была развита Н. И. Лобачевским. При $K > 0$ имеем случай пространства постоянной положительной кривизны. Радиус такого пространства, называемого сферическим, определяется формулой $K^{-\frac{1}{2}}$.

11. Сигнатура квадратической формы. Мы ввели ряд определений и составили формулы, употребляемые в ОТО. Однако при их применении необходимо иметь в виду, что в теории относительности метрика в некотором отношении существенно отличается от обычной метрики римановых пространств. В простейшем случае это различие проявляется при сравнении эвклидовой геометрии с четырехмерным континуумом Минковского.

Пусть имеется квадратическая форма

$$\varphi(x, x) = g_{\alpha\beta} x^{\alpha} x^{\beta}; \quad \alpha, \beta = 1, \dots n \tag{4,11,1}$$

с произвольно заданными постоянными коэффициентами $g_{\alpha\beta}$, отвечающими условию симметрии.

С помощью линейных преобразований эту форму можно привести к каноническому виду

$$\varphi(x, x) = \varepsilon_{\alpha} x^{\alpha^2}; \quad \varepsilon_{\alpha} = \pm 1; \quad \alpha = 1, \dots r, \tag{4,11,2}$$

где r — ранг матрицы, образованной из коэффициентов приводимой формы. Для простоты допустим, что ранг матрицы совпадает с ее порядком, т. е. $r = n$.

Форму (4,11,1) к виду (4,11,2) можно привести различными способами. При этом выполняется так называемый закон инерции Якоби — Сильвестра, согласно которому числа положительных и отрицательных коэффициентов ε_{α} канонической формы не зависят от способа приведения. Обозначив эти числа через p и q соответственно, имеем $p + q = n$. Разность $p - q$ называется сигнатурой квадратической формы.

Пространству Эвклида в прямоугольных декартовых координатах отвечает случай $p = n$, $q = 0$, когда сигнатура равна числу измерений пространства. В отличие от этого, пространственно-временной континуум Минковского, применяемый в СТО, характеризуется квадратической формой

$$s^2 = -x^2 - y^2 - z^2 + t^2,$$

для которой $p = 1$, $q = 3$, что соответствует сигнатуре -2.

Иногда пользуются формой

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - t^2$$

с сигнатурой $+2$.

Таким образом, геометрия пространственно-временного континуума СТО отличается от обычной геометрии Эвклида; ее можно назвать, как это часто делают, псевдоэвклидовой.

Аналогичное различие существует между римановой метрикой и метрикой пространства-времени ОТО.

Если в пространстве Римана ввести систему ортогональных координат, то общая форма (4,4,1) примет вид

$$ds^2 = g_{\alpha\alpha} dx^{\alpha^2}$$

с положительными коэффициентами $g_{\alpha\alpha}$. В частном случае, когда $g_{\alpha\alpha}$ приводятся к постоянным, пространство является эвклидовым.

Пространственно-временной континуум ОТО в ортогональных координатах характеризуется квадратической формой с тремя отрицательными и одним положительным коэффициентом (или наоборот), т. е. с сигнатурой -2 (или $+2$); геометрию этого континуума в общем случае можно назвать псевдоримановой.

Рассмотренные в этой главе теоремы и формулы геометрии Римана не зависят от сигнатуры квадратической формы; в частности, они выполняются и в псевдоримановой геометрии ОТО.

Необходимо только помнить, что определитель $g = |g_{ij}|$, имеющий в обычной римановой геометрии положительное значение, при сигнатуре $(-, -, -, +)$ становится отрицательным, вследствие чего отдельные формулы нуждаются в соответствующей переделке. Например, в уравнении (4,9,3) определитель g необходимо заменить величиной $-g$.

ЛИТЕРАТУРА

1. B. Riemann. Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, 1854, Gött. Abhandlungen, v. 13, 133. Русск. пер.: Б. Риман. Сочинения. ОГИЗ, М.— Л., 1948.
2. G. Ricci, T. Levi-Civita.— Annal. Mathem., 54, 1901.
3. L. P. Eisenhart. Riemannian Geometry. Princeton, 1927. Русск. пер.: Л. П. Эйзенхарт. Риманова геометрия. ИЛ, М., 1948.
4. E. Cartan. Leçons sur la geometrie des espaces de Riemann. Paris, 1928. Русск. пер.: Э. Картан. Геометрия римановых пространств. ОНТИ, М., 1936.
5. П. К. Рашевский. Риманова геометрия и тензорный анализ. «Наука», М., 1967.