Глава IV. ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ И ГЕОМЕТРИЯ РИМАНА

1. Эвклидово пространство в криволинейных координатах. Тензорный анализ и геометрия римановых пространств составляют основу математического аппарата ОТО. В многочисленных учебных руководствах и специальных монографиях эти разделы математики излагаются в различных аспектах с большой полнотой и строгостью. Здесь кратко рассматриваются только основные понятия и приводятся лишь необходимые формулы, непосредственно применяемые в дальнейшем. Глубокое обоснование и анализ этих понятий и формул не входят в нашу задачу; за ними мы отсылаем читателей к специальным математическим изданиям. В конце главы указаны лишь важнейшие классические исследования и современные учебные руководства [1—5].

Рассмотрим пространство Эвклида n измерений. Вводя общие криволинейные координаты, каждую точку пространства можно характеризовать с помощью n параметров $x^1, \dots x^n$ — координат точки. Геометрическим местом точек, для которых все координаты, кроме одной (например, x^i), сохраняют постоянные значения, является непрерывная линия, называемая к о о р д и н а т н о й л и н и е й. В каждой точке пространства пересекаются все n координатных линий.

Выбрав каким-нибудь способом н а ч а л о, построим в пространстве Эвклида радиус-вектор $\mathbf{r}$ и будем считать этот вектор функцией координат его конечной точки: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, \dots x^n)$. Частные производные $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} = \mathbf{e}_i$ представляют собой единичные векторы касательных к координатным линиям; будем называть их к о о р д и н а т н ы м и в е к т о р а м и. Во всех точках пространства они линейно независимы. Это значит, что сумма вида $m^\alpha \mathbf{e}_\alpha$ не может оказаться равной нулю ни при каких значениях коэффициентов m^α, если только исключить тривиальный случай, когда все $m^\alpha = 0$.

Рассмотрим две бесконечно близкие точки пространства с координатами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$. Разложив дифференциал радиуса-вектора на компоненты, направленные вдоль координатных линий, можно написать

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_\alpha dx^\alpha, \qquad (4,1,1)$$

где dx^α — дифференциалы координат, которые являются составляющими вектора $d\mathbf{r}$.

Тот же вектор можно задать другим способом, определив его с помощью проекций на направления координатных линий в данной точке. Обозначив проекции через dx_i, имеем $dx_i = d\mathbf{r}, \mathbf{e}_i$. Если употребляются прямоугольные координаты, то составляющие и проекции совпадают; в общих координатах они различны.

Преобразуем координаты, перейдя от системы x^i к новой системе $x^{i'}$. Форму преобразования оставим неопределенной, но допустим, что она удовлетворяет необходимым для дальнейшего аналитическим требованиям, в частности, позволяет однозначно выразить координаты одной системы через координаты другой. Введенные выше величины в новой системе координат обозначим через $\mathbf{e}_{i'}$, $dx^{i'}$, $dx_{i'}$.

Радиус-вектор $\mathbf{r}$ какой-либо точки пространства представляет собой функцию ее координат x^i, которые, в свою очередь, являются функциями переменных $x^{i'}$. Поэтому, дифференцируя вектор $\mathbf{r}$ по координате $x^{i'}$, получим

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}},$$

где α — индекс суммирования, принимающий значения $1, 2, \ldots n$.

Следовательно,

$$\mathbf{e}_{i'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}}\mathbf{e}_\alpha. \qquad (4,1,2)$$

Координатные векторы преобразуют с помощью матрицы $\left(\frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}}\right)$, элементами которой служат n^2 производных от старых координат по новым. Если обе системы декартовы, то эти производные постоянны; в общем случае они являются функциями координат.

Выразим новые координаты через старые: $x^{i'} = x^{i'}(x^1, \ldots x^n)$. Образуя полный дифференциал, находим закон преобразования составляющих вектора $d\mathbf{r}$

$$dx^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha}dx^\alpha. \qquad (4,1,3)$$

В этом случае преобразование осуществляется с помощью матрицы $\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}\right)$, обратной матрице $\left(\frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}}\right)$.

По определению, проекции вектора $d\mathbf{r}$ в новой системе равны $dx_{i'} = d\mathbf{r}, \mathbf{e}_{i'}$. Внеся сюда (4,1,2), получим

$$dx_{i'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}}(d\mathbf{r}, \mathbf{e}_\alpha) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}}dx_\alpha. \qquad (4,1,4)$$

Сравним формулы перехода (4,1,3) и (4,1,4) с соотношением (4,1,2). Проекции вектора $d\mathbf{r}$ преобразуются как координатные векторы, а его составляющие — по обратному закону. В соответствии с этим вектор, заданный проекциями, принято называть ковариантным, тогда как при задании его составляющими он называется контравариантным. Те же термины употребляются для обозначения компонент вектора: dx_i — ковариантные, dx^i — контравариантные. Индекс ковариантности служит нижним значком, индекс контравариантности — верхним.

Нетрудно найти связь между ковариантными и контравариантными компонентами вектора $d\mathbf{r}$. Внеся (4,1,1) в соотношение $dx_i = d\mathbf{r}, \mathbf{e}_i$, получим

$$dx_i = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_\alpha)\, dx^\alpha = g_{i\alpha} dx^\alpha. \tag{4,1,5}$$

Коэффициенты g_{ik}, связывающие компоненты обоих типов, играют в тензорном анализе очень важную роль и встречаются во многих формулах геометрии. В частности, они позволяют составить общую формулу, определяющую расстояние между двумя смежными точками пространства. Если радиусы-векторы этих точек соответственно равны $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$, то расстояние ds между ними можно определить с помощью очевидного соотношения $ds^2 = d\mathbf{r}, d\mathbf{r}$. Воспользовавшись разложением (4,1,1), получим $ds^2 = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)\, dx^i dx^j$. Следовательно,

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j. \tag{4,1,6}$$

Суммирование выполняется здесь по каждому из индексов.

Коэффициенты g_{ij} представляют собой функции координат; общее их число равно n^2. Однако среди них имеются равные, поскольку по определению они удовлетворяют условию симметрии $g_{ij} = g_{ji}$. Нетрудно убедиться в том, что число различных значений g_{ij} в общем случае равно $\frac{1}{2}n\,(n+1)$.

Найдем закон преобразования величин g_{ij} при переходе от одной системы координат к другой.

По определению, имеем $g_{i'j'} = (\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}_{j'})$. Поэтому, согласно (4,1,2), получим

$$g_{i'j'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{j'}} (\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta),$$

т. е.

$$g_{i'j'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{j'}} g_{\alpha\beta}. \tag{4,1,7}$$

Для вычисления новых значений коэффициентов g_{ij} необходимо дважды применить матрицу, с помощью которой преобразуются

ковариантные векторы. Величины, преобразующиеся по закону (4,1,7) являются компонентами ковариантного тензора второго порядка. В соответствии с таким определением ковариантный вектор следует назвать ковариантным тензором первого порядка.

Аналогично вводится определение контравариантного тензора второго порядка. Пример такого тензора можно построить, вернувшись к соотношению (4,1,5), связывающему ко- и контравариантные компоненты элементарного вектора $d\mathbf{r}$.

Составим определитель

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix}, \tag{4,1,8}$$

который в дальнейшем предполагается отличным от нуля.

Обозначим через $A^{i\alpha}$ алгебраическое дополнение элемента $g_{i\alpha}$ этого определителя и составим сумму $A^{i\alpha}g_{k\alpha}$, оставляя значки i, k фиксированными. Из теории определителей известно, что при $i = k$ эта сумма равна определителю, тогда как при $i \neq k$ — нулю.

Итак,

$$A^{i\alpha}g_{k\alpha} = \delta^i_k g, \tag{4,1,9}$$

где δ^i_k — так называемые символы Кронекера, заданные соотношением

$$\delta^i_k = \begin{matrix} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{matrix} \tag{4,1,10}$$

Напишем формулу (4,1,5) в виде $dx_\alpha = g_{\alpha\beta}dx^\beta$ и умножим ее на $A^{i\alpha}$. Суммируя по индексу α, получим

$$A^{i\alpha}dx_\alpha = A^{i\alpha}g_{\alpha\beta}dx^\beta = g\delta^i_\beta dx^\beta = gdx^i.$$

Следовательно,

$$dx^i = g^{i\alpha}dx_\alpha; \quad g^{ij} = \frac{A^{ij}}{g}. \tag{4,1,11}$$

Коэффициенты g^{ij} позволяют выразить контравариантные компоненты вектора $d\mathbf{r}$ через ковариантные компоненты того же вектора.

Рассмотрим свойства этих коэффициентов подробнее. Прежде всего заметим, что они удовлетворяют условию симметрии $g^{ij} = g^{ji}$, поскольку из симметричности тензора g_{ij} непосредственно следует $A^{ij} = A^{ji}$.

Образовав произведение $g_{i\alpha}g^{j\alpha}$ и выполнив суммирование по индексу α, получим соотношение

$$g_{i\alpha}g^{j\alpha} = \delta_i^j, \tag{4,1,12}$$

неоднократно используемое в дальнейшем.

Найдем закон, по которому преобразуются коэффициенты g^{ij} при переходе к новой системе координат.

Согласно (4,1,11), в новой системе координат имеем $dx^{i'} = g^{i'\alpha'}dx_{\alpha'}$. Внесем сюда (4,1,3) и (4,1,4); получим

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha}dx^\alpha = g^{i'\alpha'}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\alpha'}}dx_\beta,$$

или, если, согласно (4,1,11), в левой части равенства перейти к ковариантным компонентам вектора $d\mathbf{r}$,

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha}g^{\alpha\beta}dx_\beta = g^{i'\alpha'}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\alpha'}}dx_\beta.$$

Поскольку величины dx_β независимы, из соотношения

$$\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha}g^{\alpha\beta} - g^{i'\alpha'}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\alpha'}}\right)dx_\beta = 0$$

с необходимостью следует

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha}g^{\alpha\beta} = g^{i'\alpha'}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\alpha'}}.$$

Умножим это равенство на производную $\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^\beta}$ и суммируем по индексу β:

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^\beta}g^{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^\beta}g^{i'\alpha'}.$$

Принимая во внимание очевидное соотношение $\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^\beta} = \delta_{\alpha'}^{j'}$, а также равенство $\delta_{\alpha'}^{j'}g^{i'\alpha'} = g^{i'j'}$, окончательно получим

$$g^{i'j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^\beta}g^{\alpha\beta}. \tag{4,1,13}$$

Найденный закон преобразования состоит в двукратном применении преобразования (4,1,3), присущего контравариантному вектору. Это показывает, что совокупность коэффициентов g^{ij} образует контравариантный тензор второго порядка.

В заключение преобразуем символы Кронекера (4,1,10). Согласно (4,1,12), в новой системе координат имеет место равенство

$$\delta_{i'}^{i'} = g^{i'\alpha'} g_{i'\alpha'}.$$

Внесем сюда преобразования (4,1,7) и (4,1,13).

$$\delta_{i'}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x^{\alpha'}} g^{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{i'}} g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma}.$$

Принимая во внимание (4,1,12), окончательно получим

$$\delta_{i'}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{i'}} \delta_{\beta}^{\alpha}. \qquad (4,1,14)$$

В данном случае одновременно используются законы преобразования как ковариантного, так и контравариантного векторов. Символы Кронекера образуют смешанный тензор второго порядка — ковариантный относительно нижнего индекса и контравариантный относительно верхнего.

Рассмотренный тензор второго порядка, заданный ковариантными g_{ij} или контравариантными g^{ij} компонентами, называется метрическим тензором. Он играет фундаментальную роль в теории римановых пространств, являясь основной характеристикой их геометрических свойств.

2. Тензоры и их свойства. Выше были рассмотрены примеры тензоров, которые при переходе от одной системы координат к другой преобразуются по определенным законам, полученным путем соответствующего обобщения формулы преобразования координатных векторов. Расширяя введенные понятия, дадим более общее определение тензора.

Совокупность величин T_{klm}^{ij} представляет собой тензор пятого порядка — ковариантный относительно нижних индексов и контравариантный относительно верхних, если при переходе от одной системы координат к другой эти величины преобразуются по формулам вида

$$T_{k'l'm'}^{i'j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x^{l'}} \frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial x^{m'}} T_{\gamma\delta\varepsilon}^{\alpha\beta}. \qquad (4,2,1)$$

Это определение выполняется для тензора любого порядка и произвольного строения. В частности, тензор первого порядка является вектором, а тензор нулевого порядка — скаляром, или инвариантом, сохраняющим одно и то же значение во всех системах координат.

Заметим, что в какой-нибудь одной системе координат все компоненты тензора можно задать совершенно произвольно; в других системах координат компоненты определятся вполне однозначно