в котором через $\mathbf{w}$ обозначено ускорение движущейся точечной массы. В соответствии с теоремой живых сил произведение $r\omega$ считается величиной порядка v^2.

С помощью этого соотношения находим

$$r' + \frac{\mathbf{r}', \mathbf{v}'}{c} = r\left\{1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{\mathbf{r}, \mathbf{v}}{2c^2r^2} - \frac{\mathbf{r}, \mathbf{w}}{2c^2}\right\}.$$

Поэтому с точностью до членов второго порядка потенциал Лиенара — Вихерта равен

$$\varphi = \frac{1}{r} + \frac{1}{r}\left\{\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{v})^2}{2c^2r} + \frac{\mathbf{r}, \mathbf{w}}{2c^2}\right\} \qquad (3,5,6)$$

и не содержит членов первого порядка относительно $\frac{v}{c}$.

Отсюда непосредственно следует, что теория Абрагама также свободна от эффектов, присущих дорелятивистским обобщениям закона Ньютона, и поэтому она не может привести к резким противоречиям с наблюдаемым движением небесных тел. Отличие от механики Ньютона, как и в случае теории Пуанкаре, начинается с членов второго порядка, отвечающих тонким особенностям движения. Однако эффекты второго порядка в теории Абрагама не представляют интереса, поскольку в этом приближении данная теория ошибочна. С современной точки зрения, всякое обобщение закона тяготения должно отвечать требованиям СТО. Между тем, теория Абрагама, как уже сказано, противоречит принципу относительности, поскольку принятый в ней закон движения не удовлетворяет преобразованиям Лоренца.

6. Теория Нордстрема. Обсуждая состояние проблемы всемирного тяготения, Эйнштейн [6] перечисляет следующие четыре требования, которые, по его мнению, должны быть положены в основу теории гравитационного поля:

1) выполнимость законов сохранения импульса и энергии,
2) равенство инертной и тяжелой масс,
3) выполнимость специальной теории относительности,
4) независимость формы законов от абсолютных значений гравитационного потенциала.

Теория Абрагама, как было указано, не отвечает третьему из этих условий. Появившаяся вскоре теория Ми [7] противоречит равенству инертной и тяжелой масс. Со всеми четырьмя условиями согласуется теория Нордстрема, предложенная в 1912 г. [8] и развитая затем в работах Эйнштейна [6], Эйнштейна и Фоккера [9].

Как и в теории Абрагама, в теории Нордстрема поле гравитации характеризуется запаздывающим потенциалом, который удовлетворяет уравнению Даламбера (3,5,1). В этом уравнении, как и прежде, через x, y, z обозначены пространственные декартовы координаты,

а временной координатой служит переменная $u = ict$. Градиент потенциала в четырехмерном континууме Минковского служит напряженностью поля; составляющими его являются четыре производные $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \ldots \frac{\partial\varphi}{\partial u}$.

Пространственно-временной интервал определяется обычной формулой СТО, имеющей в принятых обозначениях вид

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 - du^2. \qquad (3,6,1)$$

С элементом $d\tau$ собственного времени интервал связан соотношением $ds = cd\tau$. Четырехмерная скорость **a** частицы, которую Нордстрем назвал вектором движения, имеет проекции $a_x = \frac{dx}{d\tau}, \ldots a_u = \frac{du}{d\tau}$.

Закон движения материальной точки в гравитационном поле принимается в теории Нордстрема в форме

$$\frac{d}{d\tau}(m\mathbf{a}) = m \operatorname{grad} \varphi, \qquad (3,6,2)$$

где m — масса покоя точки.

Нетрудно убедиться в том, что при неизменной массе покоя закон движения (3,6,2) противоречит одному из основных принципов СТО — постулату постоянства скорости света. Действительно, с помощью соотношения $ds = cd\tau$ линейный элемент (3,6,1) можно переписать в виде

$$-c^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 + a_u^2,$$

откуда

$$-c\frac{dc}{d\tau} = a_x\frac{da_x}{d\tau} + \cdots + a_u\frac{da_u}{d\tau}.$$

Внеся значения $\frac{da_x}{d\tau} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \ldots \frac{da_u}{d\tau} = \frac{\partial\varphi}{\partial u}$, которые следуют из (3,6,2) при $m = \text{const}$, и принимая во внимание определение вектора a, находим

$$\frac{dc}{d\tau} = -\frac{1}{c}\frac{d\varphi}{d\tau}.$$

Это показывает, что скорость света остается постоянной только при $\varphi = \text{const}$, т. е. вне поля тяготения.

Стремясь сохранить принцип постоянства скорости света и при наличии поля, Нордстрем отказывается от условия $m = \text{const}$ и ищет закон изменения массы в поле гравитации, который обеспечит выполнимость указанного принципа.

Считая массу покоя частицы переменной, перепишем закон движения (3,6,2) в виде

$$m\frac{d\mathbf{a}}{d\tau}+\mathbf{a}\frac{dm}{d\tau}=m\,\mathrm{grad}\,\varphi.$$

Умножим это уравнение скалярно на вектор движения. В полученное равенство

$$\frac{1}{2}m\frac{da^2}{d\tau}+a^2\frac{dm}{d\tau}=m\frac{d\varphi}{d\tau}$$

внесем соотношение $a^2=-c^2$, которое непосредственно следует из линейного элемента (3,6,1).

Уравнение

$$\frac{1}{2}m\frac{dc^2}{d\tau}=-c^2\frac{dm}{d\tau}-m\frac{d\varphi}{d\tau}$$

показывает, что необходимым и достаточным условием постоянства скорости света является дифференциальное уравнение

$$c^2\frac{dm}{d\tau}+m\frac{d\varphi}{d\tau}=0,$$

которое после интегрирования дает

$$m=m_0e^{-\frac{\varphi}{c^2}}. \qquad (3,6,3)$$

Постоянная m_0 представляет здесь массу покоя частицы в точке с нулевым потенциалом.

Уравнение (3,6,2) при условии (3,6,3) принимает следующий вид:

$$\frac{d\mathbf{a}}{d\tau}=\mathrm{grad}\,\varphi+\frac{\mathbf{a}}{c^2}\frac{d\varphi}{d\tau}, \qquad (3,6,4)$$

показывая, что закон движения частицы не зависит от ее массы. Этим обеспечивается равенство инертной и тяжелой масс. Можно также показать, что закон движения в форме (3,6,4) инвариантен относительно преобразований Лоренца.

Рассмотрим задачу о движении частицы в поле одного неподвижного центра Запаздывающий потенциал (3,5,2) совпадает в этом случае с обычным ньютоновым потенциалом $\varphi=\frac{\gamma M}{r}$, где M — масса центра.

Равенство (3,6,4) представляет собой систему четырех дифференциальных уравнений второго порядка: трех уравнений для декартовых координат x, y, z и одного — для переменной u. Поскольку поле неподвижного центра является статическим, в рассматриваемом случае потенциал не зависит от переменной u, вследствие чего

последнее из уравнений системы приводится к равенству

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} = \frac{1}{c^2}\frac{d\varphi}{d\tau}\frac{du}{d\tau},$$

или, если подставить $u = ict$,

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} = \frac{1}{c^2}\frac{d\varphi}{dt}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2. \qquad (3,6,5)$$

Внеся это соотношение в очевидное преобразование

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \frac{dx}{dt}\frac{d^2t}{d\tau^2},$$

получим

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \left\{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{c^2}\frac{d\varphi}{dt}\frac{dx}{dt}\right\}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2.$$

Поэтому первое из уравнений системы (3,6,4) можно написать в форме

$$\frac{d^2x}{dt^2}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = \frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

Таким образом, векторное равенство (3,6,4) приводится к трем следующим уравнениям:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial\varphi}{dz}\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2, \qquad (3,6,6)$$

определяющим декартовы координаты в функции времени.

Найдем теперь производную $\frac{d\tau}{dt}$. Интегрируя (3,6,5), получим

$$\frac{d\tau}{dt} = he^{-\frac{\varphi}{c^2}}, \qquad (3,6,7)$$

где h — постоянная интегрирования.

Это уравнение выражает связь между собственным временем частицы и относительным временем системы отсчета. Постоянная h зависит от центрального тела и от орбиты частицы. Найдем значение этой постоянной с точностью до величин порядка $\frac{\varphi}{c^2}$. С этой целью воспользуемся линейным элементом (3,6,1) в виде

$$c^2\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = -v^2 + c^2.$$

Внося (3,6,7) и положив $e^{-\frac{2\varphi}{c^2}} = 1 - \frac{2\varphi}{c^2}$, получим

$$h^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right).$$

Для вычисления правой части применима известная формула ньютоновой задачи двух тел

$$v^2 = \gamma M\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) = 2\varphi - \frac{\gamma M}{a},$$

где a — большая полуось кеплеровой орбиты.

В принятом приближении получим

$$h^2 = 1 + \frac{\gamma M}{c^2 a}. \tag{3,6,8}$$

Система уравнений движения (3,6,6) принимает теперь следующий вид:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \left(\frac{\gamma M}{c^2 a} - \frac{2\varphi}{c^2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x};\\
\frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \left(\frac{\gamma M}{c^2 a} - \frac{2\varphi}{c^2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y};\\
\frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \left(\frac{\gamma M}{c^2 a} - \frac{2\varphi}{c^2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{3,6,9}$$

Сравнивая (3,6,9) с законом движения механики Ньютона, видим, что, кроме обычной центральной силы притяжения, на частицу действует возмущающее ускорение

$$\mathbf{R} = \frac{(\gamma M)^2}{c^2 r^3}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)\mathbf{r},$$

направленное вдоль радиуса-вектора.

Проекция этого ускорения на положительное направление радиуса-вектора равна

$$\mathrm{R} = \frac{(\gamma M)^2}{c^2 r^2}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right). \tag{3,6,10}$$

Поскольку $r < 2a$, величина R положительна и свидетельствует о том, что возмущающее ускорение является отталкивательным и состоит из членов, изменяющихся обратно пропорционально второй и третьей степени расстояния от центрального тела.

Выясним, как влияет возмущающее ускорение на элементы орбиты.

Третье из уравнений (1,6,3), определяющее движение линии апсид, принимает в нашем случае вид

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = -\frac{\gamma M}{c^2 ae\,(1 - e^2)}\{(1 + e^2)\cos\varphi + 2e\cos^2\varphi\}.$$

Интегрируя это равенство по истинной аномалии в пределах от нуля до 2π, получим угол поворота линии апсид за время одного

обращения частицы вокруг центрального тела

$$\Delta\omega = -\frac{2\pi\gamma M}{c^2 a(1-e^2)}. \qquad (3,6,11)$$

В отличие от прямого движения перигелия, наблюдаемого в действительности, в теории Нордстрема орбита прецессирует в обратном направлении.

Четвертое и пятое уравнения системы (1,6,3) в случае возмущающего ускорения (3,6,10) дают $\Delta a = \Delta e = 0$, показывая, что большая полуось и эксцентриситет не испытывают вековых изменений.

В заключение отметим, что в теории Нордстрема поле тяготения не влияет на распространение света. Как видим, изменение массы по закону (3,6,3) является необходимой и достаточной предпосылкой постоянства скорости света, следовательно, и условия $d\tau = 0$. Форма луча определяется уравнениями (3,6,6), которые при $d\tau = 0$ принимают вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

и дают

$$\frac{dx}{dt} = \text{const}; \quad \frac{dy}{dt} = \text{const}; \quad \frac{dz}{dt} = \text{const},$$

показывая, что световые лучи распространяются прямолинейно.

7. Теория Нордстрема (продолжение). Рассмотренная выше теория является существенным шагом в развитии учения о поле гравитации. Она обобщает закон тяготения в согласии с требованиями СТО и с учетом равенства инертной и тяжелой масс. Приложение этой теории к конкретным задачам приводит к результатам, по точности не уступающим выводам механики Ньютона. Если величине $\frac{\varphi}{c^2}$ приписать первый порядок, а отношению $\frac{v}{c}$ — порядок $\frac{1}{2}$, то с точностью до членов порядка $\frac{3}{2}$ теория Нордстрема совпадает с механикой Ньютона; различие между ними обнаруживается начиная только с членов второго порядка, т. е. в очень тонких особенностях движения. Следует, однако, иметь в виду, что надежно установленный эффект второго порядка — движение перигелия Меркурия — противоречит теории Нордстрема, которая, как мы видели, приводит к эффекту противоположного знака.

Развитая Нордстремом теория гравитации была одобрена Эйнштейном, посвятившим ей специальный параграф в упомянутом обзоре проблемы тяготения [6]. В 1914 г. в совместной работе Эйнштейна и Фоккера [9] предложен новый вариант теории Нордстрема, развитый с применением общего тензорного анализа.