Для Меркурия величина $\Delta\omega$, выраженная в радианах и отнесенная к одному обращению, составляет $0{,}50 \cdot 10^{-6}$. Если эту величину отождествить с эффектом (2,1,5), обусловленным дополнительной компонентой силы в законе Клеро, то получится $\varepsilon = 8{,}8 \cdot 10^5$ *см.* Для Венеры и Земли значения $\Delta\omega$ оказываются при этом равными $2{,}6 \cdot 10^{-7}$ и $1{,}8 \cdot 10^{-7}$, т. е. $8'',6$ и $3'',8$ в столетие, что хорошо согласуется с (2,1,6).

Мы видим, что закон тяготения в форме Клеро при соответствующем выборе постоянной ε позволяет дать удовлетворительное количественное объяснение невязок в движении линий апсид планетных орбит. Однако этот закон оказывается неприемлемым даже с чисто формальной точки зрения, поскольку он противоречит наблюдениям в другом отношении.

Наблюдаемое движение лунного перигея, как было указано, обусловлено возмущающим действием Солнца. Поэтому в невозмущенном движении Луны, происходящем в поле тяготения Земли, движения линии апсид лунной орбиты не должно быть. Между тем формула (2,1,5) в применении к геоцентрическому движению Луны дает $\Delta\omega \simeq 15''$, что составляет более $3'$ в год. В невозмущенном движении Луны такого эффекта в действительности нет.

2. Закон тяготения в форме $\frac{\gamma M}{r^2} e^{-hr}$. В конце прошлого столетия Зеелигер [11] подробно рассмотрел так называемый гравитационный парадокс, возникающий при попытке распространить закон тяготения Ньютона на бесконечное пространство, заполненное материей с конечной плотностью. Естественно допустить, что гравитационный потенциал, обусловленный космическими массами, наполняющими мировое пространство, является величиной конечной, а производные от него по координатам имеют в среднем нулевые значения. Между тем, несложные вычисления показывают, что при соблюдении точной формы закона тяготения Ньютона указанные условия выполняются лишь в том случае, если во всех направлениях от выбранной точки плотность космических масс убывает с расстоянием быстрее, чем r^{-2}. Представление о бесконечном пространстве с конечной во всех его частях плотностью космических масс оказывается, таким образом, несовместимым с законом тяготения Ньютона. Это заключение и получило название космологического парадокса Зеелигера.

Придерживаясь концепции бесконечной Вселенной, заполненной веществом с конечной плотностью, можно устранить парадокс Зеелигера, отказавшись от точной формы закона Ньютона. В частности, это можно осуществить, заменив закон обратных квадратов формулой, применявшейся еще Лапласом [12]:

$$\mathbf{f} = -\frac{\gamma M}{r^3} \mathbf{r} e^{-hr}, \tag{2,2,1}$$

где h — некоторая положительная постоянная.

Наличие экспоненциального множителя обеспечивает сходимость интегралов и тем самым устраняет гравитационный парадокс. В то же время при достаточно малом h формула (2,2,1) в случае не очень больших расстояний мало отличается от закона Ньютона; ее применение не внесет существенных изменений в выводы небесной механики и приведет лишь к небольшим дополнительным эффектам.

Пусть $hr \ll 1$. С достаточной точностью (2,2,1) принимает вид

$$\mathbf{f} = -\frac{\gamma M}{r^3} (1 - hr) \mathbf{r}, \tag{2,2,2}$$

совпадая с (2,1,1) при $\varepsilon = -h$, $n = -1$.

Для применения (2,2,2) к задаче двух тел можно воспользоваться результатами, полученными в случае закона Клеро. Основываясь на вычислениях, выполненных в предыдущем параграфе, приходим к заключению, что большая полуось и эксцентриситет только периодически изменяются, тогда как линия апсид медленно вращается в плоскости орбиты. В течение одного обращения эта линия поворачивается на угол

$$\Delta\omega = \frac{2\pi ha}{e^2} \left\{(1 - e^2)^{\frac{1}{2}} - 1 + e^2\right\}, \tag{2,2,3}$$

как это следует из (2,1,4) при указанных значениях постоянных ε и n.

Пренебрегая более высокими степенями эксцентриситета, эту формулу можно написать в виде

$$\Delta\omega = \pi a h \left(1 - \frac{1}{4} e^2\right). \tag{2,2,4}$$

Для оценки постоянной h отождествим этот эффект с наблюдаемой невязкой в движении перигелия Меркурия. Внеся $\Delta\omega = 5{,}0 \times 10^{-7}$ в (2,2,4) и выполнив необходимые вычисления, найдем $h = 2{,}8 \cdot 10^{-20}$ $см^{-1}$. При этом произведение hr в пределах Солнечной системы остается достаточно малым; даже для Плутона оно составляет лишь около $1{,}6 \cdot 10^{-5}$, обеспечивая достаточную точность представления закона (2,2,1) в форме разложения (2,2,2).

Неприемлемость рассматриваемого закона связана прежде всего с тем обстоятельством, что формула (2,2,4) не соответствует известным невязкам в движении линий апсид. Для Луны получается пренебрежимая величина (около $7'' \cdot 10^{-6}$ за одно обращение).

Однако применение (2,2,4) к планетам приводит к слишком большим значениям эффекта. Для Венеры и Земли получается соответственно 32″ и 27″ в столетие, что невозможно примирить с величинами (2,1,6), выведенными из наблюдений.

3. Закон тяготения Холла. Обсуждение проблемы движения перигелиев планетных орбит связано с еще одной попыткой уточнения закона Ньютона. В 1894 г. Холл исследовал эту задачу на основе закона тяготения [13]

$$\mathbf{f} = -\frac{\gamma M}{r^{3+\alpha}}\mathbf{r}, \qquad (2,3,1)$$

где α — малая положительная поправка, уточняющая обычный закон обратных квадратов.

По Холлу, удовлетворительное объяснение невязки в движении линии апсид орбиты Меркурия получается при $\alpha = 1{,}574 \cdot 10^{-7}$. Почти одновременно с Холлом закон (2,3,1) изучал также Ньюкомб [14].

Представим закон (2,3,1) в форме, более удобной для последующих вычислений.

Произведем разложение

$$r^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha \ln r}{1!} + \frac{(\alpha \ln r)^2}{2!} + \cdots$$

и, считая поправку α достаточно малой, сохраним член только первого порядка относительно величины $\alpha \ln r$. Вместо (2,3,1) в этом приближении можно написать

$$\mathbf{f} = -\frac{\gamma M}{r^3}\mathbf{r} + \frac{\alpha\gamma M \ln r}{r^3}\mathbf{r}. \qquad (2,3,2)$$

Приложим этот закон к задаче двух тел.

Уравнение относительного движения имеет вид

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \frac{\gamma(M+m)}{r^3}\mathbf{r} = \frac{\alpha\gamma(M+m)\ln r}{r^3}\mathbf{r}.$$

Оно показывает, что, кроме ньютонового притяжения, на движущееся тело действует отталкивательное возмущающее ускорение. Радиальная проекция этого ускорения находится из соотношения

$$r^2 R = \alpha\gamma(M+m)\ln r. \qquad (2,3,3)$$

Проекции ускорения на перпендикуляр к радиусу-вектору и на нормаль к плоскости орбиты имеют нулевые значения.

Обратимся к общим уравнениям (1,6,3), определяющим изменение оскулирующих элементов со временем. Внося в них $W =$