

Для Меркурия величина  $\Delta\omega$ , выраженная в радианах и отнесенная к одному обращению, составляет  $0,50 \cdot 10^{-6}$ . Если эту величину отождествить с эффектом (2,1,5), обусловленным дополнительной компонентой силы в законе Клеро, то получится  $\epsilon = 8,8 \cdot 10^6 \text{ см}$ . Для Венеры и Земли значения  $\Delta\omega$  оказываются при этом равными  $2,6 \cdot 10^{-7}$  и  $1,8 \cdot 10^{-7}$ , т. е.  $8'',6$  и  $3'',8$  в столетие, что хорошо согласуется с (2,1,6).

Мы видим, что закон тяготения в форме Клеро при соответствующем выборе постоянной  $\epsilon$  позволяет дать удовлетворительное количественное объяснение невязок в движении линий апсид планетных орбит. Однако этот закон оказывается неприемлемым даже с чисто формальной точки зрения, поскольку он противоречит наблюдениям в другом отношении.

Наблюдаемое движение лунного перигея, как было указано, обусловлено возмущающим действием Солнца. Поэтому в невозмущенном движении Луны, происходящем в поле тяготения Земли, движения линии апсид лунной орбиты не должно быть. Между тем формула (2,1,5) в применении к геоцентрическому движению Луны дает  $\Delta\omega \approx 15''$ , что составляет более  $3'$  в год. В невозмущенном движении Луны такого эффекта в действительности нет.

## 2. Закон тяготения в форме $\frac{\gamma M}{r^2} e^{-hr}$ . В конце прошлого столетия

Зеелигер [11] подробно рассмотрел так называемый гравитационный парадокс, возникающий при попытке распространить закон тяготения Ньютона на бесконечное пространство, заполненное материей с конечной плотностью. Естественно допустить, что гравитационный потенциал, обусловленный космическими массами, наполняющими мировое пространство, является величиной конечной, а производные от него по координатам имеют в среднем нулевые значения. Между тем, несложные вычисления показывают, что при соблюдении точной формы закона тяготения Ньютона указанные условия выполняются лишь в том случае, если во всех направлениях от выбранной точки плотность космических масс убывает с расстоянием быстрее, чем  $r^{-2}$ . Представление о бесконечном пространстве с конечной во всех его частях плотностью космических масс оказывается, таким образом, несовместимым с законом тяготения Ньютона. Это заключение и получило название космологического парадокса Зеелигера.

Придерживаясь концепции бесконечной Вселенной, заполненной веществом с конечной плотностью, можно устранить парадокс Зеелигера, отказавшись от точной формы закона Ньютона. В частности, это можно осуществить, заменив закон обратных квадратов

формулой, применявшейся еще Лапласом [12]:

$$f = -\frac{\gamma M}{r^3} r e^{-hr}, \quad (2,2,1)$$

где  $h$  — некоторая положительная постоянная.

Наличие экспоненциального множителя обеспечивает сходимость интегралов и тем самым устраняет гравитационный парадокс. В то же время при достаточно малом  $h$  формула (2,2,1) в случае не очень больших расстояний мало отличается от закона Ньютона; ее применение не внесет существенных изменений в выводы небесной механики и приведет лишь к небольшим дополнительным эффектам.

Пусть  $hr \ll 1$ . С достаточной точностью (2,2,1) принимает вид

$$f = -\frac{\gamma M}{r^3} (1 - hr) r, \quad (2,2,2)$$

совпадая с (2,1,1) при  $\epsilon = -h$ ,  $n = -1$ .

Для применения (2,2,2) к задаче двух тел можно воспользоваться результатами, полученными в случае закона Клеро. Основываясь на вычислениях, выполненных в предыдущем параграфе, приходим к заключению, что большая полуось и эксцентриситет только периодически изменяются, тогда как линия апсид медленно вращается в плоскости орбиты. В течение одного обращения эта линия поворачивается на угол

$$\Delta\omega = \frac{2\pi ha}{e^2} \left\{ (1 - e^2)^{\frac{1}{2}} - 1 + e^2 \right\}, \quad (2,2,3)$$

как это следует из (2,1,4) при указанных значениях постоянных  $\epsilon$  и  $n$ .

Пренебрегая более высокими степенями эксцентриситета, эту формулу можно написать в виде

$$\Delta\omega = \pi ah \left( 1 - \frac{1}{4} e^2 \right). \quad (2,2,4)$$

Для оценки постоянной  $h$  отождествим этот эффект с наблюдаемой невязкой в движении перигелия Меркурия. Внося  $\Delta\omega = 5,0 \times 10^{-7}$  в (2,2,4) и выполнив необходимые вычисления, найдем  $h = 2,8 \cdot 10^{-20} \text{ см}^{-1}$ . При этом произведение  $hr$  в пределах Солнечной системы остается достаточно малым; даже для Плутона оно составляет лишь около  $1,6 \cdot 10^{-5}$ , обеспечивая достаточную точность представления закона (2,2,1) в форме разложения (2,2,2).

Неприемлемость рассматриваемого закона связана прежде всего с тем обстоятельством, что формула (2,2,4) не соответствует известным невязкам в движении линий апсид. Для Луны получается пренебрежимая величина (около  $7'' \cdot 10^{-6}$  за одно обращение).

Однако применение (2,2,4) к планетам приводит к слишком большим значениям эффекта. Для Венеры и Земли получается соответственно 32" и 27" в столетие, что невозможно примирить с величинами (2,1,6), выведенными из наблюдений.

3. Закон тяготения Холла. Обсуждение проблемы движения перигелиев планетных орбит связано с еще одной попыткой уточнения закона Ньютона. В 1894 г. Холл исследовал эту задачу на основе закона тяготения [13]

$$f = - \frac{\gamma M}{r^{3+\alpha}} r, \quad (2,3,1)$$

где  $\alpha$  — малая положительная поправка, уточняющая обычный закон обратных квадратов.

По Холлу, удовлетворительное объяснение невязки в движении линии апсид орбиты Меркурия получается при  $\alpha = 1,574 \cdot 10^{-7}$ . Почти одновременно с Холлом закон (2,3,1) изучал также Ньюкомб [14].

Представим закон (2,3,1) в форме, более удобной для последующих вычислений.

Произведем разложение

$$r^\alpha = 1 + \frac{\alpha \ln r}{1!} + \frac{(\alpha \ln r)^2}{2!} + \dots$$

и, считая поправку  $\alpha$  достаточно малой, сохраним член только первого порядка относительно величины  $\alpha \ln r$ . Вместо (2,3,1) в этом приближении можно написать

$$f = - \frac{\gamma M}{r^3} r + \frac{\alpha \gamma M \ln r}{r^3} r. \quad (2,3,2)$$

Приложим этот закон к задаче двух тел.

Уравнение относительного движения имеет вид

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{\gamma (M + m)}{r^3} r = \frac{\alpha \gamma (M + m) \ln r}{r^3} r.$$

Оно показывает, что, кроме ньютонового притяжения, на движущееся тело действует отталкивательное возмущающее ускорение. Радиальная проекция этого ускорения находится из соотношения

$$r^2 R = \alpha \gamma (M + m) \ln r. \quad (2,3,3)$$

Проекции ускорения на перпендикуляр к радиусу-вектору и на нормаль к плоскости орбиты имеют нулевые значения.

Обратимся к общим уравнениям (1,6,3), определяющим изменение оскулирующих элементов со временем. Внося в них  $W =$