В заключение преобразуем символы Кронекера (4,1,10). Согласно (4,1,12), в новой системе координат имеет место равенство

$$\delta_{j'}^{i'} = g^{i'\alpha'} g_{j'\alpha'}.$$

Внесем сюда преобразования (4,1,7) и (4,1,13).

$$\delta_{j'}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x^{\alpha'}} g^{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{j'}} g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma}.$$

Принимая во внимание (4,1,12), окончательно получим

$$\delta_{j'}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{j'}} \delta_{\beta}^{\alpha}. \tag{4,1,14}$$

В данном случае одновременно используются законы преобразования как ковариантного, так и контравариантного векторов. Символы Кронекера образуют с м е ш а н н ы й т е н з о р в т о р о г о п о р я д к а — ковариантный относительно нижнего индекса и контравариантный относительно верхнего.

Рассмотренный тензор второго порядка, заданный ковариантными g_{ij} или контравариантными g^{ij} компонентами, называется м е т р и ч е с к и м т е н з о р о м. Он играет фундаментальную роль в теории римановых пространств, являясь основной характеристикой их геометрических свойств.

2. Тензоры и их свойства. Выше были рассмотрены примеры тензоров, которые при переходе от одной системы координат к другой преобразуются по определенным законам, полученным путем соответствующего обобщения формулы преобразования координатных векторов. Расширяя введенные понятия, дадим более общее определение тензора.

Совокупность величин T_{klm}^{ij} представляет собой тензор пятого порядка — ковариантный относительно нижних индексов и контравариантный относительно верхних, если при переходе от одной системы координат к другой эти величины преобразуются по формулам вида

$$T_{k'l'm'}^{i'j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x^{l'}} \frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial x^{m'}} T_{\gamma\delta\varepsilon}^{\alpha\beta}. \tag{4,2,1}$$

Это определение выполняется для тензора любого порядка и произвольного строения. В частности, тензор первого порядка является вектором, а тензор нулевого порядка — с к а л я р о м, или и н в а р и а н т о м, сохраняющим одно и то же значение во всех системах координат.

Заметим, что в какой-нибудь одной системе координат все компоненты тензора можно задать совершенно произвольно; в других системах координат компоненты определятся вполне однозначно принятым законом преобразования. Чтобы убедиться в этом, необходимо показать, что при непосредственном переходе от одной системы координат к другой компоненты данного тензора оказываются такими же, как при любом числе промежуточных систем.

В качестве примера рассмотрим переход от координат x^i к системе $x^{i'}$, а затем к $x^{i''}$. В результате первого преобразования для компонент некоторого тензора третьего порядка получим

$$T^{i'}_{j'k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{k'}} T^{\alpha}_{\beta\gamma}.$$

Второе преобразование дает

$$T^{i''}_{j''k''} = \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^{j''}} \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^{k''}} T^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} =$$

$$= \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^{j''}} \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^{k''}} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}} T^{\alpha}_{\beta\gamma}.$$

Согласно теореме о дифференцировании сложных функций,

$$\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{\alpha}} \text{ и т. п.}$$

Поэтому

$$T^{i''}_{j''k''} = \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{j''}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{k''}} T^{\alpha}_{\beta\gamma}.$$

Такой же результат получается при непосредственном переходе от координат x^i к координатам x''.

Из рассмотренного свойства вытекает заключение о сохранении тензорных уравнений.

Допустим, что в какой-либо системе координат установлено равенство двух тензоров: $T^i_{jk} = L^i_{jk}$. Перейдя к новой системе, вычислим компоненты $T^{i'}_{j'k'}$ и $L^{i'}_{j'k'}$ по известным формулам преобразования. Убедившись в том, что новые компоненты выражаются через старые с помощью одинаковых соотношений, найдем $T^{i'}_{j'k'} = L^{i'}_{j'k'}$. Таким образом, тензорное уравнение, полученное в одной системе координат, выполняется во всех других системах. Это свойство тензорных уравнений имеет в ОТО фундаментальное значение.

Перечислим основные операции тензорной алгебры.

Пусть A^{ij}_k и B^{ij}_k — тензоры одинакового строения. Основываясь на определении тензора, легко видеть, что совокупность величин $C^{ij}_k = A^{ij}_k + B^{ij}_k$ является тензором того же порядка и строения. Эта операция, называемая *сложением тензоров,* инвариантна относительно общего преобразования координат.

Если A^i_j и B^k_{lm} — тензоры, то $C^{ik}_{jlm} = A^i_j B^k_{lm}$ — также тензор, порядки ко- и контравариантности которого равны суммам соответствующих порядков двух первых тензоров. Эта операция носит название *умножения тензоров;* она также инвариантна относительно общего преобразования координат.

Рассмотрим какой-либо смешанный тензор A^{ij}_{kl}. Выделим компоненты, у которых один из индексов ковариантности совпадает с одним из индексов контравариантности, и составим их сумму

$$A^{i\alpha}_{k\alpha} = A^{i1}_{k1} + \cdots + A^{in}_{kn}.$$

Нетрудно показать, что совокупность величин $A^{i\alpha}_{k\alpha}$ является тензором, у которого порядки ко- и контравариантности на единицу ниже, чем у исходного тензора. В данном случае $A^{i\alpha}_{k\alpha}$ представляет собой смешанный тензор второго порядка — ковариантный относительно индекса k и контравариантный относительно i. Эта операция называется *свертыванием*. Если порядки ко- и контравариантности одинаковы, то можно выполнить *полное свертывание,* результатом которого является с к а л я р, или и н в а р и а н т, данного тензора. Так, двойная сумма $A^{\alpha\beta}_{\alpha\beta}$ служит инвариантом тензора A^{ij}_{kl}. В качестве простого примера имеем $\delta^\alpha_\alpha = n$.

Несколько более сложным примером является свертывание произведения $g_{ij}g^{kl}$. Имеем $g_{i\alpha}g^{k\alpha} = \delta^k_i$ (см. формулу (4,1,12)), $g_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} = \delta^\alpha_\alpha = n$.

Сочетание умножения и свертывания позволяет осуществить особые операции, называемые *поднятием* и *опусканием* индексов.

Пусть A_{ijk} — ковариантный тензор третьего порядка. Составим произведение $A_{ij\alpha}g^{k\beta}$ и, положив $\alpha = \beta$, выполним свертывание. Полученный таким образом тензор $A_{ij\alpha}g^{k\alpha}$ имеет второй порядок ковариантности и первый порядок контравариантности. Его обозначают обыкновенно символом A^k_{ij}; один из индексов оказался поднятым.

Аналогично, умножив тензор B^{ijk} на g_{lm} и произведя затем свертывание, можно образовать тензор B^{ij}_k, опустив один из индексов исходного тензора. Это дает возможность изменять строение тензоров: по заданным ковариантным компонентам вычислять смешанные или контравариантные компоненты и наоборот. В частности, символы Кронекера можно рассматривать как результат поднятия одного из индексов ковариантного метрического тензора или как результат опускания одного индекса контравариантного тензора.

3. Параллельный перенос тензора. При задании двух тензоров одинакового строения в одной точке пространства вопрос об их равенстве или неравенстве не требует особого исследования и решается путем непосредственного сравнения компонент. Тензоры считаются