

Умножим это соотношение на  $g^{i\sigma}$  и произведем свертывание по индексу  $i$ . Окончательно получим систему уравнений

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0,$$

совпадающую с (4,7,2).

Таким образом, если в пространстве Римана существуют кратчайшие линии, то они совпадают с геодезическими, т. е. с линиями нулевой кривизны.

Представим уравнения геодезической линии в несколько иной форме, которая будет полезна в дальнейшем.

Уравнения (4,7,2) определяют координаты  $x^1, \dots, x^n$  как функции длины дуги  $s$ . Одну из этих функций можно обратить, выразив длину дуги через соответствующую координату, например, через последнюю  $x^n$ . Остальные  $n - 1$  координат можно будет тогда рассматривать как функции  $x^n$ .

Преобразуем систему (4,7,2), исключив переменную  $s$  и заменив ее новой независимой переменной  $x^n$ .

Последнее из этих уравнений напомним так:

$$\frac{d^2 x^n}{ds^2} = -\Gamma_{\alpha\beta}^n \frac{dx^\alpha}{dx^n} \frac{dx^\beta}{dx^n} \left( \frac{dx^n}{ds} \right)^2. \quad (4,7,5)$$

Дифференцируя координату  $x^\sigma$  ( $\sigma \neq n$ ), находим соотношение

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} = \frac{d^2 x^\sigma}{dx^{n^2}} \left( \frac{dx^n}{ds} \right)^2 + \frac{dx^\sigma}{dx^n} \frac{d^2 x^n}{ds^2},$$

или, если внести (4,7,5),

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} = \left\{ \frac{d^2 x^\sigma}{dx^{n^2}} - \Gamma_{\alpha\beta}^n \frac{dx^\alpha}{dx^n} \frac{dx^\beta}{dx^n} \frac{dx^\sigma}{dx^n} \right\} \cdot \left( \frac{dx^n}{ds} \right)^2.$$

Поэтому оставшиеся  $n - 1$  уравнений геодезической линии принимают вид

$$\frac{d^2 x^\sigma}{dx^{n^2}} + \left( \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma - \Gamma_{\alpha\beta}^n \frac{dx^\sigma}{dx^n} \right) \frac{dx^\alpha}{dx^n} \frac{dx^\beta}{dx^n} = 0, \quad (4,7,6)$$

$$\sigma = 1, \dots, n - 1.$$

8. Тензор кривизны. Хорошо известно, что в обычном анализе при дифференцировании функции от нескольких переменных результат не зависит от принятого порядка дифференцирования. При ковариантном дифференцировании это свойство в общем случае нарушается.

Пусть  $u_k$  — ковариантный вектор, компоненты которого обладают необходимыми аналитическими свойствами. Ковариантная производная

$$u_{k/j} = \frac{\partial u_k}{\partial x^j} - \Gamma_{jk}^\alpha u_\alpha$$

является, как мы знаем, ковариантным тензором второго порядка.

Повторно продифференцируем этот тензор. Согласно общему определению (4,6,6), имеем

$$u_{k/ji} = \frac{\partial u_{k/j}}{\partial x^i} - \Gamma_{ik}^\alpha u_{\alpha/j} - \Gamma_{ij}^\alpha u_{k/\alpha}$$

Если внести сюда выражение ковариантной производной первого порядка, то предыдущая формула примет вид

$$\begin{aligned} u_{k/ji} = & \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^\alpha}{\partial x^i} u_\alpha - \Gamma_{jk}^\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^i} - \Gamma_{ik}^\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^j} + \\ & + \Gamma_{ik}^\alpha \Gamma_{\alpha j}^\beta u_\beta - \Gamma_{ij}^\alpha \frac{\partial u_k}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{ij}^\alpha \Gamma_{\alpha k}^\beta u_\beta. \end{aligned}$$

Изменив порядок дифференцирования, получим

$$\begin{aligned} u_{k/ji} = & \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^\alpha}{\partial x^j} u_\alpha - \Gamma_{ik}^\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^j} - \Gamma_{jk}^\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^i} + \\ & + \Gamma_{jk}^\alpha \Gamma_{\alpha i}^\beta u_\beta - \Gamma_{ij}^\alpha \frac{\partial u_k}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{ij}^\alpha \Gamma_{\alpha k}^\beta u_\beta. \end{aligned}$$

Составим разность вторых производных. После очевидного упрощения и переделки индексов суммирования эта разность оказывается равной

$$u_{k/ji} - u_{k/ij} = \left( \frac{\partial \Gamma_{ik}^\alpha}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^\alpha}{\partial x^i} + \Gamma_{ik}^\beta \Gamma_{j\beta}^\alpha - \Gamma_{jk}^\beta \Gamma_{i\beta}^\alpha \right) u_\alpha. \quad (4,8,1)$$

Итак, в случае произвольно заданного метрического поля  $g_{ij}$  результат ковариантного дифференцирования зависит от порядка дифференцирования.

Рассмотрим соотношение (4,8,1) подробнее.

Вторые производные  $u_{k/ji}$  и  $u_{k/ij}$  являются ковариантными тензорами второго порядка, вследствие чего левая часть (4,8,1) представляет собой тензор того же строения. В правой части выполняется свертывание произведения ковариантного вектора  $u_\alpha$  на коэффициенты, образованные из символов Кристофеля и их производных. Согласно правилам тензорной алгебры, эти коэффициенты также составляют тензор соответствующего строения.

Поскольку во втором множителе значок суммирования является индексом ковариантности, в выражении указанных коэффициентов он должен быть индексом контравариантности. Фиксированные

значки  $i, j, k$  являются, как и в левой части равенства, индексами ковариантности. Общепринятым обозначением коэффициентов служат символы  $R_{ij,k}^\alpha$ .

Итак, система величин

$$R_{ij,k}^\alpha = \frac{\partial \Gamma_{ik}^\alpha}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^\alpha}{\partial x^i} + \Gamma_{ik}^\beta \Gamma_{j\beta}^\alpha - \Gamma_{jk}^\beta \Gamma_{i\beta}^\alpha \quad (4,8,2)$$

представляет собой некоторый смешанный тензор четвертого порядка, ковариантный относительно  $i, j, k$  и контравариантный относительно  $\alpha$ . Его компоненты образованы из составляющих метрического тензора и их производных первого и второго порядков. Этот тензор, называемый тензором кривизны Римана — Кристофеля, имеет фундаментальное значение в геометрии римановых пространств.

Для задания тензора Римана — Кристофеля вместо смешанных компонент часто употребляют ковариантные компоненты, образуя их путем умножения (4,8,2) на метрический тензор и последующего свертывания

$$R_{ij,kl} = g_{\alpha\lambda} R_{ij,k}^\alpha \quad (4,8,3)$$

Перечислим формальные свойства тензора кривизны.

Переставим два первых индекса ковариантности в (4,8,2) и образуем  $R_{ji,k}^\alpha$ . Непосредственное сравнение с правой частью (4,8,2) дает

$$R_{ij,k}^\alpha = -R_{ji,k}^\alpha, \quad (4,8,4)$$

показывая, что тензор кривизны антисимметричен относительно индексов первой пары.

Выполнив циклическую перестановку всех трех индексов ковариантности, составим  $R_{jk,i}^\alpha$  и  $R_{ki,j}^\alpha$ . Сложив эти компоненты с (4,8,2), получим

$$R_{ij,k}^\alpha + R_{jk,i}^\alpha + R_{ki,j}^\alpha = 0, \quad (4,8,5)$$

убедившись в том, что при циклировании по трем нижним индексам тензор Римана — Кристофеля исчезает.

Рассмотрим теперь ковариантные компоненты тензора кривизны. Антисимметричность величин  $R_{ij,kl}$  относительно индексов первой пары является непосредственным следствием свойства (4,8,4) и не представляет ничего нового. То же можно сказать и о равенстве  $R_{ij,kl} + R_{jk,il} + R_{ki,jl} = 0$ , которое вытекает из соотношения (4,8,5) после умножения на  $g_{\alpha\lambda}$  и свертывания по индексу  $\alpha$ . Существенно новое свойство можно получить из определения (4,8,3), если написать его в развернутой форме. Простые преобразования, которые мы здесь не приводим, позволяют получить равенство

$$R_{ij,kl} = R_{kl,ij}, \quad (4,8,6)$$

показывающее, что тензор Римана — Кристофеля симметричен относительно пар индексов ковариантности.

Комбинируя это свойство с условием антисимметричности (4,8,4), преобразуем  $R_{ij,kl} = R_{kl,ij} = -R_{ij,lk}$ , убедившись в том, что тензор кривизны антисимметричен и относительно индексов второй пары.

Пользуясь свойствами симметрии и антисимметрии, можно сделать первыми любые три индекса из четырех. Например, с помощью преобразования  $R_{ij,kl} = R_{kl,ij} = R_{lk,ji}$  на первых местах мы расположили три последние индекса в исходном обозначении тензора. Отсюда следует, что согласно свойству (4,8,5), результат циклирования тензора  $R_{ij,kl}$  по трем любым индексам равен нулю.

Рассмотренные особенности тензора Римана — Кристофеля выражают ряд тождественных соотношений между его компонентами. Наличие таких соотношений показывает, что все компоненты этого тензора (их общее число равно  $n^2$ ) не могут быть заданы произвольно. В связи с этим естественно возникает вопрос о числе *существенных* компонент, т. е. таких, которые можно задать произвольно, выражая через них все остальные компоненты. Принимая во внимание все тождественные соотношения, можно показать, что число существенных компонент тензора кривизны в общем случае составляет  $\frac{1}{12}n^2(n^2 - 1)$ . При  $n = 2$  оно равно единице, а при  $n = 4$  — двадцати.

Очень важным свойством тензора кривизны Римана — Кристофеля является тождество Бианки — Падова.

Согласно общему определению (4,6,6), ковариантная производная тензора кривизны определяется формулой

$$R_{ij,k;l}^{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^l} R_{ij,k}^{\alpha} + \Gamma_{i\beta}^{\alpha} R_{ij,k}^{\beta} - \Gamma_{il}^{\beta} R_{\beta j,k}^{\alpha} - \Gamma_{jl}^{\beta} R_{i\beta,k}^{\alpha} - \Gamma_{kl}^{\beta} R_{ij,\beta}^{\alpha}. \quad (4,8,7)$$

Первый член правой части в развернутой форме равен

$$\frac{\partial^2 \Gamma_{ik}^{\alpha}}{\partial x^l \partial x^j} - \frac{\partial^2 \Gamma_{ik}^{\alpha}}{\partial x^j \partial x^l} + \frac{\partial}{\partial x^l} (\Gamma_{ik}^{\beta} \Gamma_{i\beta}^{\alpha} - \Gamma_{ik}^{\beta} \Gamma_{j\beta}^{\alpha}). \quad (4,8,8)$$

В любой произвольно выбранной точке пространства Римана, как было показано, можно построить геодезическую систему координат, в которой символы Кристофеля в указанной точке принимают нулевые значения.

Выполним преобразование, перейдя от общих координат к геодезическим в данной точке пространства. В формуле (4,8,7) при таком преобразовании исчезнут все члены, кроме первого, находящегося

из (4,8,8). Следовательно, в геодезических координатах выражение для ковариантной производной тензора кривизны примет вид

$$R_{ij,k \cdot l}^{\alpha} = \frac{\partial^2 \Gamma_{jk}^{\alpha}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 \Gamma_{ik}^{\alpha}}{\partial x^j \partial x^l}. \quad (4,8,9)$$

В этом соотношении выполним круговую подстановку значков  $i, j, l$ , т. е. двух первых индексов ковариантности и индекса ковариантного дифференцирования. Полученные таким образом величины  $R_{il,k \cdot j}^{\alpha}$ ,  $R_{ij,k \cdot l}^{\alpha}$  сложим с (4,8,9):

$$R_{ij,k \cdot l}^{\alpha} + R_{il,k \cdot j}^{\alpha} + R_{ij,k \cdot l}^{\alpha} = 0. \quad (4,8,10)$$

Равенство (4,8,10) найдено в геодезических координатах. Однако, будучи тензорным, оно выполняется во всех системах координат и является поэтому вполне общим. Это соотношение и носит название тождества Бианки — Падова.

Легко видеть, что соотношение (4,8,10) сохраняет свою форму и для ковариантных компонент тензора кривизны, в чем можно убедиться, опуская индекс согласно (4,8,6).

Подробное исследование тензора Римана — Кристофеля и выяснение его геометрического значения не входит в нашу задачу; ограничимся перечислением лишь необходимых формальных его свойств. В заключение только заметим, что тензор кривизны позволяет формулировать общий признак вырождения римановой геометрии в эвклидову.

Как было указано ранее, квадратическая форма (4,4,1) отвечает геометрии Эвклида в том и только в том случае, если существует система координат, в которой все компоненты метрического тензора приводятся к постоянным.

Допустим, что это условие выполнено. Перейдя к указанной системе координат, мы получим  $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 0$  и  $\Gamma_{ii}^k = 0$  во всех точках пространства. Следовательно, согласно (4,8,2),  $R_{ij,k}^{\alpha} = 0$ . Поскольку это равенство является тензорным, оно выполняется при переходе от нашей специальной (декартовой) системы координат к общей. Это значит, что в любых координатах уравнение  $R_{ij,k}^{\alpha} = 0$  представляет собой *необходимый* признак превращения геометрии Римана в геометрию Эвклида.

Доказательство достаточности признака значительно сложнее, и потому мы его здесь не приводим.

Итак, равенство  $R_{ij,k}^{\alpha} = 0$  служит *необходимым и достаточным признаком вырождения римановой геометрии в эвклидову*.

**9. Тензор Риччи.** Переходим к рассмотрению тензора второго порядка, имеющего важное значение в ОТО.