено возмущающим действием Солнца. Поэтому в невозмущенном движении Луны, происходящем в поле тяготения Земли, движения линии апсид лунной орбиты не должно быть. Между тем формула (2,1,5) в применении к геоцентрическому движению Луны дает $\Delta\omega \simeq 15''$, что составляет более 3′ в год. В невозмущенном движении Луны такого эффекта в действительности нет.

2. Закон тяготения в форме $\frac{\gamma M}{r^2} e^{-hr}$. В конце прошлого столетия Зеелигер [11] подробно рассмотрел так называемый гравитационный парадокс, возникающий при попытке распространить закон тяготения Ньютона на бесконечное пространство, заполненное материей с конечной плотностью. Естественно допустить, что гравитационный потенциал, обусловленный космическими массами, наполняющими мировое пространство, является величиной конечной, а производные от него по координатам имеют в среднем нулевые значения. Между тем, несложные вычисления показывают, что при соблюдении точной формы закона тяготения Ньютона указанные условия выполняются лишь в том случае, если во всех направлениях от выбранной точки плотность космических масс убывает с расстоянием быстрее, чем r^{-2}. Представление о бесконечном пространстве с конечной во всех его частях плотностью космических масс оказывается, таким образом, несовместимым с законом тяготения Ньютона. Это заключение и получило название к о с м о л о г и ч е с к о г о п а р а д о к с а З е е л и г е р а.

Придерживаясь концепции бесконечной Вселенной, заполненной веществом с конечной плотностью, можно устранить парадокс Зеелигера, отказавшись от точной формы закона Ньютона. В частности, это можно осуществить, заменив закон обратных квадратов