Однако применение (2,2,4) к планетам приводит к слишком большим значениям эффекта. Для Венеры и Земли получается соответственно 32″ и 27″ в столетие, что невозможно примирить с величинами (2,1,6), выведенными из наблюдений.

3. Закон тяготения Холла. Обсуждение проблемы движения перигелиев планетных орбит связано с еще одной попыткой уточнения закона Ньютона. В 1894 г. Холл исследовал эту задачу на основе закона тяготения [13]

$$\mathbf{f} = -\frac{\gamma M}{r^{3+\alpha}}\mathbf{r}, \tag{2,3,1}$$

где α — малая положительная поправка, уточняющая обычный закон обратных квадратов.

По Холлу, удовлетворительное объяснение невязки в движении линии апсид орбиты Меркурия получается при $\alpha = 1{,}574 \cdot 10^{-7}$. Почти одновременно с Холлом закон (2,3,1) изучал также Ньюкомб [14].

Представим закон (2,3,1) в форме, более удобной для последующих вычислений.

Произведем разложение

$$r^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha \ln r}{1!} + \frac{(\alpha \ln r)^2}{2!} + \cdots$$

и, считая поправку α достаточно малой, сохраним член только первого порядка относительно величины $\alpha \ln r$. Вместо (2,3,1) в этом приближении можно написать

$$\mathbf{f} = -\frac{\gamma M}{r^3}\mathbf{r} + \frac{\alpha\gamma M \ln r}{r^3}\mathbf{r}. \tag{2,3,2}$$

Приложим этот закон к задаче двух тел.

Уравнение относительного движения имеет вид

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \frac{\gamma(M+m)}{r^3}\mathbf{r} = \frac{\alpha\gamma(M+m)\ln r}{r^3}\mathbf{r}.$$

Оно показывает, что, кроме ньютонового притяжения, на движущееся тело действует отталкивательное возмущающее ускорение. Радиальная проекция этого ускорения находится из соотношения

$$r^2 R = \alpha\gamma(M+m)\ln r. \tag{2,3,3}$$

Проекции ускорения на перпендикуляр к радиусу-вектору и на нормаль к плоскости орбиты имеют нулевые значения.

Обратимся к общим уравнениям (1,6,3), определяющим изменение оскулирующих элементов со временем. Внося в них $W =$

$= S = 0$ и равенство (2,3,3), после интегрирования по полярному углу получим

$$\Delta a = \frac{2ae\alpha}{1-e^2}\int_0^{2\pi} \sin\varphi \ln r d\varphi; \quad \Delta e = \alpha \int_0^{2\pi} \sin\varphi \ln r d\varphi;$$

$$\Delta\omega = -\frac{\alpha}{e}\int_0^{2\pi} \cos\varphi \ln r d\varphi. \qquad (2,3,4)$$

Этими формулами определяются изменения элементов орбиты в течение одного обращения.

В рассматриваемом приближении для вычисления интегралов (2,3,4) можно воспользоваться уравнением невозмущенной орбиты. Внеся $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\varphi}$, легко убедиться в том, что задача сводится к вычислению интегралов

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \sin\varphi \ln(1+e\cos\varphi)\, d\varphi; \quad I_2 = \int_0^{2\pi} \cos\varphi \ln(1+e\cos\varphi)\, d\varphi.$$

Интегрированием по частям первый из них приводится к величине

$$-\int_0^{2\pi} \frac{e\cos\varphi \sin\varphi d\varphi}{1+e\cos\varphi} = 0.$$

Второй интеграл преобразуется следующим образом:

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{e\sin^2\varphi d\varphi}{1+e\cos\varphi} = \frac{2\pi}{e}(1-\sqrt{1-e^2}).$$

Следовательно,

$$\Delta a = \Delta e = 0, \quad \Delta\omega = \frac{2\alpha\pi}{e^2}(1-\sqrt{1-e^2}). \qquad (2,3,5)$$

С точностью до членов порядка e^2 включительно можно написать $\Delta\omega = \alpha\pi$.

Итак, в задаче двух тел, взаимодействующих по закону Холла, большая полуось и эксцентриситет изменяются только периодически. Вековым эффектом, монотонно возрастающим со временем, является движение линии апсид. Если его отождествить с наблюдаемой невязкой в движении перигелия Меркурия, положив $\Delta\omega = 5{,}0 \cdot 10^{-7}$, то получится $\alpha = 0{,}00000016$. Для Луны этот эффект составил бы около 140″ в столетие; для Венеры, Земли и Марса — приблизительно 16″,8, 10″,1 и 5″,5 соответственно, что значительно превосходит невязки, выведенные из наблюдений.