Следовательно, вообще

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x^i \partial x^j}\right)_{M'} = \Gamma^{\alpha}_{ij} \mathbf{e}'_{\alpha}$$

при всех значениях индексов i, j, от 1 до n.

Сравнивая это равенство с соотношением

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x^i \partial x^j}\right)_{M'} = F^{\alpha}_{ij} \mathbf{e}'_{\alpha},$$

которое непосредственно вытекает из общей формулы (4,5,12) при $M \to M'$, приходим к заключению, что в каждой точке рассматриваемой линии символы Кристофеля римановой и эвклидовой метрик одинаковы. Поэтому найденное условие $g_{ij} = q_{ij}$ и соотношение (4,3,3), которое можно написать в виде

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g_{\alpha j} \Gamma^{\alpha}_{ik} + g_{\alpha i} \Gamma^{\alpha}_{jk},$$

показывают, что одинаковыми оказываются и производные от компонент метрического тензора по координатам.

Итак, существует возможность так выбрать координаты в пространстве Эвклида, чтобы все g_{ij} и их первые производные по координатам в римановой и эвклидовой метриках имели во всех точках данной линии одинаковые значения. В этом случае эвклидова метрика *соприкасается вдоль заданной кривой* с метрикой Римана. В бесконечно тонкой трубке, содержащей эту кривую, эвклидово пространство представляет пространство Римана с точностью до членов второго порядка.

6. Ковариантное дифференцирование. Обычное дифференцирование непригодно для развития тензорного анализа, так как применение этой операции к какому-либо тензору нарушает его тензорную природу. Например, если совокупность величин y^i образует контравариантный вектор, то производные $\frac{\partial y^i}{\partial x^j}$ не являются компонентами тензора, поскольку при переходе к новой системе координат они преобразуются по закону

$$\frac{\partial y^{i'}}{\partial x^{j'}} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{j'}} \frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^{j'} \partial x^{\alpha}} y^{\alpha},$$

который отличается от закона преобразования тензора (4,2,1).

В тензорном анализе употребляют операцию к о в а р и а н т н о г о д и ф ф е р е н ц и р о в а н и я, которая представляет собой некоторое обобщение обычного дифференцирования, обладающего тем свойством, что применение к тензору не нарушает его тензорной природы.

Пусть дано поле контравариантного вектора y^i. В точках $M(x^\sigma)$ и $M'(x^\sigma + dx^\sigma)$ компоненты этого вектора соответственно равны y^i и $y^i + dy^i$. Необходимо ясно представить, что сумма $y^i + dy^i$ составляет в точке M' вектор, тогда как отдельные члены ее (т. е. y^i и dy^i) не являются в этой точке векторами.

Действительно, дифференцируя формулу преобразования $y^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{dx^\alpha} y^\alpha$, получаем соотношение

$$dy^{i'} = \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} y^\alpha dx^\beta + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha} dy^\alpha,$$

которое не совпадает с законом преобразования тензора в точке M'.

Правила тензорной алгебры нельзя применить к векторам y^i и и $y^i + dy^i$, поскольку последние заданы в точках с различными координатными векторами. Для устранения этого различия выполним параллельный перенос вектора $y^i + dy^i$ из точки M' в точку M. Компоненты вектора приобретут при таком переносе приращения, соответствующие приращению координат — dx^α; согласно формуле (4,3,6), приращения компонент составят $\Gamma^i_{\alpha\beta} y^\alpha dx^\beta$. Поэтому в результате переноса вектора $y^i + dy^i$ в точку M его компоненты будут $y^i + dy^i + \Gamma^i_{\alpha\beta} y^\alpha dx^\beta$.

Теперь в точке M имеются два вектора с компонентами, заданными в одной системе координатных векторов. Можно их сравнить, применяя правила тензорной алгебры. Разность этих векторов представляет собой также некоторый контравариантный вектор. Его называют ковариантным дифференциалом данного вектора и обозначают символом Dy^i. Согласно этому определению, имеем

$$Dy^i = dy^i + \Gamma^i_{\alpha\beta} y^\alpha dx^\alpha. \qquad (4,6,1)$$

Не будем останавливаться на формальном доказательстве тензорной природы величин Dy^i. Его легко получить, составив выражение (4,6,1) в новой системе координат и воспользовавшись затем приведенными выше законами преобразования дифференциалов dy^i и символов Кристофеля.

Вместо (4,6,1) можно написать

$$Dy^i = \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} + \Gamma^i_{\alpha\beta} y^\beta\right) dx^\alpha. \qquad (4,6,2)$$

Коэффициенты при дифференциалах в правой части (4,6,2) образуют систему n^2 двухзначковых величин. Пользуясь правилами тензорной алгебры, нетрудно доказать, что эти величины являются компонентами смешанного тензора второго порядка, ковариантного относительно нижнего индекса α и контравариантного относительно

индекса i. Этот тензор называют ковариантной производной данного вектора и обозначают обычно символом $\Delta_\alpha y^i$ или $y^i_{|\alpha}$. Таким образом, по определению, имеем

$$\Delta_\alpha y^i = y^i_{|\alpha} = \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} + \Gamma^i_{\alpha\beta} y^\beta. \qquad (4,6,3)$$

Если оператор D не изменяет строения тензора, то применение операции ковариантной производной увеличивает на единицу порядок ковариантности данного тензора.

Понятия ковариантного дифференциала и ковариантной производной, рассмотренные выше в применении к контравариантному вектору, обобщаются на случай тензора любого порядка и строения. Прежде всего необходимо определить операцию ковариантного дифференцирования для скалярной функции, которая рассматривается как тензор нулевого порядка. Если X — скаляр, то, по определению, допустим

$$DX = dX; \quad X_{|i} = \frac{\partial X}{\partial x^i}, \qquad (4,6,4)$$

т. е. примем, что ковариантное дифференцирование совпадает с обыкновенным. При этом производная $X_{|i}$ является ковариантным вектором, называемым градиентом.

Повторяя прежние рассуждения, легко убедиться в том, что в случае ковариантного вектора

$$Dy_i = dy_i - \Gamma^\beta_{i\alpha} y_\beta dx^\alpha; \qquad (4,6,5)$$

$$y_{i/\alpha} = \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} - \Gamma^\beta_{i\alpha} y_\beta.$$

Для смешанного тензора третьего порядка имеем

$$DT^{ij}_k = dT^{ij}_k + \Gamma^i_{\alpha\beta} T^{\beta j}_k dx^\alpha + \Gamma^j_{\alpha\beta} T^{i\beta}_k dx^\alpha - \Gamma^\beta_{k\alpha} T^{ij}_\beta dx^\alpha; \qquad (4,6,6)$$

$$T^{ij}_{k/\alpha} = \frac{\partial T^{ij}_k}{\partial x^\alpha} + \Gamma^i_{\alpha\beta} T^{\beta j}_k + \Gamma^j_{\alpha\beta} T^{i\beta}_k - \Gamma^\beta_{k\alpha} T^{ij}_\beta.$$

По аналогии нетрудно написать формулы для тензоров другого строения.

Ковариантное дифференцирование отвечает следующим свойствам, подобным хорошо известным теоремам обычного анализа:

$$\nabla_i (A^{jk}_l + B^{jk}_l) = \nabla_i A^{jk}_l + \nabla_i B^{jk}_l;$$

$$(A^i_j B^k)_{|l} = A^i_{j/l} B^k + A^i_j B^k_{|l}.$$

Отметим еще переместительность ковариантного дифференцирования и рассмотренной ранее операции свертывания. Так, если A^{ij}_k — какой-либо смешанный тензор третьего порядка,

то в выражении $A^{\alpha j}_{\alpha/l}$ свертывание по индексу α и ковариантное дифференцирование можно выполнить в любом порядке; результатом обеих операций является один и тот же смешанный тензор второго порядка. Свертывание тензора можно осуществить и по индексу ковариантного дифференцирования. Если, в частности, составить ковариантную производную $A^{ij}_{|k}$ и, положив $j = k = \alpha$, суммировать по индексу α, то получится некоторый контравариантный вектор. Свернутую таким образом производную вида $A^{i\alpha}_{|\alpha}$ называют к о в а р и а н т н о й р а с х о д и м о с т ь ю данного тензора.

Ковариантную расходимость можно также образовать от смешанного тензора. Согласно определению ковариантной производной (4,6,6), расходимость смешанного тензора второго порядка равна

$$T^{\alpha}_{i/\alpha} = \frac{\partial T^{\alpha}_{i}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} T^{\alpha}_{i} - \Gamma^{\beta}_{i\alpha} T^{\alpha}_{\beta}. \qquad (4,6,7)$$

В качестве примера найдем ковариантную производную метрического тензора.

Имеем

$$g_{ij/k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^{\alpha}_{ik} g_{\alpha j} - \Gamma^{\alpha}_{jk} g_{\alpha i} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma_{ik,j} - \Gamma_{jk,i}.$$

Поэтому, согласно (4,3,3), $g_{ij/k} = 0$.

Далее,

$$\delta^{i}_{j/k} = \frac{\partial \delta^{i}_{j}}{\partial x^k} + \Gamma^{i}_{\alpha k} \delta^{\alpha}_{j} - \Gamma^{\alpha}_{jk} \delta^{i}_{\alpha} = 0.$$

Теперь легко вычислить ковариантную производную контравариантного метрического тензора. Дифференцируя соотношение $g^{i\varepsilon} g_{j\varepsilon} = \delta^{i}_{j}$, получим $g^{i\varepsilon}_{|k} g_{j\varepsilon} + g^{i\varepsilon} g_{j\varepsilon/k} = 0$, т. е. $g^{i\varepsilon}_{|k} g_{j\varepsilon} = 0$. Умножим это соотношение на g^{jl}. Найдем

$$g^{i\varepsilon}_{/k} g_{j\varepsilon} g^{jl} = \delta^{l}_{\varepsilon} g^{i\varepsilon}_{/k} = g^{il}_{/k} = 0.$$

Ковариантные производные (а следовательно, и ковариантные дифференциалы) тензоров g_{ij}, δ^{i}_{j}, g^{ij} имеют нулевые значения. Эта особенность метрического тензора в несколько иной форме отмечалась при рассмотрении параллельного переноса. Как было показано, поле метрического тензора является результатом параллельного переноса этого тензора из какой-либо одной точки во все другие точки пространства.

Метрический тензор играет в тензорном анализе роль постоянной. Поэтому при ковариантном дифференцировании произведения его можно вынести за знак дифференцирования. Так, $\nabla_i (g_{jk} A^{lm}_{n}) = g_{jk} \nabla_i A^{lm}_{n}$.