Умножим это соотношение на $g^{i\sigma}$ и произведем свертывание по индексу i. Окончательно получим систему уравнений

$$\frac{d^2x^\sigma}{ds^2}+\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}=0,$$

совпадающую с (4,7,2).

Таким образом, если в пространстве Римана существуют кратчайшие линии, то они совпадают с геодезическими, т. е. с линиями нулевой кривизны.

Представим уравнения геодезической линии в несколько иной форме, которая будет полезна в дальнейшем.

Уравнения (4,7,2) определяют координаты $x^1, \dots x^n$ как функции длины дуги s. Одну из этих функций можно обратить, выразив длину дуги через соответствующую координату, например, через последнюю x^n. Остальные $n-1$ координат можно будет тогда рассматривать как функции x^n.

Преобразуем систему (4,7,2), исключив переменную s и заменив ее новой независимой переменной x^n.

Последнее из этих уравнений напишем так:

$$\frac{d^2x^n}{ds^2}=-\Gamma^n_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{dx^n}\frac{dx^\beta}{dx^n}\left(\frac{dx^n}{ds}\right)^2. \tag{4,7,5}$$

Дифференцируя координату x^σ $(\sigma\neq n)$, находим соотношение

$$\frac{d^2x^\sigma}{ds^2}=\frac{d^2x^\sigma}{dx^{n2}}\left(\frac{dx^n}{ds}\right)^2+\frac{dx^\sigma}{dx^n}\frac{d^2x^n}{ds^2},$$

или, если внести (4,7,5),

$$\frac{d^2x^\sigma}{ds^2}=\left\{\frac{d^2x^\sigma}{dx^{n2}}-\Gamma^n_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{dx^n}\frac{dx^\beta}{dx^n}\frac{dx^\sigma}{dx^n}\right\}\cdot\left(\frac{dx^n}{ds}\right)^2.$$

Поэтому оставшиеся $n-1$ уравнений геодезической линии принимают вид

$$\frac{d^2x^\sigma}{dx^{n2}}+\left(\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}-\Gamma^n_{\alpha\beta}\frac{dx^\sigma}{dx^n}\right)\frac{dx^\alpha}{dx^n}\frac{dx^\beta}{dx^n}=0, \tag{4,7,6}$$

$$\sigma=1, \dots n-1.$$

8. Тензор кривизны. Хорошо известно, что в обычном анализе при дифференцировании функции от нескольких переменных результат не зависит от принятого порядка дифференцирования. При ковариантном дифференцировании это свойство в общем случае нарушается.

Пусть u_k — ковариантный вектор, компоненты которого обладают необходимыми аналитическими свойствами. Ковариантная производная

$$u_{k/i} = \frac{\partial u_k}{\partial x^i} - \Gamma^{\alpha}_{ik} u_{\alpha}$$

является, как мы знаем, ковариантным тензором второго порядка.

Повторно продифференцируем этот тензор. Согласно общему определению (4,6,6), имеем

$$u_{k/ij} = \frac{\partial u_{k/j}}{\partial x^i} - \Gamma^{\alpha}_{ik} u_{\alpha/j} - \Gamma^{\alpha}_{ij} u_{k/\alpha}.$$

Если внести сюда выражение ковариантной производной первого порядка, то предыдущая формула примет вид

$$u_{k/ji} = \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{jk}}{\partial x^i} u_{\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{jk} \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x^i} - \Gamma^{\alpha}_{ik} \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x^j} +$$
$$+ \Gamma^{\alpha}_{ik} \Gamma^{\beta}_{\alpha j} u_{\beta} - \Gamma^{\alpha}_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\alpha}_{ij} \Gamma^{\beta}_{\alpha k} u_{\beta}.$$

Изменив порядок дифференцирования, получим

$$u_{k/ij} = \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{ik}}{\partial x^j} u_{\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{ik} \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x^j} - \Gamma^{\alpha}_{jk} \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x^i} +$$
$$+ \Gamma^{\alpha}_{jk} \Gamma^{\beta}_{\alpha i} u_{\beta} - \Gamma^{\alpha}_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\alpha}_{ij} \Gamma^{\beta}_{\alpha k} u_{\beta}.$$

Составим разность вторых производных. После очевидного упрощения и переделки индексов суммирования эта разность оказывается равной

$$u_{k/ji} - u_{k/ij} = \left(\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{jk}}{\partial x^i} + \Gamma^{\beta}_{ik} \Gamma^{\alpha}_{j\beta} - \Gamma^{\beta}_{jk} \Gamma^{\alpha}_{i\beta} \right) u_{\alpha}. \qquad (4,8,1)$$

Итак, в случае произвольно заданного метрического поля g_{ij} результат ковариантного дифференцирования зависит от порядка дифференцирования.

Рассмотрим соотношение (4,8,1) подробнее.

Вторые производные $u_{k/ji}$ и $u_{k/ij}$ являются ковариантными тензорами второго порядка, вследствие чего левая часть (4,8,1) представляет собой тензор того же строения. В правой части выполняется свертывание произведения ковариантного вектора u_{α} на коэффициенты, образованные из символов Кристофеля и их производных. Согласно правилам тензорной алгебры, эти коэффициенты также составляют тензор соответствующего строения.

Поскольку во втором множителе значок суммирования является индексом ковариантности, в выражении указанных коэффициентов он должен быть индексом контравариантности. Фиксированные значки i, j, k являются, как и в левой части равенства, индексами ковариантности. Общепринятым обозначением коэффициентов служат символы $R^{\alpha}_{ij,k}$.

Итак, система величин

$$R^{\alpha}_{ij,k.} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{ik}}{\partial x^{j}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{jk}}{\partial x^{i}} + \Gamma^{\beta}_{ik}\Gamma^{\alpha}_{j\beta} - \Gamma^{3}_{jk}\Gamma^{\alpha}_{i\beta} \qquad (4,8.2)$$

представляет собой некоторый смешанный тензор четвертого порядка, ковариантный относительно i, j, k и контравариантный относительно α. Его компоненты образованы из составляющих метрического тензора и их производных первого и второго порядков. Этот тензор, называемый **тензором кривизны Римана — Кристофеля**, имеет фундаментальное значение в геометрии римановых пространств.

Для задания тензора Римана — Кристофеля вместо смешанных компонент часто употребляют ковариантные компоненты, образуя их путем умножения (4,8,2) на метрический тензор и последующего свертывания

$$R_{ij,kl} = g_{\alpha l} R^{\alpha}_{ij,k}. \qquad (4,8,3)$$

Перечислим формальные свойства тензора кривизны.

Переставим два первых индекса ковариантности в (4,8,2) и образуем $R^{\alpha}_{ji,k}$. Непосредственное сравнение с правой частью (4,8,2) дает

$$R^{\alpha}_{ij,k.} = - R^{\alpha}_{ji,k.}, \qquad (4,8,4)$$

показывая, что тензор кривизны антисимметричен относительно индексов первой пары.

Выполнив циклическую перестановку всех трех индексов ковариантности, составим $R^{\alpha}_{jk,i}$. и $R^{\alpha}_{ki,j}$. Сложив эти компоненты с (4,8,2), получим

$$R^{\alpha}_{ij,k.} + R^{\alpha}_{jk,i.} + R^{\alpha}_{ki,j.} = 0, \qquad (4,8,5)$$

убедившись в том, что при циклировании по трем нижним индексам тензор Римана — Кристофеля исчезает.

Рассмотрим теперь ковариантные компоненты тензора кривизны. Антисимметричность величин $R_{ji,kl}$ относительно индексов первой пары является непосредственным следствием свойства (4,8,4) и не представляет ничего нового. То же можно сказать и о равенстве $R_{ij,kl} + R_{jk,il} + R_{ki,jl} = 0$, которое вытекает из соотношения (4,8,5) после умножения на $g_{\alpha l}$ и свертывания по индексу α. Существенно новое свойство можно получить из определения (4,8,3), если написать его в развернутой форме. Простые преобразования, которые мы здесь не приводим, позволяют получить равенство

$$R_{ij,kl} = R_{kl,ij}, \qquad (4,8,6)$$

показывающее, что тензор Римана — Кристофеля симметричен относительно пар индексов ковариантности.

Комбинируя это свойство с условием антисимметричности (4,8,4), преобразуем $R_{il,kl} = R_{kl,ij} = -R_{ij,lk}$, убедившись в том, что тензор кривизны антисимметричен и относительно индексов второй пары.

Пользуясь свойствами симметрии и антисимметрии, можно сделать первыми любые три индекса из четырех. Например, с помощью преобразования $R_{ij,kl} = R_{kl,ij} = R_{lk,ji}$ на первых местах мы расположили три последние индекса в исходном обозначении тензора. Отсюда следует, что согласно свойству (4,8,5), результат циклирования тензора $R_{ij,kl}$ по трем любым индексам равен нулю.

Рассмотренные особенности тензора Римана — Кристофеля выражают ряд тождественных соотношений между его компонентами. Наличие таких соотношений показывает, что все компоненты этого тензора (их общее число равно n^4) не могут быть заданы произвольно. В связи с этим естественно возникает вопрос о числе *существенных* компонент, т. е. таких, которые можно задать произвольно, выражая через них все остальные компоненты. Принимая во внимание все тождественные соотношения, можно показать, что число существенных компонент тензора кривизны в общем случае составляет $\frac{1}{12}n^2(n^2-1)$. При $n = 2$ оно равно единице, а при $n = 4$ — двадцати.

Очень важным свойством тензора кривизны Римана — Кристофеля является тождество Бианки — Падова.

Согласно общему определению (4,6,6), ковариантная производная тензора кривизны определяется формулой

$$R^{\alpha}_{ij.k./l} = \frac{\partial}{\partial x^l} R^{\alpha}_{ij.k.} + \Gamma^{\alpha}_{l\beta} R^{\beta}_{ij.k.} - \Gamma^{\beta}_{il} R^{\alpha}_{\beta j.k.} - \\ - \Gamma^{\beta}_{jl} R^{\alpha}_{i\beta.k.} - \Gamma^{\beta}_{kl} R^{\alpha}_{ij.\beta}. \tag{4,8,7}$$

Первый член правой части в развернутой форме равен

$$\frac{\partial^2 \Gamma^{\alpha}_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 \Gamma^{\alpha}_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} + \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\Gamma^{\beta}_{jk}\Gamma^{\alpha}_{i\beta} - \Gamma^{\beta}_{ik}\Gamma^{\alpha}_{j\beta}\right). \tag{4,8,8}$$

В любой произвольно выбранной точке пространства Римана, как было показано, можно построить геодезическую систему координат, в которой символы Кристофеля в указанной точке принимают нулевые значения.

Выполним преобразование, перейдя от общих координат к геодезическим в данной точке пространства. В формуле (4,8,7) при таком преобразовании исчезнут все члены, кроме первого, находимого из (4,8,8). Следовательно, в геодезических координатах выражение для ковариантной производной тензора кривизны примет вид

$$R^{\alpha}_{ij,k\cdot/l} = \frac{\partial^2 \Gamma^{\alpha}_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 \Gamma^{\alpha}_{ik}}{\partial x^j \partial x^l}. \qquad (4,8,9)$$

В этом соотношении выполним круговую подстановку значков i, j, l, т. е. двух первых индексов ковариантности и индекса ковариантного дифференцирования. Полученные таким образом величины $R^{\alpha}_{jl,k\cdot/i}$, $R^{\alpha}_{li,k\cdot/j}$ сложим с (4,8,9):

$$R^{\alpha}_{ij,k\cdot/l} + R^{\alpha}_{jl,k\cdot/i} + R^{\alpha}_{li,k\cdot/j} = 0. \qquad (4,8,10)$$

Равенство (4,8,10) найдено в геодезических координатах. Однако, будучи тензорным, оно выполняется во всех системах координат и является поэтому вполне общим. Это соотношение и носит название тождества Бианки — Падова.

Легко видеть, что соотношение (4,8,10) сохраняет свою форму и для ковариантных компонент тензора кривизны, в чем можно убедиться, опуская индекс согласно (4,8,6).

Подробное исследование тензора Римана — Кристофеля и выяснение его геометрического значения не входит в нашу задачу; ограничимся перечислением лишь необходимых формальных его свойств. В заключение только заметим, что тензор кривизны позволяет формулировать общий признак вырождения римановой геометрии в эвклидову.

Как было указано ранее, квадратическая форма (4,4,1) отвечает геометрии Эвклида в том и только в том случае, если существует система координат, в которой все компоненты метрического тензора приводятся к постоянным.

Допустим, что это условие выполнено. Перейдя к указанной системе координат, мы получим $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 0$ и $\Gamma^k_{ij} = 0$ во всех точках пространства. Следовательно, согласно (4,8,2), $R^{\alpha}_{ij,k.} = 0$. Поскольку это равенство является тензорным, оно выполняется при переходе от нашей специальной (декартовой) системы координат к общей. Это значит, что в любых координатах уравнение $R^{\alpha}_{ij,k.} = 0$ представляет собой *необходимый* признак превращения геометрии Римана в геометрию Эвклида.

Доказательство достаточности признака значительно сложнее, и потому мы его здесь не приводим.

Итак, равенство $R^{\alpha}_{ij,k.} = 0$ *служит необходимым и достаточным признаком вырождения римановой геометрии в эвклидову.*

9. Тензор Риччи. Переходим к рассмотрению тензора второго порядка, имеющего важное значение в ОТО.