7. Кривые в пространстве Римана. Рассмотрим непрерывную линию, заданную параметрическими уравнениями $x^i = x^i(s)$, в которых параметром s служит длина дуги линии. В дифференциальной геометрии уравнения кривой в этой форме принято называть естественными. Пусть точка M кривой имеет радиус-вектор $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, \ldots, x^n)$. Образуем производную

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^\alpha}\frac{dx^\alpha}{ds} = \mathbf{e}_\alpha y^\alpha,$$

где $\mathbf{e}_\alpha$ — координатные векторы, $y^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}$ — контравариантные компоненты вектора $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$, направленного по касательной к кривой.

Образуем скалярное произведение

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds}, \frac{d\mathbf{r}}{ds} = (\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta)\, y^\alpha y^\beta = g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}.$$

Элемент ds дуги кривой определяется основной квадратической формой (4,4,1); поэтому $\left|\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right| = 1$. Контравариантный вектор y^i является единичным вектором касательной.

Пусть $M(x^\alpha)$ и $M'(x^\alpha + dx^\alpha)$ — две бесконечно близкие точки линии, отделенные дугой ds. Касательный вектор имеет в этих точках компоненты y^i и $y^i + dy^i$ соответственно. Перенесем вектор $y^i + dy^i$ из точки M' параллельно в точку M. Согласно определению ковариантного дифференциала, компоненты вектора в результате указанного переноса будут равны $y^i + Dy^i$. В точке M имеются теперь два вектора, угол между которыми называется углом смежности. Разность этих векторов по модулю составляет $|Dy^i| = |y^i|\,d\theta = d\theta$. Следовательно, $\left|\frac{Dy^i}{ds}\right| = \frac{d\theta}{ds}$. В дифференциальной геометрии производная от угла смежности по дуге называется геодезической кривизной линии в данной точке.

Найдем направление вектора $\frac{Dy^i}{ds}$.

Из определения ковариантного дифференциала непосредственно следует, что этот вектор расположен в соприкасающейся плоскости кривой в данной точке. Угол φ, образованный вектором $\frac{Dy^i}{ds}$ с касательным вектором, определяется формулой (4,4,3), которая принимает в данном случае вид

$$\cos\varphi = \frac{g_{\alpha\beta}y^\alpha Dy^\beta}{|y^\alpha|\cdot|Dy^\beta|}.$$

Дифференцируя соотношение $g_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta = 1$, получим $Dg_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta + g_{\alpha\beta}Dy^\alpha y^\beta + g_{\alpha\beta}y^\alpha Dy^\beta = 0$ или $g_{\alpha\beta}y^\alpha Dy^\beta = 0$, так как первый член исчезает по условию $Dg_{\alpha\beta} = 0$, а два другие отличаются только обозначением индексов суммирования. Поэтому $\varphi = 90°$.

Итак, вектор $\frac{Dy^i}{ds}$, равный по абсолютному значению геодезической кривизне, направлен вдоль главной нормали к линии в данной точке. Этот контравариантный вектор называют **вектором кривизны**. Согласно (4,6,1), имеем

$$\frac{Dy^i}{ds} = \frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}. \tag{4,7,1}$$

Большой интерес представляют линии, во всех точках которых вектор кривизны равен нулю. Такие линии называются **геодезическими**. Уравнения геодезической линии таковы:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0. \tag{4,7.2}$$

В общем случае это сложная система дифференциальных уравнений второго порядка, для интегрирования которой необходимы соответствующие начальные условия. Последние можно задать в форме $x^i = x^i_0$, $\frac{dx^i}{ds} = \left(\frac{dx^i}{ds}\right)_0$ при $s = s_0$. Так как касательный вектор $\frac{dx^i}{ds}$ является единичным, он должен удовлетворять соотношению $\left(g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}\right)_0 = 1$; в остальном он может иметь в точке s_0 произвольное значение.

Поскольку при указанных начальных условиях решение системы (4,7,2) является единственным, мы приходим к заключению о том, что через каждую точку пространства в каждом произвольно заданном направлении можно провести одну и только одну геодезическую линию.

Понятие геодезической линии имеет в дальнейшем очень важное значение. Поэтому мы рассмотрим его также с другой точки зрения.

Пусть в пространстве заданы две какие-либо точки $x^\alpha_{(1)}$ и $x^\alpha_{(2)}$. Найдем *кратчайшую* из линий, соединяющих эти точки, предполагая, что такая линия существует.

Условие, которому отвечает кратчайшая линия, имеет вид

$$\delta\int_{(1)}^{(2)} ds = 0. \tag{4,7,3}$$

Воспользовавшись квадратической формой (4,4,1), представим это условие в форме

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} ds = 0,$$

приведя поставленный вопрос к основной вариационной задаче.

Из вариационного исчисления известно, что интеграл $\int_{(1)}^{(2)} F(t, x^1, \ldots x^n; \dot{x}^1, \ldots \dot{x}^n)\, dt$ имеет экстремальное значение в том случае, если функции $x^i = x^i(t)$ удовлетворяют уравнениям Эйлера — Лагранжа

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i} = 0, \quad i = 1, \ldots n.$$

Составим эти уравнения для нашей задачи. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds}\right) - \frac{d}{ds}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}\left(g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds}\right)\right\} = 0. \qquad (4,7,4)$$

Выделяя в сумме $g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds}$ члены, зависящие от фиксированного индекса i, можно написать

$$g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = g_{ii} \left(\frac{dx^i}{ds}\right)^2 + \underset{\alpha \neq i}{2g_{i\alpha}} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^i}{ds} + \underset{\alpha, \beta \neq i}{g_{\alpha\beta}} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}\left(g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds}\right) = 2g_{ii} \frac{dx^i}{ds} + \underset{\alpha \neq i}{2g_{i\alpha}} \frac{dx^\alpha}{ds} = 2g_{i\alpha} \frac{dx^\alpha}{ds}.$$

Выполнив дифференцирование полученного равенства, найдем

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}\left(g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds}\right) = 2 \frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x^\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} + 2g_{i\alpha} \frac{d^2x^\alpha}{ds^2} =$$

$$= \left(\frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{i\beta}}{\partial x^\alpha}\right) \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} + 2g_{i\alpha} \frac{d^2x^\alpha}{ds^2}.$$

Уравнение (4,7,4) в развернутой форме примет вид

$$\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{i\beta}}{\partial x^\alpha}\right) \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} - 2g_{i\alpha} \frac{d^2x^\alpha}{ds^2} = 0,$$

т. е.

$$g_{i\alpha} \frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta,i} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0,$$

где $\Gamma_{\alpha\beta,i}$ — символ Кристофеля первого рода (4,3,4).

Умножим это соотношение на $g^{i\sigma}$ и произведем свертывание по индексу i. Окончательно получим систему уравнений

$$\frac{d^2x^\sigma}{ds^2} + \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0,$$

совпадающую с (4,7,2).

Таким образом, если в пространстве Римана существуют кратчайшие линии, то они совпадают с геодезическими, т. е. с линиями нулевой кривизны.

Представим уравнения геодезической линии в несколько иной форме, которая будет полезна в дальнейшем.

Уравнения (4,7,2) определяют координаты $x^1, \ldots x^n$ как функции длины дуги s. Одну из этих функций можно обратить, выразив длину дуги через соответствующую координату, например, через последнюю x^n. Остальные $n-1$ координат можно будет тогда рассматривать как функции x^n.

Преобразуем систему (4,7,2), исключив переменную s и заменив ее новой независимой переменной x^n.

Последнее из этих уравнений напишем так:

$$\frac{d^2x^n}{ds^2} = -\Gamma^n_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{dx^n}\frac{dx^\beta}{dx^n}\left(\frac{dx^n}{ds}\right)^2. \tag{4,7,5}$$

Дифференцируя координату x^σ $(\sigma \neq n)$, находим соотношение

$$\frac{d^2x^\sigma}{ds^2} = \frac{d^2x^\sigma}{dx^{n^2}}\left(\frac{dx^n}{ds}\right)^2 + \frac{dx^\sigma}{dx^n}\frac{d^2x^n}{ds^2},$$

или, если внести (4,7,5),

$$\frac{d^2x^\sigma}{ds^2} = \left\{\frac{d^2x^\sigma}{dx^{n^2}} - \Gamma^n_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{dx^n}\frac{dx^\beta}{dx^n}\frac{dx^\sigma}{dx^n}\right\}\cdot\left(\frac{dx^n}{ds}\right)^2.$$

Поэтому оставшиеся $n-1$ уравнений геодезической линии принимают вид

$$\frac{d^2x^\sigma}{dx^{n^2}} + \left(\Gamma^\sigma_{\alpha\beta} - \Gamma^n_{\alpha\beta}\frac{dx^\sigma}{dx^n}\right)\frac{dx^\alpha}{dx^n}\frac{dx^\beta}{dx^n} = 0, \tag{4,7,6}$$

$$\sigma = 1, \ldots n-1.$$

8. Тензор кривизны. Хорошо известно, что в обычном анализе при дифференцировании функции от нескольких переменных результат не зависит от принятого порядка дифференцирования. При ковариантном дифференцировании это свойство в общем случае нарушается.