обращения частицы вокруг центрального тела

$$\Delta\omega = -\frac{2\pi\gamma M}{c^2 a(1-e^2)}. \qquad (3,6,11)$$

В отличие от прямого движения перигелия, наблюдаемого в действительности, в теории Нордстрема орбита прецессирует в обратном направлении.

Четвертое и пятое уравнения системы (1,6,3) в случае возмущающего ускорения (3,6,10) дают $\Delta a = \Delta e = 0$, показывая, что большая полуось и эксцентриситет не испытывают вековых изменений.

В заключение отметим, что в теории Нордстрема поле тяготения не влияет на распространение света. Как видим, изменение массы по закону (3,6,3) является необходимой и достаточной предпосылкой постоянства скорости света, следовательно, и условия $d\tau = 0$. Форма луча определяется уравнениями (3,6,6), которые при $d\tau = 0$ принимают вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

и дают

$$\frac{dx}{dt} = \text{const}; \quad \frac{dy}{dt} = \text{const}; \quad \frac{dz}{dt} = \text{const},$$

показывая, что световые лучи распространяются прямолинейно.

7. Теория Нордстрема (продолжение). Рассмотренная выше теория является существенным шагом в развитии учения о поле гравитации. Она обобщает закон тяготения в согласии с требованиями СТО и с учетом равенства инертной и тяжелой масс. Приложение этой теории к конкретным задачам приводит к результатам, по точности не уступающим выводам механики Ньютона. Если величине $\frac{\varphi}{c^2}$ приписать первый порядок, а отношению $\frac{v}{c}$ — порядок $\frac{1}{2}$, то с точностью до членов порядка $\frac{3}{2}$ теория Нордстрема совпадает с механикой Ньютона; различие между ними обнаруживается начиная только с членов второго порядка, т. е. в очень тонких особенностях движения. Следует, однако, иметь в виду, что надежно установленный эффект второго порядка — движение перигелия Меркурия — противоречит теории Нордстрема, которая, как мы видели, приводит к эффекту противоположного знака.

Развитая Нордстремом теория гравитации была одобрена Эйнштейном, посвятившим ей специальный параграф в упомянутом обзоре проблемы тяготения [6]. В 1914 г. в совместной работе Эйнштейна и Фоккера [9] предложен новый вариант теории Нордстрема, развитый с применением общего тензорного анализа.

Обобщая понятие мира Минковского, отвечающего СТО, Эйнштейн пользуется четырехмерным пространственно-временным континуумом с общими координатами. Инвариантный интервал в нем можно задать линейным элементом

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j, \qquad (3,7,1)$$

в котором через x^σ, $\sigma = 1, 2, 3, 4$, обозначены пространственные и временная координаты, а коэффициентами служат компоненты g_{ij} основного метрического тензора. Одинаковые верхний и нижний значки служат индексами суммирования; знак суммирования опущен, как это принято в формулах тензорного анализа. Метрический тензор симметричен ($g_{ij} = g_{ji}$), вследствие чего в общем случае он имеет всего десять различных компонент.

Движение материальной частицы изображается в пространственно-временном континууме «мировой точкой», перемещающейся по «мировой линии». В соответствии с принципом эквивалентности принимается, что мировой линией частицы, движущейся в поле гравитации в отсутствие сил другой природы, является геодезическая линия пространственно-временного континуума. Закон движения в гравитационном поле имеет, таким образом, вид

$$\delta \int ds = 0. \qquad (3,7,2)$$

Пользуясь обычными методами вариационного исчисления, нетрудно представить этот закон в форме системы четырех дифференциальных уравнений. В общем виде эти уравнения мы приводить здесь не будем; ограничимся частным случаем, когда поле гравитации является статическим и употребляются ортогональные координаты, для которых отличны от нуля лишь диагональные компоненты метрического тензора.

Рассматривая пространственные координаты x^1, x^2, x^3 в функции времени $x^4 = t$, уравнения геодезической линии можно записать так:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{g_{\sigma\sigma}}{g_{44}}\frac{dx^\sigma}{dt}\right) - \frac{1}{2g_{44}}\frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x^\sigma}\left(\frac{dx^\alpha}{dt}\right)^2 = 0. \qquad (3,7,3)$$

Здесь α является индексом суммирования, а σ имеет в каждом уравнении одно из фиксированных значений 1, 2, 3.

В общих координатах принцип постоянства скорости света не соблюдается. Однако мы принимаем, что существует система отсчета, в которой этот принцип выполняется. В такой системе линейный элемент (3,7,1) при $ds = 0$ должен привести к условию $-dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2dt^2 = 0$, выражающему постоянство скорости света.

Этому требованию можно удовлетворить только в том случае,

если в указанной системе отсчета линейный элемент принимает вид

$$ds^2 = \Phi^2(-dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2dt^2), \qquad (3,7,4)$$

где Φ — некоторая скалярная функция координат и времени.

Легко видеть, что, допустив существование одной системы координат, отвечающей квадратической форме (3,7,4), мы тем самым допускаем существование сколь угодно большого числа таких систем, связанных между собой преобразованием Лоренца.

Для функции Φ Эйнштейн получает уравнение

$$\Phi\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right) = kT, \qquad (3,7,5)$$

обобщающее уравнение Пуассона для гравитационного потенциала. Здесь k — постоянная, T — скаляр, зависящий от распределения масс, которые служат источником поля тяготения.

С точки зрения общих предпосылок оба варианта теории Нордстрема вполне равноценны, поскольку они в одинаковой степени отвечают специальному принципу относительности, постулату постоянства скорости света и равенству инертной и тяжелой масс. Их следствия, относящиеся к конкретным задачам, также во многом оказываются одинаковыми. В качестве иллюстрации вновь рассмотрим задачу о движении частицы в постоянном поле одного центра, основываясь на втором варианте теории.

Для статического поля в вакууме уравнение (3,7,5) превращается в уравнение Лапласа $\nabla^2\Phi = 0$ и в случае центральной симметрии имеет решение $\Phi = \frac{A}{r} + B$, где A, B — постоянные интегрирования. Считая, что на бесконечности квадратическая форма (3,7,4) совпадает с линейным элементом СТО, находим $B = 1$. Следовательно,

$$\Phi = 1 + \frac{A}{r}. \qquad (3,7,6)$$

Составим уравнения движения.

Отличные от нуля компоненты метрического тензора, отвечающего линейному элементу (3,7,4),

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -\Phi^2; \quad g_{44} = c^2\Phi^2.$$

Поэтому, положив x^σ равным соответственно декартовым координатам x, y, z, первое из уравнений (3,7,3) можно написать в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{1}{\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\} + \frac{c^2}{\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0,$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c^2 - v^2}{\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0, \qquad (3,7,7)$$

где v — скорость частицы.

Чтобы определить значение постоянной A, перейдем к приближению Ньютона, для чего в (3,7,7) следует опустить v^2. Уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial}{\partial x}(c^2 \ln \Phi) = 0$$

совпадает с законом движения Ньютона, если величину $c^2 \ln \Phi$ отождествить с гравитационным потенциалом φ. Следовательно,

$$\Phi = e^{-\frac{\varphi}{c^2}} \simeq 1 - \frac{\gamma M}{c^2 r}, \qquad (3,7,8)$$

что совпадает с решением (3,7,6) при $A = -\frac{\gamma M}{c^2}$, где M — масса центра гравитации.

Возвращаясь к равенству (3,7,7), можно переписать его следующим образом:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{v^2}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial x}. \qquad (3,7,9)$$

Аналогичную форму имеют два другие уравнения системы (3,7,3).

Таким образом, на частицу, кроме ньютоновой силы притяжения к центральному телу, действует возмущающее ускорение

$$\mathbf{R} = \frac{v^2}{c^2}\frac{\gamma M}{r^3}\mathbf{r},$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор частицы относительно центра притяжения.

Возмущающее ускорение является отталкивательным и совпадает со значением (3,6,10), найденным на основе первоначальной теории Нордстрема. При $v = c$ три уравнения вида (3,7,7) дают для производных $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ постоянные значения, показывая, что свет распространяется в поле тяготения прямолинейно.

8. Теория Эйнштейна — Гроссмана. С математической точки зрения теорию гравитации Нордстрема можно назвать *скалярной*, поскольку поле тяготения характеризуется в ней скалярной функцией — обобщенным гравитационным потенциалом. Важнейшей физической особенностью этой теории является инвариантность ее уравнений относительно преобразования Лоренца, т. е. выполнимость специального принципа относительности. Это значит, что, с точностью до преобразований Лоренца, теория Нордстрема выполняется только в определенной системе отсчета, совпадающей с инерциальными координатами специальной теории относительности, тогда как при переходе к ускоряющейся системе отсчета теория нарушается.

Если движение частицы изучается в ускоренной системе, то необходимо учесть также силы инерции. Таким образом, как и в