из (4,8,8). Следовательно, в геодезических координатах выражение для ковариантной производной тензора кривизны примет вид

$$R^{\alpha}_{ij,k\cdot l} = \frac{\partial^2 \Gamma^{\alpha}_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 \Gamma^{\alpha}_{ik}}{\partial x^j \partial x^l}. \qquad (4,8,9)$$

В этом соотношении выполним круговую подстановку значков i, j, l, т. е. двух первых индексов ковариантности и индекса ковариантного дифференцирования. Полученные таким образом величины $R^{\alpha}_{jl,k\cdot li}$, $R^{\alpha}_{li,k\cdot lj}$ сложим с (4,8,9):

$$R^{\alpha}_{ij,k\cdot l} + R^{\alpha}_{jl,k\cdot li} + R^{\alpha}_{li,k\cdot lj} = 0. \qquad (4,8,10)$$

Равенство (4,8,10) найдено в геодезических координатах. Однако, будучи тензорным, оно выполняется во всех системах координат и является поэтому вполне общим. Это соотношение и носит название тождества Бианки — Падова.

Легко видеть, что соотношение (4,8,10) сохраняет свою форму и для ковариантных компонент тензора кривизны, в чем можно убедиться, опуская индекс согласно (4,8,6).

Подробное исследование тензора Римана — Кристофеля и выяснение его геометрического значения не входит в нашу задачу; ограничимся перечислением лишь необходимых формальных его свойств. В заключение только заметим, что тензор кривизны позволяет формулировать общий признак вырождения римановой геометрии в эвклидову.

Как было указано ранее, квадратическая форма (4,4,1) отвечает геометрии Эвклида в том и только в том случае, если существует система координат, в которой все компоненты метрического тензора приводятся к постоянным.

Допустим, что это условие выполнено. Перейдя к указанной системе координат, мы получим $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 0$ и $\Gamma^k_{ij} = 0$ во всех точках пространства. Следовательно, согласно (4,8,2), $R^{\alpha}_{ij,k.} = 0$. Поскольку это равенство является тензорным, оно выполняется при переходе от нашей специальной (декартовой) системы координат к общей. Это значит, что в любых координатах уравнение $R^{\alpha}_{ij,k.} = 0$ представляет собой *необходимый* признак превращения геометрии Римана в геометрию Эвклида.

Доказательство достаточности признака значительно сложнее, и потому мы его здесь не приводим.

Итак, равенство $R^{\alpha}_{ij,k.} = 0$ *служит необходимым и достаточным признаком вырождения римановой геометрии в эвклидову.*

9. Тензор Риччи. Переходим к рассмотрению тензора второго порядка, имеющего важное значение в ОТО.

В компонентах тензора Римана — Кристофеля

$$R^{\alpha}_{ki.j.} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{ij}}{\partial x^k} + \Gamma^{\beta}_{jk}\Gamma^{\alpha}_{i\beta} - \Gamma^{\beta}_{ij}\Gamma^{\alpha}_{k\beta}$$

положим $k = \alpha$ и выполним свертывание.

Полученный таким образом ковариантный тензор второго порядка

$$R^{\alpha}_{\alpha i.j.} = R_{ij} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{j\alpha}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{ij}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\beta}_{j\alpha}\Gamma^{\alpha}_{i\beta} - \Gamma^{\beta}_{ij}\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta}, \qquad (4,9,1)$$

который составлен из компонент метрического тензора и их производных первых двух порядков, называется тензором Риччи.

Приведем выражение (4,9,1) к виду, во многих приложениях более удобному. Составим сумму $\Gamma^{\alpha}_{\alpha i}$. Согласно определению символов Кристофеля, имеем

$$\Gamma^{\alpha}_{\alpha i} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x^{\beta}}\right) = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i}.$$

Образуем далее производную по координате от определителя $g = |g_{ij}|$, элементами которого служат ковариантные компоненты метрического тензора. Выполнив дифференцирование, получим

$$\frac{\partial g}{\partial x^i} = \frac{\partial g}{\partial g_{\alpha\beta}}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i} = g g^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i}.$$

Следовательно,

$$\Gamma^{\alpha}_{\alpha i} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^i} = \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial x^i}. \qquad (4,9,2)$$

Вместо (4,9,1) можно написать

$$R_{ij} = \frac{\partial^2 \ln \sqrt{g}}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^{\alpha}_{ij}\frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\alpha}_{i\beta}\Gamma^{\beta}_{j\alpha} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{ij}}{\partial x^{\alpha}}. \qquad (4,9,3)$$

Формулы (4,9,1) и (4,9,3) определяют ковариантные компоненты тензора Риччи. Однако этот тензор можно также задать смешанными или контравариантными компонентами, вычисляя их путем соответствующего поднятия индексов. Смешанные компоненты находятся по формулам $R^i_j = g^{\alpha i}R_{\alpha j}$, а контравариантные — с помощью соотношений $R^{ij} = g^{\alpha i}R^j_{\alpha} = g^{\alpha i}g^{\beta j}R_{\alpha\beta}$. Скаляр рассматриваемого тензора вычисляется полным свертыванием $R = R^{\alpha}_{\alpha} = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}$.

Отметим некоторые особенности тензора Риччи.

Учитывая свойства симметрии и антисимметрии тензора Римана — Кристофеля, выполним преобразование

$$R_{ij} = g^{\alpha\beta}R_{\alpha i.j\beta} = g^{\alpha\beta}R_{j\beta,\alpha i} = g^{\alpha\beta}R_{\beta j,i\alpha} = R_{ji},$$

убедившись в том, что тензор Риччи симметричен относительно индексов ковариантности.

В частности, отсюда непосредственно следует, что число существенных компонент тензора Риччи равно $\frac{1}{2}n(n+1)$. При $n=2$ он имеет только три существенные компоненты, а при $n=4$ их число достигает десяти.

Составим ковариантную дивергенцию тензора Риччи.

Напишем тождество Бианки — Падова для ковариантных компонент тензора кривизны:

$$R_{\alpha\beta.\gamma\delta/i} + R_{\beta i.\gamma\delta/\alpha} + R_{i\alpha.\gamma\delta/\beta} = 0.$$

Умножив это равенство на произведение $g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}$, выполним свертывание по всем повторяющимся индексам. Принимая во внимание соотношения

$$g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}R_{\alpha\beta.\gamma\delta} = g^{\beta\gamma}R_{\beta\gamma} = R;$$
$$g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}R_{\beta i.\gamma\delta} = -g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}R_{\beta i.\delta\gamma} = -R_i^{\alpha};$$
$$g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}R_{i\alpha.\gamma\delta} = -g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}R_{\alpha i.\gamma\delta} = -R_i^{\beta},$$

получим $R_{/i} - R^{\alpha}_{i/\alpha} - R^{\beta}_{i/\beta} = 0$, т. е.

$$R^{\alpha}_{i/\alpha} = \frac{1}{2}R_{/i}. \tag{4,9,4}$$

Это важное уравнение показывает, что ковариантная расходимость тензора Риччи равна половине градиента инварианта этого тензора.

В заключение образуем тензор $E_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R$, который непосредственно применяется в общей теории относительности и играет в ней очень важную роль. Этот тензор, введенный Эйнштейном при составлении уравнений поля, уместно назвать тензором Эйнштейна. Его компоненты, как и составляющие тензора Римана — Кристофеля, выражены через компоненты метрического тензора и их производные по координатам первого и второго порядков.

С помощью смешанных компонент тензора Эйнштейна $E_i^j = R_i^j - \frac{1}{2}\delta_i^j R$ составим его ковариантную расходимость. Пользуясь уравнением (4,9,4), найдем

$$E^{\alpha}_{i/\alpha} = R^{\alpha}_{i/\alpha} - \frac{1}{2}\delta_i^{\alpha}R_{/\alpha} = 0. \tag{4,9,5}$$

Тензор Эйнштейна имеет исчезающую ковариантную расходимость.