4-м и 5-м уравнениями (1,6,3), легко находим

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{2\gamma M \sin^2\varphi}{c^2 a(1-e^2)};$$

$$\frac{da}{d\varphi} = \frac{2\gamma M e \sin\varphi}{c^2(1-e^2)^2}(1+e^2+2e\cos\varphi); \qquad (3,2,4)$$

$$\frac{de}{d\varphi} = \frac{2\gamma M e \sin\varphi}{c^2 a(1-e^2)}(e+\cos\varphi),$$

определяющие движение линии апсид и изменение размеров и формы орбиты.

Ввиду малости этих эффектов интерес могут представить только вековые изменения элементов, которые находятся путем интегрирования соотношений (3,2,4) по истинной аномалии. Интегрируя, находим приращение элементов за время одного обращения

$$\Delta\omega = \frac{2\pi\gamma M}{c^2 a(1-e^2)}; \quad \Delta a = \Delta e = 0. \qquad (3,2,5)$$

Большая полуось и эксцентриситет орбиты не испытывают вековых изменений; линия апсид вращается в плоскости орбиты в прямом направлении.

Впервые этот эффект, обусловленный зависимостью массы движущейся частицы от скорости, обнаружил Зоммерфельд при исследовании движения электрона в электрическом поле атомного ядра. Полная энергия электрона оказалась зависящей не только от его эллиптического движения, отвечающего случаю постоянной массы, но и от прецессии орбиты, что позволило дать первое объяснение тонкой структуры спектра водорода.

Качественно эффект (3,2,5) отвечает известному движению перигелиев планетных орбит, но количественно он оказывается в три раза меньше найденной Эйнштейном величины, хорошо согласующейся с наблюдениями. Например, в случае Меркурия формула (3,2,5) дает для векового перемещения перигелия около 14″ в столетие вместо наблюдаемых 43″.

3. Обобщение закона тяготения Ньютона. Выше рассматривалось влияние релятивистского эффекта массы на движение частицы в центральном поле при условии, что закон тяготения Ньютона сохраняет обычную форму. Полученные результаты могут представить известный интерес, поскольку в случае статического поля закон тяготения не вступает в явное противоречие с выводами СТО. Однако рассмотренная задача имеет очень ограниченное значение. Для развития теории гравитации гораздо больший интерес представляют попытки согласовать с принципами СТО общую форму закона тяготения. Вопрос о возможности такого согласования с большой глубиной и тщательностью рассмотрел в 1905 г. Пуанкаре [2].

К этому времени было окончательно установлено, что явления электромагнетизма удовлетворяют **специальному принципу относительности**, т. е. протекают по одним и тем же законам во всех инерциальных координатах. Математически этот принцип выражается в инвариантности уравнений электромагнитного поля относительно преобразований Лоренца, с помощью которых осуществляется переход от одной инерциальной системы отсчета к другой. Для доказательства общности этого принципа Лоренц высказал гипотезу о том, что и силы другой природы, каково бы ни было их происхождение, ведут себя при указанном преобразовании так же, как и электромагнитные силы. Гипотеза Лоренца относится, в частности, к силам гравитации. Она требует отказа от дальнодействия и согласования формы закона тяготения с принципом относительности.

Следуя Пуанкаре, мы перечислим здесь основные условия, которым должно отвечать такое согласование.

Пусть частица, обладающая скоростью $\mathbf{v}_0$, испытывает притяжение со стороны материальной точки, движущейся со скоростью $\mathbf{v}$. Радиус-вектор притягивающей точки относительно данной частицы обозначим через $\mathbf{r}$. Отказавшись от принципа дальнодействия, допустим, что сила притяжения в данный момент времени t зависит от положения и скорости притягивающей точки в некоторый предшествующий момент t'. Относительный радиус-вектор и скорость точки в этот момент обозначим через $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{v}'$ соответственно. Необходимо получить соотношение

$$\varphi(t-t', \mathbf{r}', \mathbf{v}', \mathbf{v}_0)=0, \tag{3,3,1}$$

определяющее время распространения гравитационного действия в зависимости от относительного расположения и скоростей притягиваемой и притягивающей частиц, и найти силу притяжения, выразив ее через $\mathbf{r}'$, $\mathbf{v}'$, $\mathbf{v}_0$.

Решение этой задачи ограничивается следующими условиями.

1. Уравнение (3,3,1) должно сохраняться при преобразовании Лоренца.

2. Сила притяжения удовлетворяет принципу относительности, т. е. изменяется при преобразовании Лоренца так же, как и электромагнитные силы.

3. Если взаимодействующие тела неподвижны в данной системе отсчета, то искомый закон притяжения совпадает с законом Ньютона в обычной форме.

4. При достаточно малых скоростях искомый закон должен быть близким к закону Ньютона, поскольку в противном случае могут возникнуть противоречия между теорией и данными астрономических наблюдений.

Поставленная таким образом задача является неопределенной, так как упомянутые условия недостаточны для однозначного вывода обобщенного закона притяжения.

При помощи инвариантов группы преобразований Лоренца Пуанкаре разработал метод, позволяющий найти *возможные* решения задачи, т. е. составить обобщенные формы закона тяготения, которые отвечают принятым условиям, но не вытекают из них с необходимостью. Скорость распространения гравитации оказалась при этом равной скорости света, вследствие чего уравнение (3,3,1) приняло очень простой вид:

$$t - t' = \frac{r'}{c}. \tag{3,3,2}$$

Может показаться, что это заключение свидетельствует о невозможности разумного обобщения закона тяготения Ньютона в СТО, поскольку, как мы видели в главе II, формула обратных квадратов и соотношение (3,3,2) приводят к выводам, противоречащим наблюдаемым движениям в Солнечной системе. Однако необходимо иметь в виду, что в дорелятивистских попытках отказа от гравитационного дальнодействия учет запаздывания, согласно соотношению (3,3,2), составлял *единственную* поправку к теории Ньютона. В релятивистском же обобщении этой теории изменяется также форма закона взаимодействия, и может случиться, что поправка, обусловленная (3,3,2) и вызывающая нежелательные небесно-механические следствия, в первом приближении компенсируется поправкой к закону обратных квадратов. Поэтому оценку соотношения (3,3,2) с точки зрения небесной механики следует отложить до полного решения задачи о релятивистском обобщении закона Ньютона.

Не повторяя довольно сложных рассуждений Пуанкаре, имеющих теперь главным образом исторический интерес, приведем здесь одну из полученных им форм обобщенного закона тяготения. С точностью до постоянного множителя сила притяжения рассматриваемой частицы со стороны материальной точки оказывается равной

$$\mathbf{F} = -\frac{\mathbf{r}'}{k_0 B^3} - \frac{k'}{k_0}\frac{A}{B^3 C}\frac{\mathbf{v}'}{c}, \tag{3,3,3}$$

где приняты обозначения

$$k_0 = \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}; \quad k' = \left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}};$$

$$A = -k_0\left(r' + \frac{\mathbf{r}', \mathbf{v}_0}{c}\right); \quad B = -k'\left(r' + \frac{\mathbf{r}', \mathbf{v}'}{c}\right);$$

$$C = k_0 k'\left(1 - \frac{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}'}{c^2}\right). \tag{3,3,4}$$

Напомним, что сила притяжения и скорость $\mathbf{v}_0$ частицы относятся к данному моменту t, а радиус-вектор $\mathbf{r}'$ и скорость $\mathbf{v}'$ притягивающей точки — к предшествующему моменту t', который определяется соотношением (3,3,2).

Как мы видели в главе II, отказ от дальнодействия в дорелятивистском обобщении закона тяготения приводит к дополнительной составляющей силы, пропорциональной первой степени отношения $\frac{v}{c}$. Именно эта составляющая вызывает вековое изменение большой полуоси орбиты, противоречащее наблюдаемому движению планет и Луны. Выясним, содержится ли такая составляющая в релятивистском законе (3,3,3). С этой целью вычислим силу (3,3,3) с точностью до членов, линейных относительно $\frac{\mathbf{v}}{c}$.

Воспользовавшись полученным в главе II соотношением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \frac{r'}{c}\mathbf{v}' + \frac{r'^2}{2c^2}\mathbf{w}',$$

находим в нашем приближении

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \frac{r}{c}\mathbf{v}; \quad r' + \frac{\mathbf{r}', \mathbf{v}'}{c} = r.$$

Первый член правой части формулы (3,3,3) оказывается равным $\frac{\mathbf{r}}{r^3} - \frac{\mathbf{v}}{cr^2}$, тогда как для второго получаем $\frac{\mathbf{v}}{cr^2}$. Поэтому с принятой степенью точности закон (3,3,3) принимает вид $\mathbf{F} = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$, переходя в обычный закон Ньютона. Таким образом, в данном приближении поправка, обусловленная конечной скоростью передачи гравитации, компенсируется зависимостью силы притяжения от скорости притягивающего тела. Отличие силы (3,3,3) от закона тяготения Ньютона определяется членами, зависящими от второй и более высоких степеней отношения $\frac{v}{c}$. В случае орбитального движения Земли соответствующие этим поправкам эффекты оказываются приблизительно в 10^4 раз меньше поправки, возникающей при дорелятивистском обобщении закона тяготения.

Необходимо вновь подчеркнуть, что соотношение (3,3,3) является лишь *одним из возможных* обобщений закона тяготения, отвечающих требованиям специальной теории относительности. Пуанкаре предлагает простой метод, с помощью которого можно получить другие формы такого обобщения. Поэтому подробное исследование закона (3,3,3) не представляет большого интереса с точки зрения небесной механики. Значение теории Пуанкаре состоит главным образом в том, что она, не уступая механике Ньютона в практических приложениях, позволяет устранить дальнодействие и согласовать закон тяготения с принципами СТО.