c_0, которая входит в формулы специальной теории относительности, при наличии поля равна

$$c = c_0\left(1 - \frac{\varphi}{c_0^2}\right). \qquad (3,4,3)$$

Соотношение (3,4,3) имеет очень важное значение. В частности, оно устанавливает границы применимости специальной теории относительности, показывая, что эта теория выполняется лишь для достаточно слабых полей, когда отношением $\frac{\varphi}{c^2}$ можно пренебречь по сравнению с единицей.

Из соотношения (3,4,3) непосредственно вытекает, что при распространении света в поле тяготения прямолинейность световых лучей в общем случае нарушается. Рассматривая распространение света в поле одного центра, Эйнштейн показывает, что вследствие искривления световой луч отклоняется на угол

$$\theta = \frac{2\gamma M}{c^2 a}, \qquad (3,4,4)$$

где M — масса центра притяжения, a — длина перпендикуляра, опущенного из центра на направление луча.

Впоследствии оказалось, что искривление луча обусловлено не только зависимостью скорости света от потенциала поля, но и нарушением эвклидовой геометрии вблизи центра гравитации. Как было найдено Эйнштейном на основе общей теории относительности, полный эффект превосходит величину (3,4,4) в два раза. В случае Солнца максимальное значение эффекта соответствует лучу, касательному к солнечной поверхности; оно составляет около 1″, 7, что хорошо согласуется с наблюдениями.

Принцип эквивалентности Эйнштейна, конечно, не является новой теорией гравитации. Однако он может служить исходным моментом и одной из физических предпосылок такой теории, а плодотворность подтверждается новизной и принципиальной важностью вытекающих из него следствий.

5. Теория Абрагама. В 1912 г. М. Абрагам предложил теорию гравитации, обобщающую закон Ньютона без учета принципа относительности [5]. В основу этой теории положено следующее уравнение для гравитационного потенциала:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} = -4\pi\gamma\rho, \qquad (3,5,1)$$

где x, y, z — прямоугольные декартовы координаты, u — переменная, связанная со временем t соотношением $u = ict$, i — мнимая единица, ρ — собственная плотность.

В математической физике дифференциальное уравнение (3,5,1) называется уравнением Даламбера. Его решение

$$\varphi(x, y, z, t) = \iiint \frac{\gamma}{r'} \rho \left(x', y', z', t - \frac{r'}{c}\right) d\tau' \qquad (3,5,2)$$

носит название запаздывающего потенциала. Интегрирование производится по всему объему, в котором распределены массы, определяющие данное поле тяготения. Через r' обозначено расстояние данной точки x, y, z от элемента объема $d\tau'$, расположенного в точке x', y', z'. Значение объемной плотности в точках x', y', z' должно быть взято для момента $t - \frac{r'}{c}$, т. е. с запаздыванием, соответствующим передаче гравитационного действия со скоростью c. Таким образом, в теории Абрагама принимается, что гравитация распространяется со скоростью света.

Пространственно-временной интервал, определяющийся известной формулой специальной теории относительности

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 - du^2, \qquad (3,5,3)$$

связан с элементом $d\tau$ собственного времени соотношением $ds = cd\tau$.

Рассматривая пространственные координаты и переменную u в функции собственного времени, введем составляющие скорости $\dot{x} = \frac{dx}{d\tau}, \ldots \dot{u} = \frac{du}{d\tau}$ и составляющие ускорения $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{d\tau}, \ldots \ddot{u} = \frac{d\dot{u}}{d\tau}$. Ускорение частицы, движущейся в поле тяготения, равно четырехмерному вектору напряженности $\mathbf{f} = \operatorname{grad} \varphi$. Приравнивая проекции этого вектора составляющим ускорения, Абрагам постулирует закон движения частицы в виде

$$\ddot{x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \ldots \ddot{u} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}. \qquad (3,5,4)$$

Нетрудно убедиться в том, что преобразование Лоренца изменяет форму уравнений (3,5,4), показывая, что принятый Абрагамом закон движения противоречит СТО.

Если принцип постоянства скорости света, положенный в основу СТО, сохранить и при наличии поля гравитации, то четырехмерный вектор скорости частицы должен быть перпендикулярен четырехмерной напряженности поля. Действительно, внеся в (3,5,3) соотношение $ds = cd\tau$, получим

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + \dot{u}^2 = -c^2.$$

Дифференцируя это равенство по собственному времени при $c = \text{const}$, находим

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} + \dot{u}\ddot{u} = 0,$$

откуда и следует высказанное выше утверждение.

Если же отказаться от указанного принципа и допустить, что в поле тяготения скорость света переменна, то после дифференцирования того же равенства получится

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} + \dot{u}\ddot{u} = -c\dot{c}.$$

Вместе с законом движения (3,5,4) это соотношение дает $c\frac{dc}{d\tau} = -\frac{d\varphi}{d\tau}$. Следовательно,

$$c^2 = C - 2\varphi,$$

где C — постоянная интегрирования.

Положив $c = c_0$ при $\varphi = 0$, находим

$$c^2 = c_0^2 - 2\varphi.$$

Считая отношение $\frac{\varphi}{c_0}$ достаточно малым, можно написать

$$c = c_0\left(1 - \frac{\varphi}{c_0^2}\right),$$

что совпадает с формулой Эйнштейна (3,4,3), основанной на принципе эквивалентности.

Приложим решение (3,5,2) к случаю, когда поле обусловлено одной точечной массой, движущейся по произвольному закону. Найдем запаздывающий потенциал в точке x, y, z в момент времени t. Как и в главе II, радиус-вектор движущейся массы относительно данной точки обозначим через $\mathbf{r}$, а ее скорость — через $\mathbf{v}$. Пусть t' — некоторый предшествующий момент; радиус-вектор и скорость, отнесенные к этому моменту, обозначим через $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{v}'$. В соответствии с принятой гипотезой о скорости распространения гравитации положим $t - t' = \frac{r'}{c}$.

С точностью до постоянного множителя решение (3,5,2) приводится в этом случае к величине

$$\varphi = \frac{1}{r' + \frac{\mathbf{r}', \mathbf{v}'}{c}} \tag{3,5,5}$$

и носит название потенциала Лиенара — Вихерта.

Нетрудно убедиться в том, что запаздывающий потенциал (3,5,5) отличается от обычного ньютонового величинами второго порядка относительно $\frac{v}{c}$.

В главе II мы получили приближенное соотношение

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \frac{r'}{c}\mathbf{v}' + \frac{r'^2}{2c^2}\mathbf{w}',$$

в котором через $\mathbf{w}$ обозначено ускорение движущейся точечной массы. В соответствии с теоремой живых сил произведение $r\omega$ считается величиной порядка v^2.

С помощью этого соотношения находим

$$r' + \frac{\mathbf{r}', \mathbf{v}'}{c} = r\left\{1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{\mathbf{r}, \mathbf{v}}{2c^2r^2} - \frac{\mathbf{r}, \mathbf{w}}{2c^2}\right\}.$$

Поэтому с точностью до членов второго порядка потенциал Лиенара — Вихерта равен

$$\varphi = \frac{1}{r} + \frac{1}{r}\left\{\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{v})^2}{2c^2r} + \frac{\mathbf{r}, \mathbf{w}}{2c^2}\right\} \qquad (3,5,6)$$

и не содержит членов первого порядка относительно $\frac{v}{c}$.

Отсюда непосредственно следует, что теория Абрагама также свободна от эффектов, присущих дорелятивистским обобщениям закона Ньютона, и поэтому она не может привести к резким противоречиям с наблюдаемым движением небесных тел. Отличие от механики Ньютона, как и в случае теории Пуанкаре, начинается с членов второго порядка, отвечающих тонким особенностям движения. Однако эффекты второго порядка в теории Абрагама не представляют интереса, поскольку в этом приближении данная теория ошибочна. С современной точки зрения, всякое обобщение закона тяготения должно отвечать требованиям СТО. Между тем, теория Абрагама, как уже сказано, противоречит принципу относительности, поскольку принятый в ней закон движения не удовлетворяет преобразованиям Лоренца.

6. Теория Нордстрема. Обсуждая состояние проблемы всемирного тяготения, Эйнштейн [6] перечисляет следующие четыре требования, которые, по его мнению, должны быть положены в основу теории гравитационного поля:

1) выполнимость законов сохранения импульса и энергии,
2) равенство инертной и тяжелой масс,
3) выполнимость специальной теории относительности,
4) независимость формы законов от абсолютных значений гравитационного потенциала.

Теория Абрагама, как было указано, не отвечает третьему из этих условий. Появившаяся вскоре теория Ми [7] противоречит равенству инертной и тяжелой масс. Со всеми четырьмя условиями согласуется теория Нордстрема, предложенная в 1912 г. [8] и развитая затем в работах Эйнштейна [6], Эйнштейна и Фоккера [9].

Как и в теории Абрагама, в теории Нордстрема поле гравитации характеризуется запаздывающим потенциалом, который удовлетворяет уравнению Даламбера (3,5,1). В этом уравнении, как и прежде, через x, y, z обозначены пространственные декартовы координаты,