Если A^i_j и B^k_{lm} — тензоры, то $C^{ik}_{jlm} = A^i_j B^k_{lm}$ — также тензор, порядки ко- и контравариантности которого равны суммам соответствующих порядков двух первых тензоров. Эта операция носит название *умножения тензоров;* она также инвариантна относительно общего преобразования координат.

Рассмотрим какой-либо смешанный тензор A^{ij}_{kl}. Выделим компоненты, у которых один из индексов ковариантности совпадает с одним из индексов контравариантности, и составим их сумму

$$A^{i\alpha}_{k\alpha} = A^{i1}_{k1} + \cdots + A^{in}_{kn}.$$

Нетрудно показать, что совокупность величин $A^{i\alpha}_{k\alpha}$ является тензором, у которого порядки ко- и контравариантности на единицу ниже, чем у исходного тензора. В данном случае $A^{i\alpha}_{k\alpha}$ представляет собой смешанный тензор второго порядка — ковариантный относительно индекса k и контравариантный относительно i. Эта операция называется *свертыванием*. Если порядки ко- и контравариантности одинаковы, то можно выполнить *полное свертывание,* результатом которого является с к а л я р, или и н в а р и а н т, данного тензора. Так, двойная сумма $A^{\alpha\beta}_{\alpha\beta}$ служит инвариантом тензора A^{ij}_{kl}. В качестве простого примера имеем $\delta^\alpha_\alpha = n$.

Несколько более сложным примером является свертывание произведения $g_{ij}g^{kl}$. Имеем $g_{i\alpha}g^{k\alpha} = \delta^k_i$ (см. формулу (4,1,12)), $g_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} = \delta^\alpha_\alpha = n$.

Сочетание умножения и свертывания позволяет осуществить особые операции, называемые *поднятием* и *опусканием* индексов.

Пусть A_{ijk} — ковариантный тензор третьего порядка. Составим произведение $A_{ij\alpha}g^{k\beta}$ и, положив $\alpha = \beta$, выполним свертывание. Полученный таким образом тензор $A_{ij\alpha}g^{k\alpha}$ имеет второй порядок ковариантности и первый порядок контравариантности. Его обозначают обыкновенно символом A^k_{ij}; один из индексов оказался поднятым.

Аналогично, умножив тензор B^{ijk} на g_{lm} и произведя затем свертывание, можно образовать тензор B^{ij}_k, опустив один из индексов исходного тензора. Это дает возможность изменять строение тензоров: по заданным ковариантным компонентам вычислять смешанные или контравариантные компоненты и наоборот. В частности, символы Кронекера можно рассматривать как результат поднятия одного из индексов ковариантного метрического тензора или как результат опускания одного индекса контравариантного тензора.

3. Параллельный перенос тензора. При задании двух тензоров одинакового строения в одной точке пространства вопрос об их равенстве или неравенстве не требует особого исследования и решается путем непосредственного сравнения компонент. Тензоры считаются равными, если их соответствующие компоненты одинаковы. Если же тензоры заданы в различных точках пространства, то при употреблении криволинейных координат вопрос об их равенстве или неравенстве усложняется.

Пусть, например, в точках $M_1 (x_1^i)$ и $M_2 (x_2^i)$ заданы векторы с контравариантными компонентами y_1^i и y_2^i соответственно. Поскольку координатные векторы в указанных точках различны, непосредственное сравнение компонент не может служить признаком равенства или неравенства векторов. Предварительно необходимо ввести в одной из точек местную систему координат, выбрав ее так, чтобы координатные векторы этой системы совпали с координатными векторами в другой точке. Если при этом соответственные компоненты рассматриваемых векторов окажутся одинаковыми, то и сами векторы равны. Такое определение равенства применимо для тензоров любого порядка и строения. Если два тензора одинакового строения, заданные в различных точках пространства, отвечают этому определению, то их называют равными; каждый из них представляет собой результат *параллельного переноса* тензора из одной точки в другую. Для выяснения равенства или неравенства тензоров, заданных в различных точках, нет необходимости в фактическом выборе местной системы координат. Имеется возможность найти в общем виде закон изменения компонент тензора при его параллельном переносе из одной точки пространства в другую.

Рассмотрим прежде всего вопрос о бесконечно малом параллельном переносе контравариантного вектора. Пусть вектор y^i задан в точке $M(x^i)$. Требуется определить, какие приращения приобретут компоненты этого вектора при его параллельном переносе в точку $M' (x^i + dx^i)$.

В точке M координатные направления определяются единичными векторами $\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки M относительно произвольно выбранного начала. При переходе к точке M' координатные векторы изменяются на $d\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^\alpha} dx^\alpha = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x^i \partial x^\alpha} dx^\alpha$. Величина $\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j}$ представляет собой вектор, симметричный относительно индексов i, j. Разложив его на составляющие, направленные вдоль координатных линий, можно написать $\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^\alpha \mathbf{e}_\alpha$, где Γ_{ij}^α — коэффициенты разложения, отвечающие условию симметрии $\Gamma_{ij}^\alpha = \Gamma_{ji}^\alpha$.

Для определения этих коэффициентов дифференцируем известное соотношение $g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \left(\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^k}, \mathbf{e}_j\right) + \left(\mathbf{e}_i, \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^k}\right). \qquad (4,3,1)$$

Умножив равенство $\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j} = \Gamma^\alpha_{ij}\mathbf{e}_\alpha$ скалярно на вектор $\mathbf{e}_k$, получим

$$\left(\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j}, \mathbf{e}_k\right) = \Gamma^\alpha_{ij}(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_k) = g_{\alpha k}\Gamma^\alpha_{ij}.$$

Введя обозначение

$$g_{\alpha k}\Gamma^\alpha_{ij} = \Gamma_{ij,k} \tag{4,3,2}$$

и выполнив соответствующую перестановку индексов, найдем

$$\left(\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^k}, \mathbf{e}_j\right) = \Gamma_{ik,j}.$$

Поэтому (4,3,1) можно переписать так:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{ik,j} + \Gamma_{jk,i}. \tag{4,3,3}$$

С помощью этого соотношения нетрудно найти $\Gamma_{ij,k}$, после чего искомые коэффициенты Γ^k_{ij} вычисляются на основании (4,3,2).

Круговая перестановка индексов в (4,3,3) позволяет составить выражения для производных $\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}$ и $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}$. Вычтя из суммы этих производных величину (4,3,3), получим

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right). \tag{4,3,4}$$

Для вычисления коэффициентов Γ^k_{ij} напишем (4,3,2) в виде $g_{\alpha\beta}\Gamma^\beta_{ij} = \Gamma_{ij,\alpha}$. Умножив это равенство на $g^{\alpha k}$ и просуммировав по α, найдем

$$g_{\alpha\beta}g^{\alpha k}\Gamma^\beta_{ij} = \delta^k_\beta\Gamma^\beta_{ij} = g^{\alpha k}\Gamma_{ij,\alpha},$$

откуда непосредственно следует

$$\Gamma^k_{ij} = g^{\alpha k}\Gamma_{ij,\alpha}. \tag{4,3,5}$$

Величины $\Gamma_{ij,k}$ и Γ^k_{ij} называются *символами Кристофеля* первого и второго рода соответственно. Они симметричны относительно индексов i, j и являются однородными линейными функциями производных от компонент метрического тензора по координатам. Не будучи тензорами, символы Кристофеля входят во многие формулы тензорного анализа.

Возвращаемся к задаче о параллельном переносе вектора.

Воспользовавшись разложением $\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^\alpha} = \Gamma^\beta_{i\alpha}\mathbf{e}_\beta$, можно представить приращение вектора $\mathbf{e}_i$ в виде $d\mathbf{e}_i = \Gamma^\beta_{i\alpha}\mathbf{e}_\beta dx^\alpha$. Таким образом, координатные векторы в точках M и M' соответственно равны $\mathbf{e}_i$ и

$\mathbf{e}_i + \Gamma^{\beta}_{i\alpha}\mathbf{e}_{\beta}dx^{\alpha}$. Как известно, вектор равен сумме произведений его контравариантных составляющих на единичные векторы координатных направлений (рис. 13). Поскольку составляющие в точках M, M' соответственно равны y^i и $y^i + dy^i$, то условие параллельного переноса выражается уравнением

$$\mathbf{e}_i y^i = (\mathbf{e}_i + \Gamma^{\beta}_{i\alpha}\mathbf{e}_{\beta}dx^{\alpha})(y^i + dy^i).$$

С точностью до бесконечно малых первого порядка имеем

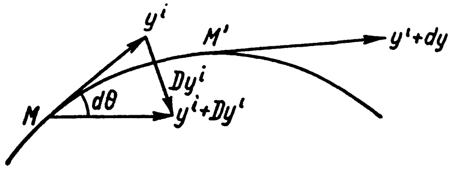

Рис. 13.

$$\Gamma^{\beta}_{i\alpha}\mathbf{e}_{\beta}y^i dx^{\alpha} + \mathbf{e}_i dy^i = 0,$$

или

$$(\Gamma^{i}_{\alpha\beta}y^{\alpha}dx^{\beta} + dy^i)\mathbf{e}_i = 0,$$

откуда, ввиду произвольности системы координатных векторов, следует

$$dy^i = -\Gamma^{i}_{\alpha\beta}y^{\alpha}dx^{\beta}. \qquad (4,3,6)$$

Эта формула и определяет приращение контравариантных компонент при параллельном переносе вектора в бесконечно близкую точку.

Выясним, как при параллельном переносе изменяются ковариантные компоненты вектора.

В точке M эти компоненты определяются, как мы знаем, формулами $y_i = (\mathbf{y}, \mathbf{e}_i)$. В точке M' значение ковариантной компоненты $y_i + dy_i$ равно скалярному произведению вектора y на координатный вектор $\mathbf{e}_i + \Gamma^{\beta}_{i\alpha}\mathbf{e}_{\beta}dx^{\alpha}$. Следовательно,

$$y_i + dy_i = (\mathbf{y}, \mathbf{e}_i) + \Gamma^{\beta}_{i\alpha}(\mathbf{y}, \mathbf{e}_{\beta})dx^{\alpha},$$

или

$$dy_i = \Gamma^{\beta}_{i\alpha}y_{\beta}dx^{\alpha}. \qquad (4,3,7)$$

Найденные законы изменения ко- и контравариантных компонент при параллельном переносе вектора легко обобщаются на случай тензора любого строения. Так, при переносе в бесконечно близкую точку смешанного тензора третьего порядка его компоненты приобретают приращения

$$dX^{i}_{jk} = -\Gamma^{i}_{\alpha\beta}X^{\beta}_{jk}dx^{\alpha} + \Gamma^{\beta}_{j\alpha}X^{i}_{\beta k}dx^{\alpha} + \Gamma^{\beta}_{\alpha k}X^{i}_{j\beta}dx^{\alpha}. \qquad (4,3,8)$$

Приложим операцию параллельного переноса к метрическому тензору.

Пусть в пространстве задано поле тензора g_{ij}. Если в точке M (x^{α}) компоненты этого тензора равны g_{ij}, то в точке M' $(x^{\alpha} + dx^{\alpha})$ они определяются формулами $g_{ij} + dg_{ij}$, где $dg_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\alpha} dx^\alpha$. Произведем параллельный перенос тензора g_{ij} из точки M в точку M'. Приращения компонент, обусловленные этим переносом, обозначим через Δg_{ij}. Согласно общей формуле (4,3,8), имеем

$$\Delta g_{ij} = \Gamma^\beta_{i\alpha} g_{j\beta} dx^\alpha + \Gamma^\beta_{j\alpha} g_{i\beta} dx^\alpha.$$

Воспользовавшись (4,3,5), заменим символы Кристофеля второго рода символами первого рода.

$$\Delta g_{ij} = (g_{j\beta} g^{\beta\gamma} \Gamma_{i\alpha,\gamma} + g_{i\beta} g^{\beta\gamma} \Gamma_{j\alpha,\gamma})\, dx^\alpha =$$
$$= (\delta^\gamma_j \Gamma_{i\alpha,\gamma} + \delta^\gamma_i \Gamma_{j\alpha,\gamma})\, dx^\alpha = (\Gamma_{i\alpha,j} + \Gamma_{j\alpha,i})\, dx^\alpha.$$

Согласно (4,3,3), искомое приращение оказывается равным

$$\Delta g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\alpha} dx^\alpha = dg_{ij},$$

совпадая с дифференциалом, обусловленным различием координат в точках M, M' Это значит, что поле метрического тензора можно рассматривать как результат параллельного переноса этого тензора из какой-либо одной точки во все другие точки пространства.

Нетрудно убедиться в том, что такой же особенностью обладают тензоры g^{ij} и δ^i_j. Так, приращение смешанного тензора δ^i_j, вызванного его параллельным переносом, равно

$$\Delta \delta^i_j = - \Gamma^i_{\alpha\beta} \delta^\beta_j dx^\alpha + \Gamma^\beta_{j\alpha} \delta^i_\beta dx^\alpha = 0,$$

что совпадает с дифференциалом этого тензора, имеющего одинаковые значения компонент во всех точках пространства.

Мы рассмотрели задачу о параллельном переносе тензора в бесконечно близкую точку. Остается указать, каким образом можно осуществить параллельный перенос на конечное расстояние.

Допустим, что некоторый контравариантный вектор задан в точке M (x^α_0) своими компонентами y^i_0. Проведем через эту точку непрерывную линию, заданную уравнениями $x^i = x^i\,(\tau)$, где τ — параметр, принимающий для точки M значение τ_0. Требуется параллельно перенести вектор вдоль данной линии.

Соотношение (4,3,6) определяет приращение компонент вектора при его параллельном переносе между двумя бесконечно близкими точками кривой. Разделив это соотношение на приращение параметра $d\tau$, отвечающее переходу между указанными точками, получим

$$\frac{dy^i}{d\tau} + \Gamma^i_{\alpha\beta} \frac{dx^\beta}{d\tau} y^\alpha = 0. \qquad (4,3,9)$$

Входящие сюда символы Кристофеля известным образом выражаются через составляющие метрического тензора и их производные по координатам. Для данной линии эти символы являются определенными функциями параметра τ, зависящими от уравнений линии. Теми же уравнениями определяются производные $\frac{dx^\beta}{d\tau}$.

Равенства (4,3,9) составляют систему линейных однородных уравнений первого порядка относительно величин y^i. Поскольку при $\tau = \tau_0$ величины y^i принимают заданные значения y_0^i, эта система имеет единственное решение, однозначно определяющее параллельный перенос вдоль линии.

Предположим, что, найдя решение системы (4,3,9), мы определили затем значения компонент вектора в какой-либо определенной точке M_1 данной линии. Соединив точки M и M_1 другой линией, мы могли бы осуществить параллельный перенос вектора в точку M_1 по новому пути. Однако в случае геометрии Эвклида, которой мы до сих пор придерживаемся, значения компонент остались бы прежними: результат параллельного переноса данного вектора в эвклидовом пространстве определяется начальной и конечной точками и не зависит от выбранного пути.

4. Геометрия Римана. Эвклидово пространство n измерений представляет собой множество точек, каждая из которых находится в однозначном соответствии с n числами-координатами. Расстояние ds между двумя точками пространства с координатами x^i и $x^i + dx^i$ определяется инвариантной квадратической формой

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta, \tag{4,4,1}$$

коэффициентами которой служат ковариантные компоненты метрического тензора. Задание последнего определяет метрические свойства пространства, поскольку этот тензор позволяет найти длины линий и углы между ними.

Длина отрезка линии, заданной в пространстве уравнениями $x^i = x^i(\tau)$, вычисляется по формуле

$$s = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta}. \tag{4,4,2}$$

Угол θ между двумя линейными элементами $d\mathbf{s} = \mathbf{e}_\alpha dx^\alpha$ и $\delta\mathbf{s} = \mathbf{e}_\beta \delta x^\beta$ можно найти, образовав скалярное произведение $d\mathbf{s}, \delta\mathbf{s} = (\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta)\, dx^\alpha \delta x^\beta$. Положив $d\mathbf{s}, \delta\mathbf{s} = ds\delta s \cos\theta$ и воспользовавшись определением компонент метрического тензора, получим

$$\cos\theta = \frac{g_{\alpha\beta}dx^\alpha \delta x^\beta}{ds\delta s}. \tag{4,4,3}$$

В пространстве Эвклида можно построить систему прямолинейных декартовых координат. В этой системе координатные векторы во всех точках пространства имеют одинаковые значения, вслед-