ствие чего компоненты метрического тензора $g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ будут постоянными числами. Можно утверждать, что континуум, отвечающий квадратической форме (4,4,1), будет эвклидовым пространством в том и только в том случае, если существует преобразование координат, приводящее компоненты метрического тензора к постоянным.

Легко видеть, что это условие выполняется лишь при специальном задании величин g_{ij}. Как мы знаем, число различных компонент метрического тензора может быть равно $\frac{1}{2}n(n+1)$; при $n \geqslant 2$ оно превосходит число измерений. Например, при $n = 4$ число различных g_{ij} достигает десяти. Поэтому совершенно очевидно, что при помощи преобразований координат в общем случае невозможно привести все произвольно заданные функции g_{ij} к постоянным. Таким образом, континуум, соответствующий квадратической форме (4,4,1), вообще не является пространством Эвклида. Однако этот континуум и в общем случае рассматривают как пространство n измерений, хотя его метрические свойства могут существенно отличаться от геометрии Эвклида. Такое пространство принято называть *римановым*.

С формальной точки зрения пространство Римана можно определить как поле метрического тензора в n-мерном континууме, в котором расстояние между бесконечно близкими точками находится с помощью квадратической формы (4,4,1), а угол между двумя линейными элементами — по (4,4,3). Геометрия Римана охватывает широкий класс пространств и включает эвклидову геометрию в качестве простейшего частного случая.

5. Соприкасающееся пространство Эвклида. Введенные выше определения тензора и тензорных действий, а также операции параллельного переноса непосредственно относятся к пространству Эвклида. Вопрос о пригодности этих определений для римановой геометрии нуждается в специальном исследовании. Наиболее простой и естественный путь такого исследования состоит в сравнении риманова пространства с пространством Эвклида.

Пусть n-мерное пространство Римана характеризуется метрическим тензором g_{ij}. Рассмотрим точку M (x^k) и ее бесконечно малую окрестность. В точке M' $(x^k + dx^k)$, принадлежащей этой окрестности, метрический тензор имеет компоненты $g_{ij}(x^k + dx^k)$. Производя разложение, можно записать

$$g_{ij}(x^k + dx^k) = g_{ij} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\alpha} dx^\alpha + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} dx^\alpha dx^\beta + \cdots \qquad (4,5,1)$$

В правой части значения компонент и их производных относятся к точке M; индексы i, j являются фиксированными; суммируют по α и β.

В первом приближении, сохраняя в правой части (4,5,1) лишь конечную величину, имеем $g_{ij}(x^k + dx^k) = g_{ij}$. Это значит, что для всех точек рассматриваемой окрестности принимаются одинаковые значения компонент метрического тензора: бесконечно малая область пространства Римана отождествляется с эвклидовым пространством, которое называется касательным по отношению к риманову пространству в данной точке.

Понятие касательного пространства Эвклида во многих случаях оказывается полезным. Однако оно пригодно при изучении лишь наиболее простых свойств геометрии Римана, но совершенно недостаточно в тех случаях, когда нас интересуют более тонкие свойства, зависящие от производных метрического тензора по координатам. Более эффективным средством исследования римановых пространств является понятие соприкасающегося пространства Эвклида.

Удерживая в правой части (4,5,1) члены первого порядка относительно дифференциалов координат, можно написать

$$g_{ij}(x^k + dx^k) = g_{ij} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\alpha} dx^\alpha. \tag{4,5,2}$$

В этом разложении g_{ij} и $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$ имеют для рассматриваемой бесконечно малой области постоянные значения, соответствующие точке M. Покажем, что в данном приближении, которое мы будем называть вторым, эту область пространства Римана также можно представить некоторым пространством Эвклида.

Предварительно рассмотрим вопрос о преобразовании производных $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$ при переходе к новой системе координат.

Значения компонент метрического тензора в системе координат $x^{k'}$ находят по известной формуле

$$g_{i'j'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{j'}} g_{\alpha\beta}. \tag{4,5,3}$$

Дифференцируя это соотношение, получаем

$$\frac{\partial g_{i'j'}}{\partial x^{k'}} = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{i'} \partial x^{k'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{j'}} g_{\alpha\beta} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}} \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} g_{\alpha\beta} + \\ + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu}. \tag{4,5,4}$$

В новой системе координат производные ковариантных компонент являются линейными однородными функциями от компонент и их первых производных в старой системе.

Допустим, что в старой системе координат задано поле тензора G_{ij}, отличное от поля g_{ij}, но удовлетворяющее в точке M условиям

$$G_{ij} = g_{ij}; \quad \frac{\partial G_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}. \tag{4,5,5}$$

Применяя преобразования (4,5,3) и (4,5,4) к тензорам g_{ij} и G_{ij} в точке M и учитывая равенства (4,5,5), находим $G_{i'j'} = g_{i'j'}$, $\frac{\partial G_{i'j'}}{\partial x^{k'}} = \frac{\partial g_{i'j'}}{\partial x^{k'}}$. Таким образом, соотношения (4,5,5), имеющие место в какой-либо точке пространства в одной системе координат, выполняются в этой точке во всех системах координат.

Составим далее закон преобразования символов Кристофеля. Круговая перестановка фиксированных значков i', j', k' позволяет написать формулу (4,5,4) в двух следующих вариантах:

$$\frac{\partial g_{j'k'}}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{i'}\partial x^{k'}}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{j'}} g_{\alpha\beta} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{k'}}\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}} g_{\alpha\beta} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{k'}}\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha};$$

$$\frac{\partial g_{i'k'}}{\partial x^{j'}} = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{k'}} g_{\alpha\beta} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}}\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}} g_{\alpha\beta} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{k'}}\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta}.$$

В последних членах правой части мы изменили обозначение индексов суммирования, чтобы сохранить форму первых трех множителей.

Сложим написанные равенства и из полученной суммы вычтем (4,5,4). После очевидных упрощений найдем

$$\frac{\partial g_{i'k'}}{\partial x^{j'}} + \frac{\partial g_{j'k'}}{\partial x^{i'}} - \frac{\partial g_{i'j'}}{\partial x^{k'}} = 2\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{k'}} g_{\alpha\beta} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{k'}}\left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu}\right),$$

или

$$\Gamma_{i'j',k'} = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{k'}} g_{\alpha\beta} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{k'}}\Gamma_{\alpha\beta,\nu},$$

где $\Gamma_{\alpha\beta,\nu}$ — символы Кристофеля первого рода (4,3,4).

Для перехода к символам второго рода воспользуемся соотношением (4,3,5). С этой целью умножим найденное равенство на

$$g^{k'l'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{\delta}} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^{\varepsilon}} g^{\varepsilon\delta}$$

и выполним свертывание по индексу k'. В левой части, согласно определению (4,3,5), получится символ Кристофеля второго рода $\Gamma^{l'}_{i'j'}$. Для упрощения первого члена правой части необходимо принять во внимание соотношение

$$\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{\delta}} g^{\varepsilon\delta} = g^{\beta\varepsilon}$$

и, далее,

$$\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^{\varepsilon}} g^{\beta\varepsilon} g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^{\alpha}}.$$

Во втором члене имеется множитель

$$\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{\delta}} g^{\varepsilon\delta} = g^{\nu\varepsilon}.$$

После упрощений получим

$$\Gamma^{l'}_{i'j'} = \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^{\varepsilon}} \Gamma^{\varepsilon}_{\alpha\beta}. \qquad (4,5,6)$$

Это и есть искомый закон преобразования символов Кристофеля. Он показывает, в частности, что эти символы не являются тензорами, поскольку первый член правой части (4,5,6) нарушает закон тензорного преобразования.

Для дальнейшего полезно несколько изменить соотношение (4,5,6). Умножим его на производную $\frac{\partial x^{j}}{\partial x^{l'}}$ и суммируем по индексу l'. В правой части при свертывании появятся множители δ^{j}_{α} и δ^{j}_{ε}. Поэтому закон преобразования примет вид

$$\frac{\partial x^{j}}{\partial x^{l'}} \Gamma^{l'}_{i'j'} = \frac{\partial^2 x^{j}}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} + \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{j'}} \Gamma^{j}_{\alpha\beta}. \qquad (4,5,7)$$

Возвращаемся к исследованию пространства Римана в окрестности точки M.

Во избежание недоразумений обозначим координаты этой точки через x^{i}_{0}. Преобразуем координаты

$$x^{i} = x^{i}_{0} + x^{i'} - \frac{1}{2} \Gamma^{i}_{\alpha'\beta'} x^{\alpha'} x^{\beta'}. \qquad (4,5,8)$$

Штрихи у индексов координат, как и прежде, указывают на принадлежность их к новой системе. Фиксированные индексы i, i' принимаются одинаковыми. Значения символов Кристофеля взяты в старой системе координат и отнесены к точке M; в формулах преобразования (4,5,8) они играют роль постоянных коэффициентов.

Новые координаты имеют в точке M нулевые значения, поскольку при $x^i = x_0^i$ соотношение (4,5,8) дает $x^{i'} = \frac{1}{2}\Gamma^i_{\alpha'\beta'}x^{\alpha'}x^{\beta'}$.

Дифференцируя (4,5,8) последовательно по координатам $x^{j'}$, $x^{k'}$, получим

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} = \delta^{i'}_{j'} - \Gamma^i_{j'\alpha'}x^{\alpha'}; \quad \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}} = -\Gamma^i_{j'k'}.$$

Следовательно, в точке M

$$\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}\right)_0 = \delta^{i'}_{j'}, \quad \left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}\right)_0 = -\Gamma^i_{j'k'}. \qquad (4,5,9)$$

Применим теперь к той же точке общую формулу (4,5,6). Принимая во внимание (4,5,9), находим $\Gamma^{l'}_{i'j'} = 0$.

Нетрудно убедиться в том, что при исчезновении символов Кристофеля производные от компонент метрического тензора по координатам также исчезают. Действительно, умножая (4,3,5) на g_{kl} и свертывая затем по индексу k, получим соотношение $\Gamma_{ij.l} = g_{kl}\Gamma^k_{ij}$, с помощью которого символы Кристофеля первого рода выражаются через символы второго рода. При $\Gamma^k_{ij} = 0$ будет $\Gamma_{ij.k} = 0$, а следовательно, и $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 0$, как это непосредственно вытекает из (4,3,3).

Итак, мы доказали существование системы координат, в которой символы Кристофеля, а следовательно, и производные $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$ принимают в данной точке нулевые значения. Такая система носит название *геодезической*. Важно отметить, что хотя преобразование координат, приводящее к геодезической системе, не является единственным, но оно существенно зависит от выбранной точки. Поэтому система координат, геодезическая в какой-либо одной точке, вообще не будет геодезической для другой произвольно выбранной точки.

Пусть поле метрического тензора g_{ij} отвечает геометрии Римана. Выберем определенную точку M (x_0^i) и построим геодезическую систему координат; в указанной точке имеем $g_{ij} = (g_{ij})_0$, $\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)_0 = 0$. Пусть далее G_{ij} — метрический тензор, отвечающий геометрии Эвклида. Для всего пространства можно положить $G_{ij} = \text{const} =$

$= (g_{ij})_0$ и, следовательно, $\frac{\partial G_{ij}}{\partial x^k} = 0$. Таким образом, в данной точке эвклидова и риманова метрики связаны условиями (4,5,5). Однако выше мы видели, что если эти условия имеют место в одной системе координат, то они выполняются в данной точке во всех системах, когда производные $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$ вообще отличны от нуля. Это значит, что для каждой точки пространства Римана имеется возможность построить пространство Эвклида, метрический тензор которого удовлетворяет соотношениям (4,5,5). Такое пространство Эвклида называется соприкасающимся.

При исследовании бесконечно малой окрестности какой-либо точки пространства Римана во втором приближении, как мы видели, можно пользоваться разложением (4,5,2), в котором g_{ij} и $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$ имеют для этой области постоянные значения, отвечающие указанной точке. Поскольку они равны эвклидовым величинам G_{ij} и $\frac{\partial G_{ij}}{\partial x^k}$, во втором приближении риманова метрика совпадает в рассматриваемой области с соприкасающейся эвклидовой метрикой. Благодаря этому совпадению в геометрию Римана переходят все определения эвклидовой геометрии, связанные с метрическим тензором и его первыми производными по координатам В частности, бесконечно малый параллельный перенос тензора в пространстве Римана формально можно определить как бесконечно малый перенос в соприкасающемся пространстве Эвклида. Общая формула (4,3,8) для приращения тензора при параллельном переносе в бесконечно близкую точку сохраняет значение и в римановой геометрии. Что же касается *конечного* параллельного переноса тензора, то, в случае римановой геометрии, его результат, в отличие от геометрии Эвклида, зависит не только от начальной и конечной точек, но также от линии переноса. Поэтому при параллельном переносе тензора в пространстве Римана должен быть указан путь переноса.

Введем понятие о пространстве Эвклида, соприкасающемся с римановым пространством *вдоль линии*.

Пусть в n-мерном пространстве Римана с координатами u^i, метрическим тензором g_{ij} и соответствующим ему символом Кристофеля Γ_{ij}^k имеется линия, заданная уравнениями вида $u^i = u^i(t)$. Введем пространство Эвклида того же числа измерений с метрическим тензором q_{ij}, символами Кристофеля F_{ij}^k и координатами x^i, которые оставим пока неопределенными. Уравнения $x^i = u^i(t)$ представляют в этом пространстве некоторую линию. Обозначим через $\mathbf{r}'$ радиус-вектор точки M' линии и через $\mathbf{e}_i'$ — координатные векторы в этой точке. Составим дифференциальные уравнения

$$d\mathbf{r}' = \mathbf{e}'_\alpha \frac{du^\alpha}{dt} dt; \quad d\mathbf{e}'_i = \Gamma^\alpha_{i\beta} \mathbf{e}'_\alpha \frac{du^\beta}{dt} dt \qquad (4,5,10)$$

и потребуем, чтобы при $t = t_0$ векторы $\mathbf{e}'_\alpha$ при попарном скалярном умножении давали g_{ij} риманового пространства в точке $u^i(t_0)$. С точностью до радиуса-вектора $\mathbf{r}'_0$ точки $u^i(t_0)$ система (4,5,10) имеет единственное решение; в частности, она однозначно определяет координатные векторы в точках кривой.

Покажем, что при произвольном t выполняется соотношение $\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_j = g_{ij}$.

Умножая второе соотношение (4,5,10) скалярно на $\mathbf{e}'_j$, имеем

$$\frac{d\mathbf{e}'_i}{dt}, \mathbf{e}'_j = \Gamma^\alpha_{i\beta} \frac{du^\beta}{dt} \mathbf{e}'_\alpha, \mathbf{e}'_\beta.$$

Если переставить индексы i, j и сложить найденное при этом равенство с предыдущим, то получится дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_j) = \Gamma^\alpha_{i\beta} \frac{du^\beta}{dt}(\mathbf{e}'_\alpha, \mathbf{e}'_j) + \Gamma^\alpha_{j\beta} \frac{du^\beta}{dt}(\mathbf{e}'_\alpha, \mathbf{e}'_i),$$

определяющее ход скалярного произведения координатных векторов вдоль кривой. К нему необходимо присоединить принятое выше начальное условие $(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_j)_0 = g_{ij}(t_0)$.

Составим теперь дифференциальное уравнение для метрического тензора g_{ij}. Изменение его вдоль линии определяется производной

$$\frac{dg_{ij}}{dt} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\beta} \frac{dx^\beta}{dt}.$$

Внеся сюда равенство

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\beta} = g_{\alpha j}\Gamma^\alpha_{i\beta} + g_{\alpha i}\Gamma^\alpha_{j\beta},$$

которое непосредственно следует из (4,3,3), находим уравнение

$$\frac{dg_{ij}}{dt} = \Gamma^\alpha_{i\beta} \frac{du^\beta}{dt} g_{\alpha j} + \Gamma^\alpha_{j\beta} \frac{du^\beta}{dt} g_{\alpha i},$$

определяющее компоненты метрического тензора вдоль линии вместе с начальным условием $g_{ij} = g_{ij}(t_0)$ при $t = t_0$.

Так как уравнения для $(\mathbf{e}'_i . \mathbf{e}'_j)$ и g_{ij} одинаковы, а в начальный момент эти величины по условию совпадают, то вообще должно быть $\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_j = g_{ij}$. Отсюда непосредственно следует, что во всех точках линии выполняется соотношение $g_{ij} = q_{ij}$.

Для упрощения последующих выкладок положим, что уравнения кривой имеют вид $u^1 = t$, $u^i = a^i = \text{const}$ при $i = 2, \dots n$, т. е. что кривая является одной из координатных линий. Это упрощение не нарушает общности, так как оно может быть осуществлено путем соответствующего преобразования координат. Вместо (4,5,10) имеем

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{e}_1'; \quad \frac{d\mathbf{e}_i'}{dt} = \Gamma^{\alpha}_{i1}\mathbf{e}_{\alpha}'. \tag{4.5.11}$$

Система координат в пространстве Эвклида остается еще неопределенной, поскольку для ее задания необходимо определить координатные векторы *во всех точках пространства*, тогда как мы определили их лишь для *точек кривой*.

Пусть $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки M пространства. Производные от радиуса-вектора по координатам равны координатным векторам $\mathbf{e}_i$ в соответствующих точках, а скалярные произведения $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ — компонентам метрического тензора q_{ij}. Производные $\frac{\partial^2 r}{\partial x^i \partial x^j}$ можно представить в виде линейных комбинаций координатных векторов, причем коэффициентами в таком разложении служат символы Кристофеля (см. п. 3).

Итак,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} = \mathbf{e}_i; \quad \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x^i \partial x^j} = \Gamma^{\alpha}_{ij}\mathbf{e}_{\alpha}. \tag{4,5,12}$$

Координаты x^i в пространстве Эвклида определяются выбором функции $\mathbf{r}(x^1, \dots x^n)$, довольно свободным, так как до сих пор он был ограничен только требованием, чтобы при переходе к точкам кривой векторы $\mathbf{e}_i$ превращались в заданные векторы $\mathbf{e}_i'$.

Точка M' линии имеет координаты $x^1 = u^1 = t$, $x^i = a^i$ $(i \neq 1)$. Радиус-вектор $\mathbf{r}'$ этой точки свяжем с радиусом-вектором $\mathbf{r}$ точки M пространства соотношением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{e}_{\omega}'(x^{\omega} - a^{\omega}) + \frac{1}{2}\Gamma^{\alpha}_{\omega\tau}\mathbf{e}_{\alpha}'(x^{\omega} - a^{\omega})(x^{\tau} - a^{\tau}). \tag{4,5,13}$$

где ω, τ — индексы суммирования, принимающие значения $2, 3, \dots n$, $\Gamma^{\alpha}_{\omega\tau}$ — символы Кристофеля римановой метрики в точке u^1, a^i $(i \neq 1)$.

Дифференцируя это равенство по координатам и положив $x^i = a^i$, получим

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^1}\right)_{M'} = \mathbf{e}_1', \quad \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}\right)_{M'} = \mathbf{e}_i',$$

убедившись в том, что выбор системы координат при помощи (4,5,13) отвечает упомянутому требованию.

Вычислим далее производные второго порядка. Переходя затем от точки M к M', найдем

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x^{1^2}}\right)_{M'} = \Gamma^{\alpha}_{11}\mathbf{e}_{\alpha}', \quad \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x^1 \partial x^i}\right)_{M'} = \Gamma^{\alpha}_{i1}\mathbf{e}_{\alpha}', \quad \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x^i \partial x^j}\right)_{M'} = \Gamma^{\alpha}_{ij}\mathbf{e}_{\alpha}'.$$

Следовательно, вообще

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x^i \partial x^j}\right)_{M'} = \Gamma^{\alpha}_{ij}\mathbf{e}'_{\alpha}$$

при всех значениях индексов i, j, от 1 до n.

Сравнивая это равенство с соотношением

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x^i \partial x^j}\right)_{M'} = F^{\alpha}_{ij}\mathbf{e}'_{\alpha},$$

которое непосредственно вытекает из общей формулы (4,5,12) при $M \to M'$, приходим к заключению, что в каждой точке рассматриваемой линии символы Кристофеля римановой и эвклидовой метрик одинаковы. Поэтому найденное условие $g_{ij} = q_{ij}$ и соотношение (4,3,3), которое можно написать в виде

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g_{\alpha j}\Gamma^{\alpha}_{ik} + g_{\alpha i}\Gamma^{\alpha}_{jk},$$

показывают, что одинаковыми оказываются и производные от компонент метрического тензора по координатам.

Итак, существует возможность так выбрать координаты в пространстве Эвклида, чтобы все g_{ij} и их первые производные по координатам в римановой и эвклидовой метриках имели во всех точках данной линии одинаковые значения. В этом случае эвклидова метрика *соприкасается вдоль заданной кривой* с метрикой Римана. В бесконечно тонкой трубке, содержащей эту кривую, эвклидово пространство представляет пространство Римана с точностью до членов второго порядка.

6. Ковариантное дифференцирование. Обычное дифференцирование непригодно для развития тензорного анализа, так как применение этой операции к какому-либо тензору нарушает его тензорную природу. Например, если совокупность величин y^i образует контравариантный вектор, то производные $\frac{\partial y^i}{\partial x^j}$ не являются компонентами тензора, поскольку при переходе к новой системе координат они преобразуются по закону

$$\frac{\partial y^{i'}}{\partial x^{j'}} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{j'}}\frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^{j'}\partial x^{\alpha}}\, y^{\alpha},$$

который отличается от закона преобразования тензора (4,2,1).

В тензорном анализе употребляют операцию к о в а р и а н т н о г о д и ф ф е р е н ц и р о в а н и я, которая представляет собой некоторое обобщение обычного дифференцирования, обладающего тем свойством, что применение к тензору не нарушает его тензорной природы.