10. Кривизна пространства Римана. Пусть в точке M (x^α) риманова пространства заданы контравариантные единичные векторы y^i и z^i, образующие между собой прямой угол. По условию, эти векторы удовлетворяют соотношениям

$$g_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta = 1; \quad g_{\alpha\beta}z^\alpha z^\beta = 1; \quad g_{\alpha\beta}y^\alpha z^\beta = 0. \qquad (4,10,1)$$

Согласно правилам тензорной алгебры, величины

$$x^{ij} = \frac{1}{2}(y^i z^j - y^j z^i) \qquad (4,10,2)$$

являются компонентами контравариантного тензора второго порядка. Этот тензор, антисимметричный относительно индексов контравариантности, принято называть б и в е к т о р о м.

Можно показать, что бивектор (4,10,2) однозначно определяет плоскость P, в которой расположены векторы y^i, z^i, а также площадь образованного ими параллелограмма.

Проведем через точку M замкнутый контур, расположенный в плоскости P, и определим направление обхода этого контура поворотом от вектора y^i к вектору z^i. Перенесем вектор y^i параллельно вдоль указанного контура до возвращения в точку M. В результате этой операции получим некоторый вектор $y^i + \Delta y^i$, где Δy^i — приращение, которое должно быть вычислено по закону параллельного переноса.

Вектор $y^i + \Delta y^i$ отличается от исходного вектора y^i как по модулю, так и по направлению; он вообще не будет лежать в плоскости P. Составим проекцию вектора $y^i + \Delta y^i$ на плоскость P; она образует с исходным вектором y^i некоторый угол $\Delta\varphi$, который мы условимся считать положительным в направлении установленного обхода.

Составим далее отношение $\frac{\Delta\varphi}{\Delta\sigma}$, где $\Delta\sigma$ — площадь, ограниченная построенным контуром, и перейдем к пределу, стягивая контур к точке M. Этот предел называется *кривизной риманова пространства в данной точке и в направлении данной плоскости.*

В геометрии Римана выводится формула

$$\lim \frac{\Delta\varphi}{\Delta\sigma} = R_{\alpha\beta,\gamma\delta}x^{\alpha\beta}x^{\gamma\delta}, \qquad (4,10,3)$$

определяющая кривизну пространства в данной точке и в направлении плоскости, характеризуемой бивектором x^{ij}.

Исчезновение тензора Римана — Кристофеля, как было сказано, служит необходимым и достаточным условием вырождения римановой геометрии в эвклидову. Поэтому из (4,10,3) следует, что кривизна имеет нулевое значение в том и только в том случае, если

геометрия пространства является эвклидовой. Иными словами, пространство Эвклида есть пространство Римана нулевой кривизны.

Рассмотрим случай, когда тензор Римана — Кристофеля имеет вид

$$R_{ij,kl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}), \tag{4,10,4}$$

где K — какая-либо скалярная функция координат.

Внесем это соотношение, а также равенство (4,10,2) в общую формулу (4,10,3). Выполнив необходимые преобразования и учитывая условия (4,10,1), получим

$$R_{\alpha\beta,\gamma\delta}x^{\alpha\beta}x^{\gamma\delta} = K.$$

Это значит, что в случае (4,10,4) кривизна пространства в данной точке не зависит от ориентировки плоскости и может быть функцией только координат точки. Такое пространство называется пространством постоянной кривизны: в каждой его точке кривизны одинаковы во всех двумерных направлениях.

Выполняется и обратное предложение: если кривизна в каждой точке пространства Римана в направлении любой плоскости равна одной и той же скалярной функции K, то тензор Римана — Кристофеля имеет вид (4,10,4). Для доказательства этого предложения требуются более сложные алгебраические преобразования, которые мы опускаем.

Указанное определение пространства постоянной кривизны требует, чтобы в данной точке кривизна не зависела от ориентировки плоскости. Однако в этом определении нет явных условий о кривизнах в *различных* точках, вследствие чего вопрос о виде скалярной функции K остается открытым. Решение этого вопроса содержится в теореме Шура, утверждающей, что в пространстве постоянной кривизны с числом измерений $n > 2$ во всех точках кривизны одинаковы. Это значит, что риманово пространство, изотропное во всех точках, является однородным.

Для доказательства теоремы Шура составим ковариантную производную тензора кривизны (4,10,4)

$$R_{ij,kl/m} = (g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})K_{/m}$$

и внесем ее в тождество Бианки — Падова. Получим

$$(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})K_{/m} + (g_{jk}g_{ml} - g_{jl}g_{mk})K_{/i} + \\ + (g_{mk}g_{il} - g_{ml}g_{ik})K_{/j} = 0.$$

Умножим это равенство на g^{ml} и произведем свертывание по индексам m, l. Принимая во внимание известные соотношения $g^{\alpha l}g_{\alpha j} = \delta^l_j$ и $g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta} = n$, получим после несложных преобразований

$$(n-2)(g_{jk}K_{/i} - g_{ik}K_{/j}) = 0, \tag{4,10,5}$$

откуда при $n > 2$ и $K_{/i} \neq 0$ непосредственно следует

$$g_{jk} = g_{ik} \frac{K_{/j}}{K_{/i}}.$$

Оставляя i, j фиксированными и изменяя индекс K, получим соотношение между элементами i-ой и k-ой строк определителя $|g_{ij}|$. Поскольку эти элементы оказываются пропорциональными, должно быть $|g_{ij}| = 0$, что противоречит известному свойству основной квадратической формы. Поэтому из равенства (4,10,5) с необходимостью следует $K_{/i} = 0$, т. е. $K = \text{const}$, что мы и хотели доказать.

Случай $n = 2$ не представляет интереса, так как при этом в каждой точке континуума можно определить кривизну в направлении только одной единственной плоскости.

Формула (4,10,4) позволяет составить простое выражение для компонент тензора Риччи в пространстве постоянной кривизны. Умножив равенство

$$R_{\alpha i,j\beta} = K(g_{\alpha j}g_{i\beta} - g_{\alpha\beta}g_{ij})$$

на $g^{\alpha\beta}$ и проведя свертывание, получим после упрощений

$$R_{ij} = -(n-1)Kg_{ij}. \tag{4,10,6}$$

При $n > 3$ эта формула представляет собой необходимое, но недостаточное условие постоянства кривизны, так как число существенных компонент тензора Римана — Кристофеля, равное $\frac{1}{12}n^2(n^2 - 1)$, превышает число компонент тензора Риччи, равное $\frac{1}{2}n(n+1)$, вследствие чего обратный переход от (4,10,6) к (4,10,4) вообще невозможен. В частном случае, при $n = 3$, когда число тех и других компонент равно шести, соотношение (4,10,6) является не только необходимым, но и достаточным условием постоянной кривизны риманова пространства.

В заключение заметим, что существует три класса римановых пространств постоянной кривизны. При $K = \text{const}$ квадратическую форму можно привести к следующему виду:

$$ds^2 = \frac{dx^{1^2} + \cdots + dx^{n^2}}{\left[1 + \frac{1}{4}K(x^{1^2} + \cdots + x^{n^2})\right]^2}. \tag{4,10,7}$$

Простейшему случаю $K = 0$ отвечает эвклидово пространство в прямоугольных декартовых координатах. Если $K < 0$, то пространство имеет постоянную отрицательную кривизну; радиусом кривизны называется величина $(-K)^{-\frac{1}{2}}$. Такое пространство называют **гиперболическим**. Для $n = 3$ его геометрия впервые

была развита Н. И. Лобачевским. При $K > 0$ имеем случай пространства постоянной положительной кривизны. Радиус такого пространства, называемого сферическим, определяется формулой $K^{-\frac{1}{2}}$.

11. Сигнатура квадратической формы. Мы ввели ряд определений и составили формулы, употребляемые в ОТО. Однако при их применении необходимо иметь в виду, что в теории относительности метрика в некотором отношении существенно отличается от обычной метрики римановых пространств. В простейшем случае это различие проявляется при сравнении эвклидовой геометрии с четырехмерным континуумом Минковского.

Пусть имеется квадратическая форма

$$\varphi(x, x) = g_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta}; \quad \alpha, \beta = 1, \ldots n \tag{4,11,1}$$

с произвольно заданными постоянными коэффициентами $g_{\alpha\beta}$, отвечающими условию симметрии.

С помощью линейных преобразований эту форму можно привести к каноническому виду

$$\varphi(x, x) = \varepsilon_{\alpha}x^{\alpha^2}; \quad \varepsilon_{\alpha} = \pm 1; \quad \alpha = 1, \ldots r, \tag{4,11,2}$$

где r — ранг матрицы, образованной из коэффициентов приводимой формы. Для простоты допустим, что ранг матрицы совпадает с ее порядком, т. е. $r = n$.

Форму (4,11,1) к виду (4,11,2) можно привести различными способами. При этом выполняется так называемый закон инерции Якоби — Сильвестра, согласно которому числа положительных и отрицательных коэффициентов ε_{α} канонической формы не зависят от способа приведения. Обозначив эти числа через p и q соответственно, имеем $p + q = n$. Разность $p - q$ называется сигнатурой квадратической формы.

Пространству Эвклида в прямоугольных декартовых координатах отвечает случай $p = n$, $q = 0$, когда сигнатура равна числу измерений пространства. В отличие от этого, пространственно-временной континуум Минковского, применяемый в СТО, характеризуется квадратической формой

$$s^2 = -x^2 - y^2 - z^2 + t^2,$$

для которой $p = 1$, $q = 3$, что соответствует сигнатуре -2.

Иногда пользуются формой

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - t^2$$

с сигнатурой $+2$.

Таким образом, геометрия пространственно-временного континуума СТО отличается от обычной геометрии Эвклида; ее можно назвать, как это часто делают, псевдоэвклидовой.